УДК 517.956.224

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИССИПАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ С УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ НА РАЗРЕЗАХ

П. А. Крутицкий, В. В. Колыбасова

(*кафедра математики*)

E-mail: termoyad@rambler.ru

Изучается задача Дирихле–Неймана для диссипативного уравнения Гельмгольца в многосвязной плоской области (внешней или внутренней), содержащей разрезы. На замкнутых кривых задано условие Неймана, а на разрезах — условие Дирихле. Доказаны существование и единственность решения. Получено интегральное представление решения в виде потенциалов. Задача сведена к однозначно разрешимым интегральным уравнениям.

Задачи в областях с разрезами используются в прикладных науках для моделирования физических процессов в областях с трещинами. Разрезы моделируют трещины, крылья, экраны, длинные отмели, волнорезы в механике и технике. Задачи Дирихле и Неймана для диссипативного уравнения Гельмгольца в областях с разрезами изучались в работах [1, 2].

На плоскости $x=(x_1,x_2)\in R^2$ рассмотрим многосвязную область, ограниченную простыми разомкнутыми кривыми $\Gamma_1^1,\ldots,\Gamma_{N_1}^1\in C^{2,\lambda}$, $\lambda\in(0,1]$, и простыми замкнутыми кривыми $\Gamma_1^2,\ldots,\Gamma_{N_2}^2\in C^{2,0}$ так, что кривые не имеют общих точек, в том числе и концов. Будем рассматривать случай как внешней, так и внутренней области, когда кривая Γ_1^2 охватывает все остальные. Положим $\Gamma^1=\bigcup\limits_{n=1}^{N_1}\Gamma_n^1$, $\Gamma^2=\bigcup\limits_{n=1}^{N_2}\Gamma_n^2$, $\Gamma=\Gamma^1\cup\Gamma^2$. Связную область, ограниченную Γ^2 и содержащую Γ^1, обозначим $\mathcal{D}$, так что $\partial\mathcal{D}=\Gamma^2$, $\Gamma^1\subset\mathcal{D}$. Предположим, что каждая кривая Γ_n^k параметризована длиной дуги s: $\Gamma_n^k=\Big\{x\colon\ x=x(s)=(x_1(s),x_2(s)),$ $s\in\left[a_n^k,b_n^k\right]\Big\}$, $n=1,\ldots,N_k$, $k=1,2$, — так, что $a_1^1<b_1^1<\ldots<a_{N_1}^1<b_{N_1}^1<a_1^2<b_1^2<\ldots<a_{N_2}^2<b_{N_2}^2$ и область $\mathcal{D}$ остается справа при возрастании параметра s на Γ_n^2. Совокупности отрезков оси Os $\bigcup\limits_{n=1}^{N_1}\left[a_n^1,b_n^1\right]$, $\bigcup\limits_{n=1}^{N_2}\left[a_n^2,b_n^2\right]$, $\bigcup\limits_{k=1}^{2}\bigcup\limits_{n=1}^{N_k}\left[a_n^k,b_n^k\right]$ также будем обозначать Γ^1, Γ^2 и Γ соответственно. Положим $C^0\left(\Gamma_n^2\right)=\Big\{\mathcal{F}(s)\colon\ \mathcal{F}(s)\in C^0\left[a_n^2,b_n^2\right],$ $\mathcal{F}\left(a_n^2\right)=\mathcal{F}\left(b_n^2\right)\Big\}$ и $C^0(\Gamma^2)=\bigcap\limits_{n=1}^{N_2}C^0\left(\Gamma_n^2\right)$. Вектор касательной к Γ в точке $x(s)$ обозначим $\tau_x=(x_1'(s),x_2'(s))$. Пусть $\mathbf{n}_x=(x_2'(s),-x_1'(s))$ — вектор нормали к Γ в $x(s)$. Будем рассматривать Γ^1 как совокупность разрезов. Сторону Γ^1, остающуюся слева при возрастании параметра s, обозначим $(\Gamma^1)^+$, а противоположную сторону — $(\Gamma^1)^-$. Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу гладкости $\mathbf{K}$, если

1) $u\in C^0\left(\overline{\mathcal{D}\setminus\Gamma^1}\right)\cap C^2\left(\mathcal{D}\setminus\Gamma^1\right)$ и $u(x)$ непрерывна на концах разрезов Γ^1,

2) $\nabla u\in C^0\left(\overline{\mathcal{D}\setminus\Gamma^1}\setminus\Gamma^2\setminus X\right)$, где X — совокупность точек, состоящая из концов Γ^1: $X=\bigcup\limits_{n=1}^{N_1}\left[x\left(a_n^1\right)\cup x\left(b_n^1\right)\right]$,

3) в окрестности любой точки $x(d)\in X$ для некоторых констант $\mathcal{C}>0$, $\epsilon>-1$ выполняется неравенство

$$|\nabla u|\leqslant\mathcal{C}|x-x(d)|^{\epsilon},\tag{1}$$

где $x\to x(d)$ и $d=a_n^1$ или $d=b_n^1$, $n=1,\ldots,N_1$,

4) существует равномерный по всем $x(s)\in\Gamma^2$ предел $(\mathbf{n}_x,\nabla_{\hat{x}}u(\hat{x}))$ при стремлении $\hat{x}\in\mathcal{D}\setminus\Gamma^1$ к $x\in\Gamma^2$ по нормали $\mathbf{n}_x$.

В определении класса $\mathbf{K}$ $u(x)$ и $\nabla u(x)$ непрерывно продолжимы на разрезы $\Gamma^1\setminus X$ слева и справа, но могут иметь скачок при переходе через $\Gamma^1\setminus X$.

Задача U. Найти функцию $u(x)$ из класса $\mathbf{K}$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца

$$\begin{gathered}u_{x_1x_1}(x)+u_{x_2x_2}(x)+\beta^2u(x)=0,\\ x\in\mathcal{D}\setminus\Gamma^1,\quad \beta=\mathrm{const},\quad \operatorname{Im}\beta>0\end{gathered}\tag{2}$$

и граничным условиям

$$\begin{gathered}u(x(s))|_{(\Gamma^1)^+}=F^+(s),\quad u(x(s))|_{(\Gamma^1)^-}=F^-(s),\\ \left.\frac{\partial u(x(s))}{\partial\mathbf{n}_x}\right|_{\Gamma^2}=F(s).\end{gathered}\tag{3}$$

Если $\mathcal{D}$ — внешняя область, добавим условие на бесконечности

$$\begin{gathered}u=o(|x|^{-1/2}),\quad |\nabla u(x)|=o(|x|^{-1/2}),\\ |x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to\infty.\end{gathered}\tag{4}$$

Все условия задачи $\mathbf{U}$ должны выполняться в классическом смысле.

Методом энергетических тождеств [3, 4] можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если* $\Gamma^1 \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$, $\Gamma^2 \in C^{2,0}$, *то задача* $\mathbf{U}$ *имеет не более одного решения.*

Ниже будем считать, что

$$F^+(s), F^-(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma^1), \quad F(s) \in C^0(\Gamma^2), \quad \lambda \in (0,1], \tag{5}$$

$$F^+\left(a_n^1\right) = F^-\left(a_n^1\right), \quad F^+\left(b_n^1\right) = F^-\left(b_n^1\right), \quad n = 1, \ldots, N_1. \tag{6}$$

Под $\int\limits_{\Gamma^k} \ldots d\sigma$ мы понимаем $\sum_{n=1}^{N_k} \int\limits_{a_n^k}^{b_n^k} \ldots d\sigma$.

Рассмотрим угловой потенциал из [5] для уравнения (2) на Γ^1:

$$v_1[\nu](x) = \frac{i}{4} \int\limits_{\Gamma^1} \nu(\sigma) V(x,\sigma)\, d\sigma. \tag{7}$$

Ядро $V(x,\sigma)$ задано на каждой кривой Γ_n^1, $n = 1, \ldots, N_1$, по формуле

$$V(x,\sigma) = \int\limits_{a_n^1}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \mathcal{H}_0^{(1)}(k|x - y(\xi)|)\, d\xi, \quad \sigma \in \left[a_n^1, b_n^1\right],$$

где $|x - y(\xi)| = \sqrt{[x_1 - y_1(\xi)]^2 + [x_2 - y_2(\xi)]^2}$, $\mathcal{H}_0^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода [6]

$$\mathcal{H}_0^{(1)}(z) = \frac{\sqrt{2}\exp(iz - i\pi/4)}{\pi\sqrt{z}} \times \int\limits_0^{\infty} \exp(-t) t^{-1/2} \left(1 + \frac{it}{2z}\right)^{-1/2} dt.$$

Далее будем предполагать, что $\nu(\sigma)$ принадлежит $C^{0,\lambda}(\Gamma^1)$ и удовлетворяет дополнительным условиям

$$\int\limits_{a_n^1}^{b_n^1} \nu(\sigma)\, d\sigma = 0, \quad n = 1, \ldots, N_1. \tag{8}$$

Как показано в [5], для таких $\nu(\sigma)$ угловой потенциал $v_1[\nu](x)$ принадлежит классу $\mathbf{K}$. Кроме того, интегрируя $v_1[\nu](x)$ по частям и используя (8), выразим угловой потенциал через потенциал двойного слоя $v_1[\nu](x) = -\frac{i}{4} \int\limits_{\Gamma^1} \rho(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \mathcal{H}_0^{(1)}(\beta|x - y(\sigma)|)\, d\sigma$ с плотностью

$$\rho(\sigma) = \int\limits_{a_n^1}^{\sigma} \nu(\xi)\, d\xi, \quad \sigma \in \left[a_n^1, b_n^1\right], \quad n = 1, \ldots, N_1. \tag{9}$$

Следовательно, $v_1[\nu](x)$ удовлетворяет уравнению (2) вне Γ^1 и условию на бесконечности (3).

Решение задачи $\mathbf{U}$ ищем в виде

$$u[\nu,\mu](x) = v_1[\nu](x) + w[\mu](x), \tag{10}$$

где $v_1[\nu](x)$ — угловой потенциал из (7); кроме того,

$$w[\mu](x) = \frac{i}{4} \int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma) \mathcal{H}_0^{(1)}(\beta|x - y(\sigma)|)\, d\sigma.$$

Будем искать $\mu(s)$ в пространстве $C_q^{\omega}(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2)$, $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$, с нормой $\|\cdot\|_{C_q^{\omega}(\Gamma^1)} + \|\cdot\|_{C^0(\Gamma^2)}$. Будем говорить, что $\mu(s) \in C_q^{\omega}(\Gamma^1)$, если $\mu_1(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma^1)$, где

$$\mu_1(s) = \mu(s) \prod_{n=1}^{N_1} \left|s - a_n^1\right|^q \left|s - b_n^1\right|^q.$$

Норма в $C_q^{\omega}(\Gamma^1)$ вычисляется по формуле $\|\mu(\cdot)\|_{C_q^{\omega}(\Gamma^1)} = \|\mu_1(\cdot)\|_{C^{0,\omega}(\Gamma^1)}$.

Используя результаты работ [4, 5], можно проверить, что функция (10) удовлетворяет всем условиям задачи, кроме граничных условий (3).

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, подставим (10) в (3) и получим систему интегральных уравнений для плотностей $\mu(s)$, $\nu(s)$

$$\pm\frac{\rho(s)}{2} + \frac{i}{4} \int\limits_{\Gamma^1} \nu(\sigma) V(x(s),\sigma)\, d\sigma + \frac{i}{4} \int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma) \mathcal{H}_0^{(1)}(\beta|x(s) - y(\sigma)|)\, d\sigma = F^{\pm}(s), \quad s \in \Gamma^1, \tag{11}$$

$$\frac{i}{4} \int\limits_{\Gamma^1} \nu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} V(x(s),\sigma)\, d\sigma + \frac{i}{4} \int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \mathcal{H}_0^{(1)}(\beta|x(s) - y(\sigma)|)\, d\sigma - \frac{\mu(s)}{2} = F(s), \quad s \in \Gamma^2, \tag{12}$$

где $\rho(s)$ дается формулой (9). Чтобы вывести формулы для предельных значений углового потенциала, мы использовали его выражение в виде потенциала двойного слоя. Уравнение (11) получено при $x \to x(s) \in (\Gamma^1)^{\pm}$ и объединяет два интегральных уравнения. Верхний знак отвечает интегральному уравнению на $(\Gamma^1)^+$, нижний — на $(\Gamma^1)^-$. Вычитая интегральные уравнения (11) одно из другого и используя (9), находим

$$\begin{aligned} \rho(s) &= [F^+(s) - F^-(s)] \in C^{1,\lambda}(\Gamma^1), \\ \nu(s) &= [F'^+(s) - F'^-(s)] \in C^{0,\lambda}(\Gamma^1), \end{aligned} \tag{13}$$

где $F'^{\pm}(s) = \frac{d}{ds} F^{\pm}(s)$. Заметим, что $\nu(s)$ удовлетворяет всем необходимым условиям, в частности (8).

Введем функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$:

$$f_1(s) = \frac{1}{2}[F^+(s) + F^-(s)] - \\ -\frac{i}{4}\int_{\Gamma^1}[F'^+(\sigma) - F'^-(\sigma)]V(x(s),\sigma)\,d\sigma, \quad s\in\Gamma^1,$$

$$f_2(s) = F(s) - \frac{i}{4}\int_{\Gamma^1}\nu(\sigma)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}V(x(s),\sigma)\,d\sigma = \\ = F(s) + \frac{i}{4}\int_{\Gamma^1}\rho(\sigma)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_y}\mathcal{H}_0^{(1)}(\beta|x(s)-y(\sigma)|)\,d\sigma, \\ s\in\Gamma^2.$$

Как показано в [5], $f_1(s)\in C^{1,p_0}(\Gamma^1)$, где $p_0=\lambda$, если $0<\lambda<1$, и $p_0 = 1-\epsilon_0$ для любого $\epsilon_0\in(0,1)$, если $\lambda = 1$. Очевидно, что $f_2(s)\in C^0(\Gamma^2)$.

Складывая интегральные уравнения (11) и учитывая (12), получим интегральные уравнения для $\mu(s)$ на Γ^1 и Γ^2:

$$\frac{i}{4}\int_{\Gamma}\mu(\sigma)\mathcal{H}_0^{(1)}(\beta|x(s)-y(\sigma)|)\,d\sigma = f_1(s), \quad s\in\Gamma^1, \tag{14}$$

$$\mu(s) + \int_{\Gamma}\mu(\sigma)Y_2(s,\sigma)\,d\sigma = -2f_2(s), \quad s\in\Gamma^2, \tag{15}$$

где $Y_2(s,\sigma) = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}\mathcal{H}_0^{(1)}(\beta|x(s)-y(\sigma)|)\in C^0(\Gamma^2\times\times\Gamma)$, так как $\Gamma^2\in C^{2,0}$ (подробнее см. [5]).

Если $s\in\Gamma^2$, то (15) — уравнение второго рода. Если $s\in\Gamma^1$, то (14) — уравнение первого рода и его ядро имеет логарифмическую особенность при $s=\sigma\in\Gamma^1$, поскольку $\mathcal{H}_0^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi}\ln\frac{z}{\beta} + h(z)$, где, согласно [6], $h(z)\in C^{1,p_1}[0,+\infty)$ для любого $p_1\in(0,1)$. Запишем (14) в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^1}\mu(\sigma)\ln|s-\sigma|\,d\sigma + \int_{\Gamma}\mu(\sigma)Y_1(s,\sigma)\,d\sigma = f_1(s), \\ s\in\Gamma^1, \tag{16}$$

где

$$Y_1(s,\sigma) = \begin{cases}\dfrac{i}{4}h(\beta|x(s)-y(\sigma)|), & s\in\Gamma^1,\ \sigma\in\Gamma^1,\\[2mm] \dfrac{i}{4}\mathcal{H}_0^{(1)}(\beta|x(s)-y(\sigma)|), & s\in\Gamma^1,\ \sigma\in\Gamma^2.\end{cases}$$

Из [5, лемма 3] следует, что $\frac{\partial}{\partial s}Y_1(s,\sigma)\in C^{0,p_1}(\Gamma^1\times\Gamma)$ при любом $p_1\in(0,1)$.

Из приведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma^1\in C^{2,\lambda}$, $\Gamma^2\in C^{2,0}$ и выполнены условия* (5), (6). *Если уравнения* (15), (16) *имеют решение $\mu(s)$ в $C_q^\omega(\Gamma^1)\cap C^0(\Gamma^2)$, $\omega\in(0,1]$, $q\in[0,1)$, то решение задачи $\mathbf{U}$ существует и дается формулой* (10), *где $\nu(s)$ определено в* (13).

Единственность решения системы уравнений (15), (16) устанавливает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\Gamma^1\in C^{2,\lambda}$, $\lambda\in(0,1]$, $\Gamma^2\in C^{2,0}$. Если однородная система уравнений* (15), (16) *имеет решение $\mu(s)$ в $C_q^\omega(\Gamma^1)\cap C^0(\Gamma^2)$, $\omega\in(0,1]$, $q\in[0,1)$, то это решение тривиально: $\mu(s)\equiv 0$ при $s\in\Gamma$.*

Доказательство. Предположим, что $\mu^0(s)\in C_q^\omega(\Gamma^1)\cap C^0(\Gamma^2)$ — решение однородной системы (15), (16). Функция $\mu^0(s)$ обращает однородные уравнения (15), (16) в тождества. В силу теоремы 2 $u[0,\mu^0](x)\equiv w[\mu^0](x)$ — решение однородной задачи $\mathbf{U}$. В силу теоремы 1 $w[\mu^0](x)\equiv 0$, $x\in\mathcal{D}\setminus\Gamma^1$. Используя формулы для предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя на Γ^1, получим:

$$\lim_{x\to x(s)\in(\Gamma^1)^+}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}w[\mu^0](x) - \\ - \lim_{x\to x(s)\in(\Gamma^1)^-}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}w[\mu^0](x) = \mu^0(s)\equiv 0, \quad s\in\Gamma^1.$$

Следовательно,

$$w[\mu^0](x) = \frac{i}{4}\int_{\Gamma^2}\mu^0(\sigma)\mathcal{H}_0^{(1)}(\beta|x-y(\sigma)|)\,d\sigma.$$

Если $x\in\mathcal{D}$, то $w[\mu^0](x)\equiv 0$. Поскольку $\mu^0(s)\in\in C^0(\Gamma^2)$, из свойств потенциала простого слоя [4] мы получим, что:

(*) $w[\mu^0](x)\in C^0\left(\overline{R^2\setminus\mathcal{D}}\right)\cap C^2\left(R^2\setminus\overline{\mathcal{D}}\right)$;

(**) существует равномерный по всем $x\in\Gamma^2$ предел выражения $(\mathbf{n}_x, \nabla_{\hat{x}}w(\hat{x}))$, когда $\hat{x}\in R^2\setminus\overline{\mathcal{D}}$ стремится к $x\in\Gamma^2$ по нормали $\mathbf{n}_x$.

Более того, потенциал простого слоя $w[\mu^0](x)$ принадлежит $C^0(R^2)$ [4], поэтому $w|_{\Gamma^2}=0$. Заметим, что $w[\mu^0](x)$ удовлетворяет однородной задаче Дирихле в области $R^2\setminus\overline{\mathcal{D}}$

$$\Delta w(x) + \beta^2 w(x) = 0, \quad x\in R^2\setminus\overline{\mathcal{D}},\ \operatorname{Im}\beta>0,\ w|_{\Gamma^2}=0.$$

Кроме того, $w[\mu^0](x)$ удовлетворяет условиям (4) при $|x|\to\infty$, если $R^2\setminus\overline{\mathcal{D}}$ — внешняя область. Методом энергетических тождеств можно показать, что эта однородная задача Дирихле имеет только тривиальное решение, если выполняются условия гладкости (*), (**). Поэтому $w[\mu^0](x)\equiv 0$, $x\in R^2\setminus\overline{\mathcal{D}}$, так что $w[\mu^0](x)\equiv 0$ в $R^2\setminus\Gamma^2$. Используя формулу для скачка нормальной производной потенциала простого слоя на контуре интегрирования, получим

$$\lim_{\substack{\hat{x}\to x(s)\in\Gamma^2,\\ \hat{x}\in R^2\setminus\overline{\mathcal{D}}}}\left(\mathbf{n}_x, \nabla_{\hat{x}}w[\mu^0](\hat{x})\right) - \\ - \lim_{\substack{\hat{x}\to x(s)\in\Gamma^2,\\ \hat{x}\in\mathcal{D}}}\left(\mathbf{n}_x, \nabla_{\hat{x}}w[\mu^0](\hat{x})\right) = \mu^0(s)\equiv 0, \quad s\in\Gamma^2,$$

где пределы берутся вдоль $\mathbf{n}_x$. Поэтому однородная система (15), (16) имеет только тривиальное решение $\mu^0(s)\equiv 0$ при $s\in\Gamma$, что и требовалось доказать.

Система интегральных уравнений (15), (16) является частным случаем систем, изученных в [7].

Используя следствие 2 из [7] и лемму 1, убеждаемся, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $\Gamma^1 \in C^{2,\lambda}$, $\Gamma^2 \in C^{2,0}$ *и выполнены условия* (5), (6). *Тогда система* (15), (16) *имеет решение* $\mu(s) \in C^p_{1/2}(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2)$, *где* $p = \min\{1/2, \lambda\}$. *Более того, это решение системы* (15), (16) *единственно в пространстве* $C^p_{1/2}(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2)$.

Из теоремы 2 и леммы 2 вытекает окончательный результат.

Теорема 3. *Если* $\Gamma^1 \in C^{2,\lambda}$, $\Gamma^2 \in C^{2,0}$ *и выполнены условия* (5), (6), *то решение задачи* $\mathbf{U}$ *существует и дается формулой* (10), *где* $\nu(s)$ *определено в* (13), *а* $\mu(s)$ — *единственное решение системы* (15), (16) *в* $C^p_{1/2}(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2)$, $p = \min\{1/2, \lambda\}$, *гарантированное леммой* 2.

Единственность решения задачи $\mathbf{U}$ следует из теоремы 1. Можно непосредственно проверить, что решение задачи $\mathbf{U}$ удовлетворяет условию (1) с $\epsilon = -1/2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00050).

Литература

1. *Krutitskii P.A.* // Hiroshima Math. J. 1998. **28**, №1. C. 149.
2. *Krutitskii P.A.* // Int. J. Maths. Math. Sci. 1998. **21**, №2. C. 209.
3. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. IV. М.; Л., 1951.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
5. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1994. **34**, №8–9. С. 1237.
6. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М., 1984.
7. *Крутицкий П.А.* // ДАН. 2001. **376**, №1. С. 17.

Поступила в редакцию
26.01.05