УДК 537.611.43: 530.145

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА С КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ В СИСТЕМАХ ЧАСТИЦ С СОБСТВЕННЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ

**Л. С. Кузьменков, Д. Э. Харабадзе**

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: lsk@phys.msu.ru

**Сформулирована и решена задача нахождения точного решения уравнений квантовой гидродинамики систем многих частиц с собственным магнитным моментом. Решение найдено в виде электромагнитной волны с круговой поляризацией, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля.**

В работе [1] получены уравнения квантовой гидродинамики для систем частиц, взаимодействие между которыми можно считать кулоновским. В работах [2–4] эти уравнения были распространены на случай систем многих частиц, обладающих собственным магнитным моментом. Решения этих уравнений для волн в системах частиц с собственным магнитным моментом найдены в работах [5, 6] в линейном приближении.

В настоящей работе мы ставим своей целью получить точное решение уравнений квантовой гидродинамики для нелинейных волн, распространяющихся вдоль магнитного поля в таких системах частиц и исследовать их динамику. Для систем частиц без спина подобные волны с круговой поляризацией описаны в работе [7].

Рассмотрим систему многих частиц с электромагнитным взаимодействием, обладающих также собственными магнитными моментами. Будем считать, что заряды частиц в равновесном состоянии скомпенсированы фоном зарядов более тяжелых частиц таким образом, что система остается электронейтральной.

Из уравнений квантовой механики следует [3, 4], что пространственная и временная зависимость таких полевых характеристик системы, как концентрация частиц $n$, давление $p$, поле скоростей $\mathbf{v}$, плотность удельного магнитного момента $\mu$, электрическое поле $\mathbf{E}$, магнитное поле $\mathbf{B}$ (внешнее и создаваемое самими частицами), подчиняются следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{v}=\frac{e}{m}\mathbf{E}+\frac{e}{mc}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right]-\frac{\nabla p}{mn}+\mu^{\beta}\nabla B^{\beta},\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\right)\mu=\frac{e}{mc}\left[\mu\times\mathbf{B}\right],\\
[\nabla\times\mathbf{E}]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\qquad [\nabla\times\mathbf{B}]=\frac{4\pi e}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\\
(\nabla\mathbf{E})=4\pi e(n-N_0),\qquad (\nabla\mathbf{B})=0,\\
\mathbf{J}=n\mathbf{v}+\frac{c}{e}\left[\nabla\times\mathbf{M}\right],\qquad \mathbf{M}=n\mu,
\end{gathered}\tag{1}$$

где $\mathbf{M}$ — магнитный момент единицы объема, $\mathbf{J}$ — модифицированный вектор тока, а концентрация частиц и плотность тока связаны уравнением непрерывности. Как и для бесспиновых частиц, для потенциалов поля из (1) получим:

$$\begin{gathered}
4\pi en=\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\phi,\\
4\pi\frac{e}{c}\mathbf{J}=\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\mathbf{A}
\end{gathered}\tag{2}$$

при условии калибровки Лоренца потенциалов электромагнитного поля:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\nabla\mathbf{A})=0.\tag{3}$$

Рассмотрим распространение в этой системе частиц электромагнитной волны с круговой поляризацией и частотой $\omega$. Будем считать, что волна распространяется вдоль внешнего магнитного поля, совпадающего по направлению с осью $z$ декартовой системы координат, и что возмущения физических величин, представленных в уравнениях (1), являются функциями только координаты $z$,

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}A_{\perp}(\mathbf{e}_x\pm i\mathbf{e}_y)+\frac{1}{2}B_z x\mathbf{e}_y+\text{c. c.},\tag{4}$$

где $A_{\perp}$ подлежит определению, а $B_z$ — внешнее магнитное поле; «с. с.» обозначает слагаемые, полученные путем комплексного сопряжения предыдущих слагаемых. В этом случае общий вид векторов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{v}$ определяется выражениями

$$\begin{gathered}
\mathbf{J}=\frac{1}{2}J_{\perp}(\mathbf{e}_x\pm i\mathbf{e}_y)+\text{c. c.},\\
\mathbf{v}=\frac{1}{2}v_{\perp}(\mathbf{e}_x\pm i\mathbf{e}_y)+\text{c. c.}
\end{gathered}\tag{5}$$

Из (2), (4) находим:

$$\mathbf{J}=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{e}_x\pm i\mathbf{e}_y)\frac{c}{e}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{2}A_{\perp}+\text{c. c.}\tag{6}$$

Векторное поле магнитной индукции в этом случае будет иметь вид

$$\mathbf{B}=\frac{1}{2}\mathbf{e}_z B_z\mp(\mathbf{e}_x\pm i\mathbf{e}_y)\frac{i}{2}\frac{\partial A_{\perp}}{\partial z}+\text{c. c.}\tag{7}$$

Векторное поле $\mathbf{M}$ представим в виде суммы поперечной и продольной составляющих:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)M_\perp + \frac{1}{2}\mathbf{e}_z M_z + \text{c. c.} \tag{8}$$

Будем искать решение, в котором составляющая плотности магнитного момента, параллельная $\mathbf{e}_z$, не зависит от времени, а перпендикулярная составляющая зависит от времени как $e^{-i\omega t}$. Из уравнений (1) в этом случае следует, что параллельная ($\mu_z$) и перпендикулярная ($\mu_\perp$) направлению внешнего магнитного поля составляющие удельной плотности магнитного момента связаны соотношением

$$M_\perp = \mp M_z \frac{\frac{e}{mc}B_\perp}{\omega \pm \frac{eB_z}{mc}}. \tag{9}$$

При $\omega = \frac{eB_z}{mc}$ составляющая плотности магнитного момента, параллельная направлению внешнего магнитного поля, обращается в нуль.

Обратимся теперь к первому уравнению системы (1), т. е. к уравнению изменения плотности импульса системы. Вследствие (5) нелинейное слагаемое в левой части этого уравнения будет отсутствовать. Поэтому

$$n\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \nabla_\alpha p = \frac{e}{m}n\mathbf{E} + \frac{e}{mc}n\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}v_\beta B\gamma + n\mu_\beta \nabla_\alpha B_\beta. \tag{10}$$

Вследствие (1), (9) в последнем уравнении слагаемое $\mu_\beta \nabla_\alpha B_\beta$ обращается в нуль, так что

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} - \frac{e}{mc}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right] = \frac{e}{m}\mathbf{E} - \frac{\nabla p}{n}. \tag{11}$$

Для поперечной и продольной составляющих поля скоростей находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}v_\perp \mp \frac{e}{mc}iv_\perp B_z = \frac{e}{m}E_\perp, \tag{12}$$

$$\pm iB_\perp v_\perp^* + \text{c. c.} = E_z - \frac{1}{2mn}\frac{\partial p}{\partial z} + \text{c. c.} \tag{13}$$

Поскольку

$$v_\perp = i\frac{\frac{e}{m}E_\perp}{\omega \pm \frac{eB_z}{mc}} = -\frac{\frac{e\omega}{mc}A_\perp}{\omega \pm \frac{eB_z}{mc}}, \tag{14}$$

$$J_\perp = -\frac{c}{4\pi e}\left(\frac{1}{c^2}\omega^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_\perp, \tag{15}$$

$$M_\perp = n\frac{\mu_z \frac{e}{mc}\frac{\partial A_\perp}{\partial z}}{\omega \pm \frac{eB_z}{mc}}, \tag{16}$$

а модифицированный ток $J$ определяется в (1), то уравнение для векторного потенциала $A$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} &\frac{c}{4\pi e}\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_\perp = \\ &= \frac{\frac{e\omega}{mc}}{\omega \pm \frac{eB_z}{mc}}nA_\perp \mp \frac{\mu_z}{m}\frac{1}{\omega - \frac{eB_z}{mc}}\frac{\partial}{\partial z}\left(n\frac{\partial}{\partial z}A_\perp\right), \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$n = N_0 \mp \frac{\frac{e\omega}{mc}}{\omega \pm \frac{eB_z}{mc}}\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(A_\perp^* A_\perp\right), \tag{18}$$

$$\mu_z = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 - \frac{\frac{e^2}{m^2c^2}}{\left(\omega - \frac{eB_z}{mc}\right)^2}\frac{\partial A_\perp^*}{\partial z}\frac{\partial A_\perp}{\partial z}}}. \tag{19}$$

Уравнение (17) описывает изменение амплитуды поперечной компоненты векторного потенциала и его фазы вдоль направления распространения периодической по времени волны. Решение уравнения (17), как легко видеть, существует. Поэтому в системе заряженных частиц с собственным магнитным моментом могут распространяться нелинейные периодические электромагнитные волны, векторный потенциал которых определяется уравнением (17). При этом пространственное распределение плотности заряда определяется уравнением (18). Точное решение уравнения для амплитуд электромагнитного поля (17) можно получить для волн, которые могут распространяться при постоянных концентрации числа частиц $n$ и проекции плотности магнитного момента на направление распространения.

В этом случае уравнение (17) становится линейным:

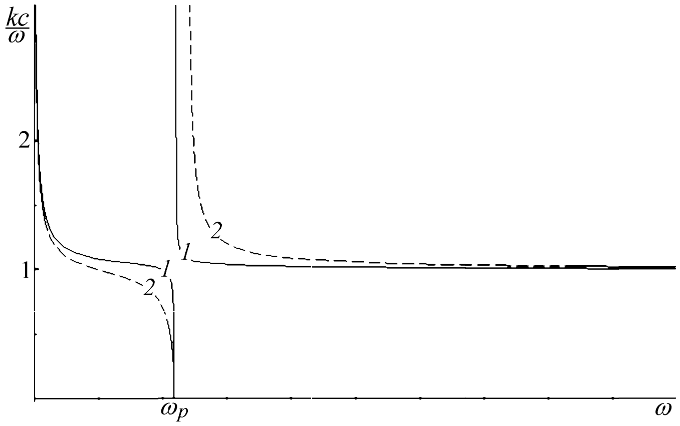
$$\begin{aligned} &-\frac{c}{4\pi e}\left(\frac{1}{c^2}\omega^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_\perp = \\ &= -\frac{\frac{e\omega}{mc}N_0}{\omega \pm \frac{eB_z}{mc}}A_\perp \mp \frac{c}{e}\frac{\frac{e}{mc}M_z}{\omega \pm \frac{eB_z}{mc}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}A_\perp. \end{aligned} \tag{20}$$

Решение линейного уравнения поля (20) можно получить при помощи стандартной процедуры [8], основанной на преобразовании Фурье. Конечные амплитуды имеют волны, для которых выполняется дисперсионное уравнение

$$c^2k^2 = \omega\frac{\omega^2 \pm \omega\frac{eB_z}{mc} - \frac{4\pi e^2 n}{m}}{\omega \pm \frac{e(B_z + 4\pi M_z)}{mc}}. \tag{21}$$

Следует отметить, что зависимость дисперсионного соотношения от амплитуды волны неявно входит через $M_z$ в формулу (19). Приведенное дисперсионное соотношение согласуется с [5, 6], а в случае обращения $B_z$ и $M_z$ в нуль приведенное дисперсионное соотношение совпадает с дисперсионным соотношением для плазменных волн.

Таким образом, показано, что в системе многих частиц с собственными магнитными моментами возможно распространение периодических во времени электромагнитных волн, амплитуды которых определяются нелинейным уравнением поля второго порядка (17). При постоянных проекции плотности магнитного момента на направление распространения и концентрации частиц нелинейные уравнения квантовой гидродинамики (1) имеют точные решения в виде суперпозиции электромагнитных волн, дисперсия которых определяется соотношением (21)




Зависимость показателя преломления $\frac{kc}{\omega}$ от частоты волны. Кривая *2* отличается от кривой *1* бо́льшим значением продольной намагниченности

и зависит от продольной плотности магнитного момента. Зависимость концентрации частиц в такой волне от амплитуды является нелинейной и определяется соотношением (18). На рисунке приведен качественный график зависимости показателя преломления вещества от частоты проходящей электромагнитной волны.

**Литература**


1. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г.* // ТМФ. 1999. **118**. С. 287.
2. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г., Федосеев В.В.* // Изв. вузов. Физика. 2000. **43**, № 9. С. 8.
3. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г., Федосеев В.В.* // ТМФ. **126**, № 1. С. 136.
4. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г., Федосеев В.В.* // ТМФ. **126**, № 2. С. 258.
5. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г., Федосеев В.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 5. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 2000. N 5. P. 1).
6. *Кузьменков Л.С., Харабадзе Д.Э.* // Изв. вузов. Физика. 2004. **47**, № 4. С. 87.
7. *Shukla P.K., Rao N.N., Anderson D.* et al. // Phys. Fluids. 1985. **28**, № 4. P. 1112.
8. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М., 1988.


Поступила в редакцию
08.09.04