УДК 530.1

НЕКОТОРЫЕ СОСТОЯНИЯ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ БОЗОНОВ

Д. С. Голиков

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

E-mail: golikov@qs.phys.msu.ru

С помощью вариационного метода Боголюбова получена оценка для собственных значений гамильтониана. Рассмотрен вектор состояния системы в виде двухчастичной экспоненты, зависящей от двух аргументов. Найдены значения этих аргументов, реализующие минимум энергии, а также соотношения для параметров гамильтониана, обеспечивающие существование решений уравнения Шрёдингера.

Рассмотрим обобщение гамильтониана, исследованного в статье [1]. Гамильтониан определим следующим образом:

$$\hat{H} = -\frac{T}{G}\sum_{i=1}^{G} b_i^+ \sum_{j=1}^{G} b_j + \frac{J}{G}\sum_{i=1}^{G} b_i^+ b_i^+ \sum_{j=1}^{G} b_j b_j - \mu \sum_{i=1}^{G} b_i^+ b_i,$$

где G — натуральное число, T и J — произвольные параметры, μ — химический потенциал. Операторы рождения b_i^+ и уничтожения b_i подчиняются коммутационным соотношениям статистики Бозе. Введем вектор состояния

$$|\Phi\rangle = \prod_{i=1}^{G} \varphi(b_i^+)|0\rangle, \quad \varphi(b_i^+) = \exp\left\{\alpha b_i^+ + \beta b_i^+ b_i^+\right\},$$

где α и β некоторые постоянные. Среднее значение оператора $\hat{A}$ по состоянию $|\Phi\rangle$ определим равенством

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\langle \Phi|\hat{A}|\Phi\rangle}{\langle \Phi|\Phi\rangle}.$$

Для средних значений выполняются следующие соотношения:

$$\langle b_i^+ b_j \rangle = \begin{cases} \langle b_i^+\rangle\langle b_j\rangle & \text{при } i \neq j, \\ \langle b_i^+ b_i\rangle & \text{при } i = j, \end{cases}$$

$$\langle b_i^+ b_i^+ b_j b_j \rangle = \begin{cases} \langle b_i^+ b_i^+\rangle\langle b_j b_j\rangle & \text{при } i \neq j, \\ \langle b_i^+ b_i^+ b_i b_i\rangle & \text{при } i = j, \end{cases}$$

где средние в правой части не зависят от значения индекса и его можно опустить. Если оператор $\hat{A}$ зависит лишь от операторов рождения и уничтожения одного индекса, то его среднее можно представить как среднее по состоянию $|\varphi\rangle = \exp\{\alpha b^+ + \beta b^+ b^+\}|0\rangle$:

$$\langle \hat{A}(b_i, b_i^+)\rangle = \frac{\langle \varphi|\hat{A}(b, b^+)|\varphi\rangle}{\langle \varphi|\varphi\rangle}.$$

Таким образом, среднее значение гамильтониана можно записать в виде

$$\begin{aligned}\langle \hat{H}\rangle = -\left(\frac{T}{G} + \mu\right) G\langle b^+ b\rangle - T(G-1)\langle b^+\rangle\langle b\rangle + \\ + J\langle b^+ b^+ b b\rangle + J(G-1)\langle b^+ b^+\rangle\langle b b\rangle.\end{aligned} \tag{1}$$

Вычисление средних. Произведем каноническое преобразование Боголюбова [2, 3]:

$$\begin{aligned} d &= x + yb + zb^+, \\ d^+ &= x + y^* b^+ + z^* b, \end{aligned} \qquad |y|^2 - |z|^2 = 1, \tag{2}$$

так, чтобы вектор $|\varphi\rangle = e^{\alpha b^+ + \beta b^+ b^+}|0\rangle$ являлся вакуумным по отношению к новому оператору уничтожения d (с точностью до коэффициента):

$$d|\varphi\rangle = (x + \alpha y + \{2y\beta + z\}b^+)|\varphi\rangle = 0.$$

Отсюда совместно с условием каноничности преобразования (2) получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\frac{\alpha}{\sqrt{1-4\beta^2}}, \\ y &= \mp\frac{1}{\sqrt{1-4\beta^2}}, \\ z &= \pm\frac{2\beta}{\sqrt{1-4\beta^2}}, \end{aligned}\right. \implies \begin{aligned} |z|^2 &= \frac{4\beta^2}{1-4\beta^2}, \\ y^* z = y z^* &= -\frac{2\beta}{1-4\beta^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Положим $\gamma \equiv x(z^* - y) = \frac{\alpha}{1-2\beta}$. Тогда обратное преобразование запишется в виде

$$\begin{aligned} b &= \gamma - zd^+ + y^* d, \\ b^+ &= \gamma - z^* d + y d^+. \end{aligned}$$

Далее, используя обратное преобразование, несложно получить:

$$\begin{aligned} &\langle b\rangle = \langle b^+\rangle = \gamma, \\ &\langle b^+ b\rangle = \gamma^2 + |z|^2, \\ &\langle bb\rangle = \langle b^+ b^+\rangle = \gamma^2 - y^* z, \\ &\langle b^+ b^+ b b\rangle = 2|z|^4 + 4\gamma|z|^2 + (\gamma^2 - yz^*)(\gamma^2 - y^* z). \end{aligned}$$

Подставим эти средние в (1):

$$\begin{aligned} \langle H\rangle = -(T + \mu G)(\gamma^2 + |z|^2) - T(G-1)\gamma^2 + \\ + J\left(2|z|^4 + 4\gamma|z|^2\right) + JG(\gamma^2 - yz^*)(\gamma^2 - y^* z). \end{aligned} \tag{4}$$

Квадрат нормы вектора $|\varphi\rangle$ равен [4]

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \frac{e^{\alpha\gamma}}{\sqrt{1-4\beta^2}}.$$

Следовательно, допустимые значения параметра β лежат в интервале

$$-\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}.$$

Возможные состояния. Оценка для собственных значений гамильтониана, полученная из вариационного метода Боголюбова, как следует из (3), (4), может быть записана в виде [5]

$$f(\beta,\gamma) \equiv \lim_{G\to\infty} \frac{\langle H\rangle}{G} =$$
$$= -T\gamma^2 + J\left(\gamma^2 + \frac{2\beta}{1-4\beta^2}\right)^2 - \mu\left(\gamma^2 + \frac{4\beta^2}{1-4\beta^2}\right). \tag{5}$$

Возможные точки минимума определяются из необходимого условия экстремума, а соответствующие соотношения на параметры — из условий существования решений и достаточного условия существования минимума — положительности диагональных миноров матрицы, составленной из вторых производных:

$$f_{\beta\beta} > 0, \qquad \begin{vmatrix} f_{\beta\beta} & f_{\beta\gamma} \\ f_{\beta\gamma} & f_{\gamma\gamma} \end{vmatrix} > 0. \tag{6}$$

Приравнивая частные производные функции $f(\beta,\gamma)$ к нулю, получим систему

$$\begin{cases} J\left(\gamma^2 + \dfrac{2\beta}{1-4\beta^2}\right) = \dfrac{2\beta\mu}{1+4\beta^2}, \\ \gamma\left(T + \mu - \dfrac{4\beta\mu}{1+4\beta^2}\right) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Вакуумное решение $\beta = \gamma = 0$ обладает нулевой энергией и является минимумом энергии при $J - \mu > 0$, $T + \mu < 0$.

Двухчастичное состояние $\beta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu - J}{\mu + J}}$, $\gamma = 0$ двукратно вырождено и существует при условиях

$$\begin{cases} 0 < J < \mu > 0, \\ T + \mu < \pm\sqrt{\mu^2 - J^2}. \end{cases}$$

Его энергия $E = -\frac{1}{4}\frac{(\mu - J)^2}{J}$. Из условий на J, μ следует, что одна и та же система (характеризующаяся уникальным набором T, J, μ), не может иметь одновременно вакуумного и двухчастичного состояний.

Третье решение

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2}, \\ \gamma^2 = 2\beta\left(\dfrac{\mu}{J}\dfrac{1}{1+4\beta^2} - \dfrac{1}{1-4\beta^2}\right) \end{cases}$$

существует при условиях

$$a = \frac{\mu}{T+\mu} < -1, \quad \frac{\mu}{J} \leqslant \frac{1+4\beta^2}{1-4\beta^2}$$

и реализует минимум энергии. Четвертое решение системы (7)

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 1}}{2}, \\ \gamma^2 = 2\beta\left(\dfrac{\mu}{J}\dfrac{1}{1+4\beta^2} - \dfrac{1}{1-4\beta^2}\right) \end{cases}$$

имеет место при

$$a = \frac{\mu}{T+\mu} > 1, \quad \frac{\mu}{J} \geqslant \frac{1+4\beta^2}{1-4\beta^2}.$$

Оно соответствует точке перегиба. Первое неравенство (6) накладывает дополнительное условие на параметры гамильтониана:

$$\mu < J\left(\frac{1+4\beta^2}{1-4\beta^2}\right)^3.$$

Энергия третьего вырожденного состояния выражается из (5) подстановкой значений β и γ.

Автор благодарен В. П. Маслову, Б. И. Садовникову и Г. В. Ковалю за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. *Белов В.В., Маслов В.П., Шведов О.Ю.* // Матем. заметки. 1993. **53**, № 5. С. 14.
2. *Боголюбов Н.Н.* Избранные труды. Киев, 1971.
3. *Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.)* Введение в квантовую статистическую механику. М., 1965.
4. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. М., 1965.
5. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М., 2000.

Поступила в редакцию
12.05.04