УДК 530.12b

ПАРКЕТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

И. Ш. Зиятдинов

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: isk@ziyatdin.phys.msu.su

Рассматривается применение паркетно-планарного приближения для описания нульмерной двухматричной модели.

1. В работе строится паркетно-планарное приближение для нульмерной двухматричной модели. Напомним основные сведения о тех моделях и методах, которые используются в работе.

Паркетно-планарное приближение строится на базе двух разных подходов, используемых в современной квантовой теории поля.

Паркетное приближение было предложено в серии работ Ландау, Халатникова и Абрикосова в качестве одного из первых непертурбативных методов описания квантовой электродинамики [1]. Это приближение определяется с помощью системы интегро-дифференциальных уравнений для пропагаторов и вершинных функций. Полная теория строится в терминах решения этой системы. Главной особенностью подхода является тот факт, что паркетная система уравнений имеет смысл как при малых значениях константы взаимодействия, так и при больших. Паркетное приближение оказалось удобным инструментом для исследования различных физических моделей [2–5].

Планарное приближение основано на следующем наблюдении. Оказывается, что в некоторых матричных полевых теориях, например в КХД с калибровочной группой $SU(N)$, можно построить теорию возмущения не по константе взаимодействия, а по степеням $1/N$. Тогда ряд теории возмущений имеет топологическую природу, причем главный вклад вносят так называемые планарные диаграммы, т. е. такие диаграммы, которые можно отобразить без самопересечений на плоскости [6].

Оба подхода имеют как достоинства, так и недостатки. Например, паркетное приближение в отличие от планарного не сохраняет калибровочную инвариантность теории. В то же время паркетное приближение работает в пространствах произвольной размерности, тогда как планарное приближение чрезвычайно трудно исследовать в размерностях, отличных от 0 и 1.

Поэтому построение паркетно-планарного приближения преследовало цель попытаться объединить достоинства и по возможности учесть недостатки обоих подходов.

2. Паркетно-планарное приближение предложено в работе [7]. Была рассмотрена так называемая нульмерная одноматричная модель с действием

$$S(M) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} M^2 + \frac{g}{4N}\operatorname{Tr} M^4,$$

где M — эрмитова матрица $N \times N$.

Эта модель является одним из простейших примеров полиномиальных моделей, которые играют важную роль в современной физике и математике.

Если определить функции Грина следующим образом:

$$\Pi_n = <\operatorname{Tr} M^n> \equiv$$
$$\equiv \lim\nolimits_{N\to\infty} \mathcal{N}\frac{1}{N^{1+n/2}}\int DM\ \operatorname{Tr} M^n\, e^{-S(M)},$$

то можно показать, что они удовлетворяют планарным уравнениям Швингера–Дайсона вида

$$\Pi_n + g\Pi_{n+2} = \sum_{i=0}^{n-2} \Pi_i \Pi_{n-i-2}, \quad n \geqslant 2. \tag{1}$$

Эти уравнения образуют бесконечную цепочку, и можно показать, что полный набор функций Грина может быть получен с помощью производящего функционала, зависящего от параметра, в качестве которого можно выбрать, допустим, Π_2. Для его определения необходимо задать дополнительное условие. Тем самым появляется возможность определенным образом управлять приближением.

Паркетно-планарное приближение определяется с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \Pi_2 = 1 - 2g\Pi_2^2 - g\Pi_2^4\Gamma_4 = 1 - g\Pi_4, \\ \Gamma_4 = -g + H + V, \\ H = -g\Pi_2^2\Gamma_4 + V\Pi_2^2\Gamma_4, \\ V = -g\Pi_2^2\Gamma_4 + H\Pi_2^2\Gamma_4, \end{cases} \tag{2}$$

где Γ_4 — четырехточечная вершинная функция, H (V) описывает ту часть четырехточечной вершинной функции, которая является двучастичноприводимой в t-канале (s-канале) и двучастичнонеприводимой в s-канале (t-канале). Первое уравнение системы представляет собой уравнение Швингера–Дайсона. Остальные уравнения называются паркетными. Таким образом, паркетно-планарное приближение представляет собой способ замкнуть бесконечную цепочку (1) и написать дополнительное уравнение, которое необходимо для полного задания теории. Планарность решения системы (2) следует из того, что мы опускаем вклад в вершинную функцию от u-канала*).

Так как рассматривается нульмерный случай, то система (2) является чисто алгебраической, и ее решение воспроизводит с высокой точностью «точные» планарные результаты классической работы [8].

	Планарное приближение	Паркетно-планарное приближение
$\Pi_2(g)$ при малых g	$1-8g+o(g)$	$1-8g+o(g)$
$\Pi_2(g)$ при больших g	$0.7698g^{-1/2}$	$0.7695g^{-1/2}$
g_{crit}	-0.083	-0.084

3. Следующим важным классом эрмитовых матричных моделей являются так называемые двухматричные модели [9, 10]. Простейшая модель из этого класса определяется действием

$$S(M_1,M_2)=\mathrm{Tr}\,M_1^2+\frac{g}{N}\,\mathrm{Tr}\,M_1^4+\mathrm{Tr}\,M_2^2+ \\ +\frac{g}{N}\,\mathrm{Tr}\,M_2^4-2c\,\mathrm{Tr}\,M_1M_2.$$

Оказывается, что эта модель эквивалентна модели Изинга на случайной решетке [11]. Более нетривиальным следствием является возможное обобщение модели на случай нескольких матриц с цепочечным взаимодействием $\sum_{i=1}^{p-1} c_i\,\mathrm{Tr}\,M_iM_{i+1}$ [12], тогда в пределе $p\to\infty$ исходная модель переходит в матричную квантовую механику [13].

Коротко напомним основные уравнения и результаты двухматричной модели.

Статистическая сумма определяется следующим образом:

$$Z=\int DM_1\,DM_2\,e^{-S(M_1,M_2)}= \\ =\mathrm{const}\int\prod_{i=1}^{N}dx_idy_i\,\Delta(x_i)\Delta(y_i)e^{-S(x_i,y_i)}, \\ \Delta(x_i)=\prod_{i<j=1}^{N}(x_i-x_j)^2.$$

Здесь M_1 и M_2 приводятся к диагональной форме: $X=\mathrm{diag}(x_i)$ и $Y=\mathrm{diag}(y_i)$.

Матричные модели подобного вида изучаются с помощью техники ортогональных полиномов [10]. В случае двухматричной модели вводится набор ортогональных или биортогональных полиномов $P_i(x)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}P_i(x)P_j(y)e^{-S(x,y)}\,dx\,dy=h_i\delta_{ij},$$

$$S(x,y)=x^2+\frac{gx^4}{N}+y^2+\frac{gy^4}{N}-2cxy.$$

Полиномы $P_i(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$xP_i(x)=P_{i+1}(x)+R_iP_{i-1}(x)+T_iP_{i-3}(x),$$

откуда, используя соотношения ортогональности, можно получить систему уравнений для коэффициентов R_i, T_i и $f_i\equiv h_i/h_{i-1}$

$$\begin{cases} f_i=\dfrac{cR_i}{1+\frac{2g}{N}(R_{i+1}+R_i+R_{i-1})}, \\ cf_i=-i/2+R_i\Big(1+\dfrac{2g}{N}(R_{i+1}+R_i+R_{i-1})\Big)+ \\ \qquad\qquad+\dfrac{2g}{N}(T_{i+2}+T_{i+1}+T_i), \\ cT_i=\dfrac{2g}{N}f_if_{i-1}f_{i-2}. \end{cases} \tag{3}$$

В пределе больших N по коэффициентам R_i, T_i и f_i определяются непрерывные функции

$$\frac{i}{N}\to x\in[0,1],\quad \frac{f_i}{N}\to f(x),\quad \frac{R_i}{N}\to R(x),\quad \frac{T_i}{N^2}\to T(x),$$

и система (3) приобретает следующую форму:

$$\begin{cases} f(x)=cR(x)(1+6gR(x))^{-1}, \\ cf(x)=-x/2+R(x)(1+6gR(x))+6gT(x), \\ cT(x)=2gf^3(x). \end{cases}$$

Тогда статистическая сумма будет определяться простым выражением

$$\ln Z=\ln\left(\mathrm{const}\prod_{i=0}^{N-1}h_i\right)\to \\ \to\mathrm{const}+\int\limits_0^1(1-x)\ln f(x)\,dx. \tag{4}$$

Вычислим двухточечную корреляционную функцию $D_1=<M_1^2>\equiv<M_2^2>=D_2$:

$$D_1=\lim_{N\to\infty}\mathcal{N}\int dM_1\,dM_2\,\mathrm{Tr}\,M_1^2e^{-S(M_1,M_2)}= \\ =f(0)+2\int\limits_0^1(1-x)f'(x)\,dx. \tag{5}$$

Тогда ее поведение при малых g будет определяться выражением

$$D_1=\frac{1}{2(1-c^2)}-\frac{g(1+c^2)}{(1-c^2)^3}+ \\ +\frac{g^2(3c^2+9)(2c^2+1)}{2(1-c^2)^5}+O(g^3). \tag{6}$$

4. Определим паркетно-планарное приближение для нульмерной матричной модели как решение следующей системы уравнений.

*) На языке диаграмм Фейнмана паркетно-планарное приближение означает следующее. Система уравнений (2) учитывает вклад паркетно-планарных диаграмм, т. е. паркетных диаграмм, которые можно отобразить на плоскости без самопересечений. В свою очередь паркетные диаграммы строятся с помощью скелетного приближения с использованием вершинных функций, включающих в себя диаграммы, двухчастичноприводимые в s- и t-каналах (вклад от u-канала исключается в силу непланарности).

Первые четыре уравнения есть уравнения Швингера–Дайсона для пропагаторов $D_1 = <\mathrm{Tr}\, M_1^2>$, $D_2 = <\mathrm{Tr}\, M_2^2>$, эффективной вершины $\Pi_2 = <\mathrm{Tr}\, M_1 M_2>$, которая описывает взаимопревращение матричных полей и четырехточечных вершин Γ_1 и Γ_2, соответствующих каждому матричному полю (смешанные вершины рассматриваться не будут):

$$\begin{cases} D_1 = 1 - 8gD_1^2 - 4gD_1^4\Gamma_1 + c\Pi_2, \\ D_2 = 1 - 8gD_2^2 - 4gD_2^4\Gamma_2 + c\Pi_2, \\ \Pi_2 = cD_1 - 8gD_2\Pi_2, \\ \Pi_2 = cD_2 - 8gD_1\Pi_2. \end{cases} \tag{7}$$

Вершины Γ_1 и Γ_2 определяются с помощью системы

$$\begin{cases} \Gamma_1 = -4g + H_1 + V_1, \\ H_1 = -4gD_1^2\Gamma_1 + V_1 D_1^2\Gamma_1, \\ V_1 = -4gD_1^2\Gamma_1 + H_1 D_1^2\Gamma_1, \\ \Gamma_2 = -4g + H_2 + V_2, \\ H_2 = -4gD_2^2\Gamma_2 + V_2 D_2^2\Gamma_2, \\ V_2 = -4gD_2^2\Gamma_2 + H_2 D_2^2\Gamma_2. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь H_1 и V_1 (H_2 и V_2) описывают двучастичноприводимые относительно матричного поля M_1 (M_2) вклады в t- и s-каналах в четырехточечные вершинные функции.

Систему уравнений (7) и (8) можно решить в пределе малых g. Асимптотическое выражение для двухточечной функции имеет вид

$$D_{1,2} = \frac{1}{2(1-c^2)} - \frac{g(1+c^2)}{(1-c^2)^3} + \\ + \frac{g^2(2c^2+1)(2c^2+9)}{2(1-c^2)^5} + O(g^3). \tag{9}$$

Из формул (6) и (9) видно, что в области малых g паркетно-планарное приближение воспроизводит результаты планарного приближения.

Из системы (7), (8) можно получить уравнение только для D_1 или D_2, g и c. Это уравнение восьмого порядка по D_1 определяет D_1 как функцию констант взаимодействия. График этой функции имеет два листа в физически интересной области $0 \leqslant c \leqslant 1$, переход с листа на лист ассоциируется с фазовым переходом в соответствующей статистической системе.

Заметим, что если приравнять c нулю, т. е. рассмотреть случай, когда имеются две независимые системы, решение переходит в уже известное решение, соответствующее одноматричной модели, предложенной в работе [7].

5. В заключение обсудим возможное развитие изложенных идей.

Во-первых, как уже было отмечено, представляет интерес применение как паркетного, так и планарного подходов для изучения матричной квантовой механики. Методика исследования отличается от стандартной. Предлагается сначала рассмотреть конечную аппроксимацию квантовой механики с помощью p-матричной модели, затем изучить предел больших p, который должен в свою очередь дать описание квантовой механики.

Во-вторых, как известно, паркетный подход обычно применяется только в пределе больших N, т. е. он описывает планарный или сферический предел. Предлагается выяснить применимость подхода для описания случая более общей топологии.

Автор благодарен И. Я. Арефьевой за ценные замечания и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00695) и программы поддержки научных школ (грант НШ-2052.2003.1).

Литература

1. *Ландау Л.Д., Абрикосов А.А., Халатников И.М.* // Докл. АН СССР. **95**. С. 497, 773, 1177.
2. *Дятлов И.Т., Судаков В.В., Тер-Мартиросян К.А.* // ЖЭТФ. 1957. **4**. С. 767.
3. *Abrikosov A.A., Galanin A.D., Gorkov L.P.* et al. // Phys. Rev. 1958. **111**. P. 321.
4. *Ter-Martirosyan K.A.* // Phys. Rev. 1958. **111**. P. 948.
5. *Замолодчиков А.Б., Макеенко Ю.М., Тер-Мартиросян К.А.* // ЖЭТФ. 1976. **71**. С. 24.
6. *'t Hooft G.* // Nucl. Phys. B. 1974. **72**. P. 461.
7. *Aref'eva I.Ya., Zubarev A.P.* // Phys. Lett. B. 1996. **386**. P. 258.
8. *Brézin E., Itzykson C., Parisi G., Zuber J.B.* // Commun. Math. Phys. 1978. **59**. P. 35.
9. *Itzykson C., Zuber J.B.* // J. Math. Phys. 1980. **21**. P. 411.
10. *Mehta M.L.* // Comm. Math. Phys. 1981. **79**. P. 327.
11. *Kazakov V.A.* // Phys. Lett. A. 1986. **119**. P. 140.
12. *Chadha S., Mahoux G., Mehta M.L.* // J. Phys. A. 1981. **14**. P. 579.
13. *Зарембо К.Л., Макеенко Ю.М.* // УФН. 1998. **168**. С. 3–27.

Поступила в редакцию
22.09.04