ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.956.224

УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ НА СТОРОНАХ РАЗРЕЗОВ НА ПЛОСКОСТИ

П.А. Крутицкий, К.В. Прозоров

(*кафедра математики*)

E-mail: kprozorov@afrodita.phys.msu.su

Доказаны теоремы существования и единственности решения краевой задачи для неволнового уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости, когда условие Дирихле и условие с косой производной заданы на разных сторонах разрезов. Получено интегральное представление для решения.

На плоскости $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ рассмотрим совокупность простых разомкнутых кривых $\Gamma_1,\dots,\Gamma_N$, класса $C^{2,\lambda}$, $\lambda\in(0,1]$, не имеющих общих точек, в том числе и концов. Эту совокупность кривых будем называть контуром Γ. Пусть контур Γ параметризован, и в качестве параметра выступает дуговая абсцисса (длина дуги) s: $\Gamma_n=\{x\colon x=x(s)=(x_1(s),x_2(s)),\ s\in[a_n,b_n]\}$, $n=1,\dots,N$. Параметризацию выберем так, чтобы для различных n отрезки $[a_n,b_n]$ на оси $0s$ не имели общих точек, в том числе и концов. Вектор касательной к Γ в точке $x(s)$, указывающий направление возрастания параметра s, обозначим $\tau_x=\{\cos\alpha(s),\ \sin\alpha(s)\}$, а вектор нормали, совпадающий с вектором касательной при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, обозначим $\mathbf{n}_x=\{\sin\alpha(s),-\cos\alpha(s)\}$. При выбранной параметризации $x_1'(s)=\cos\alpha(s)$, $x_2'(s)=\sin\alpha(s)$. Совокупность отрезков оси $0s$, отвечающих контуру Γ, будем также обозначать Γ. Будем говорить, что функция $\mathcal{F}(s)$, определенная на Γ, принадлежит банахову пространству $C^r_\varkappa(\Gamma)$, $r\in(0,1]$, $\varkappa\in[0,1)$, если $\mathcal{F}_0(s)=\mathcal{F}(s)\prod_{n=1}^N|[(s-a_n)(s-b_n)]^\varkappa|\in C^{0,r}(\Gamma)$. Норма в пространстве $C^r_\varkappa(\Gamma)$ определяется формулой $\|\mathcal{F}(s)\|_{C^r_\varkappa(\Gamma)}=\|\mathcal{F}_0(s)\|_{C^{0,r}(\Gamma)}$. Предположим, что плоскость $\mathbb{R}^2$ разрезана вдоль контура Γ. Через Γ^+ обозначим ту сторону контура Γ, которая остается слева при возрастании параметра s, а через Γ^- — противоположную сторону. Через X обозначим множество точек плоскости, состоящее из концов Γ: $X=\bigcup_{n=1}^N(x(a_n)\cup x(b_n))$.

Будем говорить, что функция $u(x)=u(x_1,x_2)$ принадлежит классу гладкости $\mathcal{G}$, если: 1) $u(x)\in C^0(\overline{\mathbb{R}^2\setminus\Gamma})$, т.е. $u(x)$ непрерывна вне разрезов Γ, непрерывно продолжима на разрезы Γ слева и справа во всех точках, а также непрерывно продолжима на концы разрезов Γ; 2) $u_{x_1},u_{x_2}\in C^0(\overline{\mathbb{R}^2\setminus\Gamma}\setminus X)$, где X — множество концов контура Γ; 3) на концах разрезов Γ функции u_{x_1},u_{x_2} могут иметь интегрируемые особенности, т.е. при $x\to x(d)\in X$ для некоторых констант $\delta>-1$, $A>0$ справедливо неравенство

$$|u_{x_j}(x)|\leqslant A|x-x(d)|^\delta,\quad j=1,2,\tag{1}$$

где $d=a_n$ либо $d=b_n$, $n=1,\dots,N$.

Сформулируем смешанную задачу для уравнения Гельмгольца вне системы разрезов на плоскости.

Задача $\mathcal{U}$. Найти вещественную функцию $u(x)$ из класса $\mathcal{G}$, удовлетворяющую в $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$ в классическом смысле уравнению Гельмгольца

$$\triangle u-k^2u=0,\quad k=\operatorname{Re}k>0,\tag{2}$$

граничным условиям

$$u(x)|_{\Gamma+}=f^+(s),\tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_x}+\beta\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\tau}_x}\right)\Big|_{\Gamma^-}=f^-(s)\tag{4}$$

и условиям на бесконечности

$$|u(x)|=o\left(|x|^{-1/2}\right),\quad |\nabla u|=o\left(|x|^{-1/2}\right),\quad |x|=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}\to\infty.\tag{5}$$

Считаем, что $f^+(s),f^-(s)$ — заданные вещественные функции и β — заданная вещественная константа.

Аналог задачи $\mathcal{U}$ для уравнения Лапласа изучен в работе [1]. Далее под $\int_\Gamma\dots ds$ будем понимать $\sum_{n=1}^N\int_{a_n}^{b_n}\dots ds$. Используя метод энергетических тождеств, можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Если $\Gamma\in C^{2,\lambda}$, $\lambda\in(0,1]$, тогда задача $\mathcal{U}$ имеет не более одного решения.*

Будем строить решение задачи $\mathcal{U}$, предполагая, что $f^+(s)\in C^{1,\lambda}(\Gamma)$, $f^-(s)\in C^{0,\lambda}(\Gamma)$. Заметим, что коэффициент Гёльдера λ при определении гладкости контура Γ и функций $f^+(s)$, $f^-(s)$ предполагается одним и тем же. Если эти коэффициенты различны, то в качестве λ следует брать наименьший. Вместо граничного условия (3) запишем эквивалентное:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \tau_x}\right|_{\Gamma+} = f'^{+}(s), \quad f'^{+}(s) \equiv \frac{df^{+}(s)}{ds} \in C^{0,\lambda}(\Gamma), \quad (6)$$

$$u(x(a_n)) = f^{+}(a_n), \quad n = 1, \ldots, N. \quad (7)$$

Через $K_0(z)$ обозначим функцию Макдональда нулевого порядка [2], которая является сингулярным решением уравнения (2).

Решение задачи $\mathcal{U}$ будем строить с помощью теории потенциала для уравнения (2). Ищем решение задачи $\mathcal{U}$ в виде

$$u[\mu,\nu](x) = V[\mu](x) + T[\nu](x), \quad (8)$$

где $V[\mu](x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(\sigma)K_0(k|x - y(\sigma)|)\,d\sigma$ — потенциал простого слоя для уравнения (2) и $T[\nu](x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \nu(\sigma)U(x,\sigma)\,d\sigma$ — угловой потенциал для уравнения (2). Угловой потенциал для уравнения Гельмгольца изучался в работе [3]. Плотности $\mu(s)$, $\nu(s)$ будем искать в Банаховом пространстве $C^r_\varkappa(\Gamma)$, $r \in (0,1]$, $\varkappa \in [0,1)$. Ядро углового потенциала $U(x,\sigma)$ определено на каждой дуге Γ_n $(n = 1,\ldots,N)$ формулой

$$U(x,\sigma) = \int_{a_n}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} K_0(k|x - y(\xi)|)\,d\xi, \quad \sigma \in [a_n, b_n],$$

где $y = y(\xi) = (y_1(\xi), y_2(\xi))$, $|x - y(\xi)| = \sqrt{(x_1 - y_1(\xi))^2 + (x_2 - y_2(\xi))^2}$. Ниже будем полагать, что плотность углового потенциала удовлетворяет дополнительным условиям [2, 3]

$$\int\limits_{a_n}^{b_n} \nu(\sigma)\,d\sigma = 0, \quad n = 1,\ldots,N. \quad (9)$$

Интегрируя $T[\nu](x)$ по частям и используя (9), выразим угловой потенциал через потенциал двойного слоя:

$$T[\nu](x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \rho(\sigma)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} K_0(k|x - y(\sigma)|)\,d\sigma,$$

где $\rho(\sigma) = \int_{a_n}^{\sigma} \nu(\xi)\,d\xi$, $\sigma \in [a_n, b_n]$, $n = 1,\ldots,N$. Очевидно, что потенциалы $T[\nu](x)$ и $V[\mu](x)$ удовлетворяют как уравнению (2) вне Γ, так и условиям на бесконечности (5).

Аналоги потенциалов $T[\nu](x)$ и $V[\mu](x)$, содержащие в ядрах функцию Ханкеля первого рода нулевого порядка $H_0^{(1)}(z)$ вместо функции Макдональда, изучены в [3]. Так как $H_0^{(1)}(z) = -\frac{2i}{\pi}K_0(-iz)$, то теория потенциалов $T[\nu](x)$ и $V[\mu](x)$ по существу содержится в [3], поэтому ниже будем пользоваться результатами этой работы. В работе [3] показано, что если $\mu(s),\nu(s) \in C^r_\varkappa(\Gamma)$, $r \in (0,1]$, $\varkappa \in [0,1)$ и выполнены условия (9), то функция (8) принадлежит классу $\mathcal{G}$ и удовлетворяет всем условиям задачи $\mathcal{U}$ за исключением граничных условий (3), (4). В частности, неравенство (1) выполняется с $\delta = -\varkappa$, если $\varkappa \in (0,1)$.

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, мы подставляем функцию (8) в выражения (4), (6), используем предельные формулы для углового потенциала из [3] и получаем интегральные уравнения для плотностей $\mu(s)$, $\nu(s)$ на Γ:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial s}(\mu(\sigma)K_0(k|x(s) - y(\sigma)|) + \nu(\sigma)U(x(s),\sigma))\,d\sigma + \frac{\nu(s)}{2} = f'^{+}(s),$$

$$-\frac{\mu(s) + \beta\nu(s)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \times (\mu(\sigma)K_0(k|x(s) - y(\sigma)|) + \nu(\sigma)U(x(s),\sigma))\,d\sigma + \beta\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial s} \times (\mu(\sigma)K_0(k|x(s) - y(\sigma)|) + \nu(\sigma)U(x(s),\sigma))\,d\sigma = f^{-}(s). \quad (10)$$

Подставляя функцию (8) в условия (7), получим дополнительные уравнения для $\nu(s)$, $\mu(s)$:

$$V[\mu](x(a_n)) + T[\nu](x(a_n)) = f^{+}(a_n), \quad n = 1,\ldots,N. \quad (11)$$

Из приведенных выше рассуждений вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $f^{+}(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma)$, $f^{-}(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda \in (0,1]$. *Если система уравнений* (9)–(11) *имеет решение* $\nu(s)$, $\mu(s)$ *такое, что* $\nu(s),\mu(s) \in C^r_\varkappa(\Gamma)$, $r \in (0,1]$, $\varkappa \in [0,1)$, *то решение задачи* $\mathcal{U}$ *существует и дается формулой* (8).

Уравнения (10) можно записать в виде $(s \in \Gamma)$

$$\nu(s) + \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \mu(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - s} + \int\limits_\Gamma \nu(\sigma)v_1(s,\sigma)\,d\sigma + \int\limits_\Gamma \mu(\sigma)v_2(s,\sigma)\,d\sigma = 2f'^{+}(s),$$

$$-\mu(s) - \beta\nu(s) - \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma (\nu(\sigma) - \beta\mu(\sigma))\frac{d\sigma}{\sigma - s} + \int\limits_\Gamma \mu(\sigma)v_3(s,\sigma)\,d\sigma - \int\limits_\Gamma \nu(\sigma)v_4(s,\sigma)\,d\sigma = 2f^{-}(s), \quad (12)$$

где $v_1(s,\sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s}U(x(s),\sigma)$, $v_2(s,\sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s}K_0(k|x(s) - y(\sigma)|) - \frac{1}{\pi(\sigma - s)}$, $v_3(s,\sigma) = \frac{\beta}{\pi}(\frac{\partial}{\partial s}K_0(k|x(s) - y(\sigma)|) - \frac{1}{\sigma - s}) + \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}K_0(k|x(s) - y(\sigma)|)$, $v_4(s,\sigma) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}U(x(s),\sigma) - \frac{1}{\pi(\sigma - s)} - \frac{\beta}{\pi}\frac{\partial}{\partial s}U(x(s),\sigma)$. Поскольку $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, то из [3, леммы 2, 3] и [4, леммы 1, 3] следует, что $v_j(s,\sigma) \in C^{0,p_0}(\Gamma \times \Gamma)$ при $j = 1,\ldots,4$, где

$$p_0 = \begin{cases} \lambda, & \text{если } 0 < \lambda < 1, \\ 1 - \varepsilon_0, & \text{для любого } \varepsilon_0 \in (0,1], \text{ если } \lambda = 1. \end{cases} \quad (13)$$

Положим $c=\sqrt{\beta^2+1}$, $c_\pm=c\pm\beta=\sqrt{\beta^2+1}\pm\beta$. Произведем замену неизвестных функций по формулам

$$\rho_1(s)=c_-\nu(s)-\mu(s)\in C^r_\varkappa(\Gamma),\qquad \rho_2(s)=c_-\mu(s)+\nu(s)\in C^r_\varkappa(\Gamma),\tag{14}$$

$$\nu(s)=(\rho_1(s)+c_+\rho_2(s))/(2c),\qquad \mu(s)=(\rho_2(s)-c_+\rho_1(s))/(2c).\tag{15}$$

Уравнения (12) в новых переменных примут вид ($s\in\Gamma$)

$$\rho_1(s)-\frac{c_+}{\pi}\int\limits_\Gamma\rho_1(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-s}+\int\limits_\Gamma\rho_1(\sigma)Y_{11}(s,\sigma)\,d\sigma+\int\limits_\Gamma\rho_2(\sigma)Y_{12}(s,\sigma)\,d\sigma=2(cf'^+(s)+f^-(s))\equiv f_1(s)\in C^{0,\lambda}(\Gamma),$$

$$\rho_2(s)+\frac{c_-}{\pi}\int\limits_\Gamma\rho_2(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-s}+\int\limits_\Gamma\rho_1(\sigma)Y_{21}(s,\sigma)\,d\sigma+\int\limits_\Gamma\rho_2(\sigma)Y_{22}(s,\sigma)\,d\sigma=2c_-(cf'^+(s)-f^-(s))\equiv f_2(s)\in C^{0,\lambda}(\Gamma),\tag{16}$$

где $Y_{11}(s,\sigma)=\{cv_1(s,\sigma)-c_+(cv_2(s,\sigma)+v_3(s,\sigma))-v_4(s,\sigma)\}/(2c)$, $Y_{12}(s,\sigma)=\{c_+cv_1(s,\sigma)+cv_2(s,\sigma)+v_3(s,\sigma)-c_+v_4(s,\sigma)\}/(2c)$, $Y_{21}(s,\sigma)=\{c_-cv_1(s,\sigma)-cv_2(s,\sigma)+v_3(s,\sigma)+c_-v_4(s,\sigma)\}/(2c)$, $Y_{22}(s,\sigma)=\{cv_1(s,\sigma)+c_-(cv_2(s,\sigma)-v_3(s,\sigma))+v_4(s,\sigma)\}/(2c)$. Из гладкости функций $v_1(s,\sigma),\ldots,v_4(s,\sigma)$ вытекает, что $Y_{jl}(s,\sigma)\in C^{0,p_0}(\Gamma\times\Gamma)$, $j,l=1,2$; p_0 берется из (13).

В терминах $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ условия (9), (11) примут вид

$$\begin{gathered}V\left[\rho_2(s)-c_+\rho_1(s)\right](x(a_n))+T\left[\rho_1(s)+c_+\rho_2(s)\right](x(a_n))=2cf^+(a_n),\\ \int\limits_{a_n}^{b_n}(\rho_1(s)+c_+\rho_2(s))\,d\sigma=0,\quad n=1,\ldots,N.\end{gathered}\tag{17}$$

Система (16), (17) является частным случаем систем, изученных в работе [5]. По теореме 1 из [5] все решения $\rho_1(s),\rho_2(s)$ системы (16), (17), принадлежащие $C^r_\varkappa(\Gamma)$ с $r\in(0,1]$, $\varkappa\in[0,1)$, представимы в виде $\rho_j(s)=\rho_{j*}(s)/Q_j(s)$, $j=1,2$, где $\rho_{1*}(s),\rho_{2*}(s)\in C^{0,\omega}(\Gamma)$, $\omega=\min\{\lambda,\gamma,1/2-\gamma\}$, $Q_1(s)=\prod_{n=1}^N|s-a_n|^{1/2-\gamma}\times|s-b_n|^{1/2+\gamma}\operatorname{sign}(s-a_n)\in C^{0,1/2-\gamma}(\Gamma)$, $Q_2(s)=\prod_{n=1}^N|s-a_n|^{1-\gamma}|s-b_n|^{\gamma}\operatorname{sign}(s-a_n)\in C^{0,\gamma}(\Gamma)$; число γ определяется равенством $\gamma=\frac{1}{2\pi}\operatorname{arcctg}\beta\in(0,1/2)$. Отсюда следует, что $\rho_1(s),\rho_2(s)\in C^{\overline{\omega}}_q(\Gamma)$, где

$$q=\max\left\{\tfrac12+\gamma,\,1-\gamma\right\},\qquad \overline{\omega}=\begin{cases}\min\left\{\omega,\,\left|\tfrac12-2\gamma\right|\right\}, & \text{если }\gamma\neq\tfrac14,\\ \omega, & \text{если }\gamma=\tfrac14.\end{cases}\tag{18}$$

Докажем, что среди функций $\rho_1(s),\rho_2(s)\in C^{\overline{\omega}}_q(\Gamma)$ однородная система (16), (17) имеет только тривиальное решение. Пусть $\rho^0_1(s),\rho^0_2(s)$ — решение однородной системы (16), (17) в пространстве $C^{\overline{\omega}}_q(\Gamma)$, где $\overline{\omega}$ и q берутся из (18). Тогда функции $\nu^0(s)=(\rho^0_1(s)+c_+\rho^0_2(s))/(2c)$, $\mu^0(s)=(\rho^0_2(s)-c_+\rho^0_1(s))/(2c)$, построенные по формулам (15), дают решение однородной системы (9)–(11). Очевидно, что однородной задаче $\mathcal{U}$ (с $f^+(s)\equiv f^-(s)\equiv0$) соответствует однородная система (9) — (11). Согласно теореме 2 функция $u^0(x)=V[\mu^0](x)+T[\nu^0](x)$ является решением однородной задачи $\mathcal{U}$. Используя теорему 1, имеем: $u^0(x)\equiv0$. Из предельных формул для касательной и нормальной производных потенциалов [3] получаем:

$$\mu^0(s)=\left.\frac{\partial u^0}{\partial\mathbf{n}_x}\right|_{x(s)\in\Gamma^+}-\left.\frac{\partial u^0}{\partial\mathbf{n}_x}\right|_{x(s)\in\Gamma^-}\equiv0,$$

$$\nu^0(s)=\left.\frac{\partial u^0}{\partial\tau_x}\right|_{x(s)\in\Gamma^+}-\left.\frac{\partial u^0}{\partial\tau_x}\right|_{x(s)\in\Gamma^-}\equiv0,$$

откуда $\rho^0_1(s)\equiv\rho^0_2(s)\equiv0$. Тем самым однородная система (16), (17) имеет только тривиальное решение среди функций $\rho^0_1(s),\rho^0_2(s)\in C^{\overline{\omega}}_q(\Gamma)$, где $\overline{\omega}$ и q берутся из (18). Из теоремы 1 (пункт 1) и теоремы 2 из работы [5] вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\Gamma\in C^{2,\lambda}$, $f^+(s)\in C^{1,\lambda}(\Gamma)$, $f^-(s)\in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda\in(0,1]$. *Тогда неоднородная система* (16), (17) *имеет среди функций* $\rho_1(s),\rho_2(s)\in C^r_\varkappa(\Gamma)$ ($r\in(0,1]$, $\varkappa\in[0,1)$) *единственное решение. Это решение представимо в виде* $\rho_j(s)=\rho_{j*}(s)/Q_j(s)$, $j=1,2$, *где* $\rho_{1*}(s),\rho_{2*}(s)\in C^{0,\omega}(\Gamma)$, $\omega=\min\{\lambda,\gamma,1/2-\gamma\}$, *следовательно* $\rho_1(s),\rho_2(s)\in C^{\overline{\omega}}_q(\Gamma)$ ($\overline{\omega}$ *и* q *берутся из* (18)).

Решение $\mu(s),\nu(s)\in C^{\overline{\omega}}_q(\Gamma)$ системы (9)–(11) определяется по формулам (15), в которых $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ — решение системы (16), (17), гарантированное теоремой 3. Из теорем 1 и 2 следует еще одна теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\Gamma\in C^{2,\lambda}$, $f^+(s)\in C^{1,\lambda}(\Gamma)$, $f^-(s)\in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda\in(0,1]$. *Тогда решение задачи* $\mathcal{U}$ *существует, единственно и дается формулой* (8), *в которой плотности* $\mu(s)$, $\nu(s)$ *берутся из* (15), *где функции* $\rho_1(s),\rho_2(s)\in C^{\overline{\omega}}_q(\Gamma)$ ($\overline{\omega}$ *и* q *заданы выражениями* (18)) — *решение системы* (16), (17), *гарантированное теоремой* 3.

Теорема 4 устанавливает существование и единственность классического решения задачи $\mathcal{U}$. Как следует из определения класса $\mathcal{G}$, градиент решения задачи $\mathcal{U}$ может иметь особенности на концах контура Γ. По теореме 5 (пункт 3) из [3] неравенство (1) выполняется с $\delta=-q$. Выпишем явные асимптотические формулы, описывающие особенности ∇u на концах контура Γ. Пусть $x(d)$ — один из концов контура Γ, $d = a_n$ или $d = b_n$, $n = 1, \ldots, N$, т.е. $x(d) \in X$. Введем в окрестности $x(d)$ полярную систему координат $x_1 = |x - x(d)| \cos\varphi$, $x_2 = |x - x(d)| \sin\varphi$. Напомним, что $\alpha(s)$ — угол между направлением оси Ox_1 и вектором касательной τ_x в точке $x(s) \in \Gamma$. Будем считать, что $\varphi \in (\alpha(d), \alpha(d) + 2\pi)$, если $d = a_n$, и $\varphi \in (\alpha(d) - \pi, \alpha(d) + \pi)$, если $d = b_n$, $n = 1, \ldots, N$. Полагаем по непрерывности, что $\alpha(a_n) = \alpha(a_n + 0)$, $\alpha(b_n) = \alpha(b_n - 0)$. Введем функции $\hat\rho_1(a_n, s) = \rho_1(s)|s - a_n|^{1/2-\gamma}$, $\hat\rho_2(a_n, s) = \rho_2(s)|s - a_n|^{1-\gamma}$, являющиеся гёльдеровыми на Γ в окрестности a_n, и функции $\hat\rho_1(b_n, s) = \rho_1(s)|s - b_n|^{1/2+\gamma}$, $\hat\rho_2(b_n, s) = \rho_2(s)|s - b_n|^{\gamma}$, являющиеся гёльдеровыми на Γ в окрестности b_n. Повторяя рассуждения из [6], получим следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть $x \to x(d) \in X$, где $d = a_n$ или $d = b_n$, $n = 1, \ldots, N$. Тогда в окрестности точки $x(d)$ для производных решения задачи $\mathcal{U}$ справедливы формулы*:

1) *при* $d = a_n$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{x \to x(a_n)} = \frac{\hat\rho_2(a_n, a_n)}{2|x - x(a_n)|^{1-\gamma}} c_+ \cos[j\pi/2 - \theta(a_n, 1-\gamma)] - \frac{\hat\rho_1(a_n, a_n)}{2|x - x(a_n)|^{1/2-\gamma}} \cos[j\pi/2 - \theta(a_n, 1/2-\gamma)] + O(1), \quad j = 1, 2,$$

2) *при* $d = b_n$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{x \to x(b_n)} = \frac{\hat\rho_2(b_n, b_n)}{2|x - x(b_n)|^{\gamma}} c_+ \cos[j\pi/2 - \theta(b_n, \gamma)] + \frac{\hat\rho_1(b_n, b_n)}{2|x - x(b_n)|^{1/2+\gamma}} \sin[j\pi/2 - \theta(b_n, 1/2+\gamma)] + O(1), \quad j = 1, 2,$$

где $\theta(a_n, \eta) = \eta\varphi + (1-\eta)\alpha(a_n)$, $\theta(b_n, \eta) = \eta\varphi + (1-\eta)\alpha(b_n) - \pi\gamma$, *через* $O(1)$ *обозначены функции, непрерывные в окрестности точки* $x(d)$, *разрезанной вдоль контура* Γ. *Более того, функции, обозначенные как* $O(1)$, *непрерывны и в самой точке* $x(d)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00050).

Литература

1. *Крутицкий П.А., Сгибнев А.И.* // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2004. № 8. С. 28.
2. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М., 1984.
3. *Крутицкий П.А.* ЖВМ и МФ. 1994. **34**, № 8–9. С. 1237.
4. *Крутицкий П.А.* ЖВМ и МФ. 1994. **34**, № 11. С. 1652.
5. *Крутицкий П.А., Колыбасова В.В.* Докл. РАН. 2004. **394**, № 4. С. 444.
6. *Крутицкий П.А., Сгибнев А.И.* // Дифф. уравнения. 2003. **39**, № 9. С. 1165.

Поступила в редакцию
17.05.04