

УДК 621.372.2

## ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ СХЕМ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

А. Л. Делицын, И. В. Степанов

(кафедра математики)

E-mail: delitsin@math356.phys.msu.ru; veryhot@hotmail.ru

**Разработан метод вычисления мод градиентных диэлектрических волноводов. Результаты проведенного тестирования для полого и двухслойного волноводов свидетельствуют о высокой точности метода. Предложенный метод позволяет решить проблему аппроксимации поля в нуле в цилиндрической системе координат.**

Известно, что при применении метода конечных элементов к задаче расчета диэлектрического волновода в цилиндрической системе координат возникают две проблемы: аппроксимация поля в начале координат и аппроксимация нулевого собственного значения бесконечной кратности [1]. Одним из способов, позволяющих решить первую из них, может служить введение фиктивной дополнительной границы в окрестности начала цилиндрической системы координат, соответствующей идеально проводящему стержню малого радиуса. При стремлении этого радиуса к нулю собственные значения полученной задачи будут стремиться к собственным значениям исходной задачи. В случае задачи о собственных частотах мембраны это доказано в работе А. А. Самарского [2], что и положено в основу применяемого в работе метода.

Рассмотрим цилиндрический волновод с круговым поперечным сечением  $\Omega$  единичного радиуса. В некоторую точку на его оси поместим цилиндрическую систему координат, ось  $Oz$  которой направим по оси цилиндра. Пусть волновод заполнен веществом с характеристикой:

$$\varepsilon(r, \varphi, z) = \varepsilon(r), \quad \mu(r, \varphi, z) = 1,$$

$\varepsilon$  кусочно-непрерывна в  $\Omega$ , стенки идеально проводящие.

Будем искать решения уравнений Максвелла в виде нормальных волн  $E, H \sim e^{-i\omega t + i\gamma z + im\varphi}$ . После сокращения на экспоненциальный множитель приходим к задаче на отрезке  $[0, 1]$ , роль собственного значения играет параметр  $\gamma$ . Следуя [3], выберем из системы восьми уравнений Максвелла шесть основных для шести неизвестных следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} H_z - i\gamma H_\varphi + ik\varepsilon E_r = 0, \\ i\gamma H_r - \frac{d}{dr} H_z + ik\varepsilon E_\varphi = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varepsilon E_r) + \frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (\varepsilon E_\varphi) + i\gamma \varepsilon E_z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} E_z - i\gamma E_\varphi - ikH_r = 0, \\ i\gamma E_r - \frac{d}{dr} E_z - ikH_\varphi = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rH_r) + \frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} H_\varphi + i\gamma H_z = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Введем обозначения  $X = (H_r, H_\varphi, E_z)^T = (H_\perp, E_z)^T$ ,  $Y = (\varepsilon E_r, \varepsilon E_\varphi, H_z)^T = (\varepsilon E_\perp, H_z)^T$ . Подставляя  $Y$  из (2) в (1), приходим к уравнению на собственные значения:

$$\begin{pmatrix} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r + k^2 \varepsilon r & imr \frac{d}{dr} \frac{1}{r} & -k\varepsilon m \\ im \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r & -\frac{m^2}{r} + k^2 \varepsilon r & -ik\varepsilon r \frac{d}{dr} \\ km\varepsilon & ik \frac{d}{dr} r \varepsilon & \frac{d}{dr} r \varepsilon \frac{d}{dr} - \frac{\varepsilon}{r} m^2 \end{pmatrix} X = \gamma^2 r \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \varepsilon \end{pmatrix} X, \quad (3)$$

где  $X$  принадлежит множеству векторов из  $C^\infty[0, 1]$ . Уравнение (3) дополним граничными условиями

$$H_r(1) = 0 \text{ и } E_z(1) = 0, \quad |X(0)| < \infty \quad (4)$$

и неиспользованным выше уравнением Максвелла

$$-ik\varepsilon E_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rH_\varphi) - \frac{1}{r} inH_r. \quad (5)$$

Введем операторы

$$\text{grad } \varphi(r) = \left( \frac{d}{dr} \varphi, \frac{im}{r} \varphi \right)^T,$$

$$\text{rot } \varphi(r) = \left( \frac{im}{r} \varphi, -\frac{d}{dr} \varphi \right)^T,$$

$$\text{div } H_\perp = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r H_r + \frac{im}{r} H_\varphi.$$

Распределение собственных значений в комплексной плоскости и их асимптотики получены в [3].

Выпишем вариационный функционал для нашей задачи. Для этого умножим (3) слева на произволь-

ный вектор  $\overline{Y}^T$  и проинтегрируем по  $r$  в пределах от 0 до 1. Тогда получим

$$\int_0^1 r dr \operatorname{div} H_{\perp} \overline{\operatorname{div} H_{\perp}} + \int_0^1 \varepsilon r dr (\operatorname{grad} E_z, \overline{\operatorname{grad} E_z}) - \int_0^1 dr \left\{ k^2 \varepsilon r (\overline{H_r} H_r + \overline{H_{\varphi}} H_{\varphi}) - k \varepsilon m \overline{H_r} E_z + k m \varepsilon \overline{E_z} H_r - i k \varepsilon r \overline{H_{\varphi}} \frac{d}{dr} E_z - i k \varepsilon r H_{\varphi} \frac{d}{dr} \overline{E_z} \right\} = -\gamma^2 \int_0^1 r dr (H_r \overline{H_r} + H_{\varphi} \overline{H_{\varphi}} + \varepsilon E_z \overline{E_z}). \quad (6)$$

Поскольку задача (3)–(4) имеет особенность в нуле, ее численная реализация методом конечных элементов представляет определенные трудности. Заменяем ее на задачу, в которой в окрестности нуля расположим проводящий цилиндр малого радиуса  $a$ , что соответствует с математической точки зрения рассмотрению задачи

$$\int_a^1 r dr \operatorname{div} H_{\perp} \overline{\operatorname{div} H_{\perp}} + \int_a^1 \varepsilon r dr (\operatorname{grad} E_z, \overline{\operatorname{grad} E_z}) - \int_a^1 dr \left\{ k^2 \varepsilon r (\overline{H_r} H_r + \overline{H_{\varphi}} H_{\varphi}) - k \varepsilon m \overline{H_r} E_z + k m \varepsilon \overline{E_z} H_r - i k \varepsilon r \overline{H_{\varphi}} \frac{d}{dr} E_z - i k \varepsilon r H_{\varphi} \frac{d}{dr} \overline{E_z} \right\} = -\gamma^2 \int_a^1 r dr (H_r \overline{H_r} + H_{\varphi} \overline{H_{\varphi}} + \varepsilon E_z \overline{E_z}) \quad (7)$$

на отрезке  $[a, 1]$  и постановке граничных условий вида

$$H_r(1) = 0 \text{ и } E_z(1) = 0, \quad |X(a)| < \infty, \quad (8)$$

$X$  принадлежит множеству векторов из  $C^{\infty}[a, 1]$ , удовлетворяющих граничным условиям, и неиспользованному выше уравнению Максвелла

$$-i k \varepsilon E_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r H_{\varphi}) - \frac{1}{r} i m H_r. \quad (9)$$

Для упрощения вычислений производятся замены  $r H_r \equiv \overline{H_r}$ ,  $i H_{\varphi} \equiv \overline{H_{\varphi}}$ .

Решение будем искать методом смешанных конечных элементов [4]. Введем на отрезке  $r \in [a, 1]$  сетку  $\{x_j\}$ :  $j = 0, \dots, N$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_N = 1$ ,  $N$  — количество конечных элементов.

Разложим поля по базисным функциям с конечными носителями:

$$X_i = \sum_{n=0}^{N_i} c_{in} \varphi_{in}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$N_i$  — количество базисных функций, зависящее от количества конечных элементов и их порядка,

$c_{in}$  — неизвестные коэффициенты. При этом для  $H_{\varphi}$  берутся разрывные элементы первого порядка

$$\varphi_{2n} = \begin{cases} 0, & x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & x \geq x_{j+1}. \end{cases}$$

$$\varphi_{2(n+1)} = \begin{cases} 0, & x \leq x_j, \\ \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & x \geq x_{j+1}. \end{cases}$$

Для  $H_r$  и  $E_z$  берутся непрерывные элементы второго порядка

$$\varphi_{3,4n} = \begin{cases} 0, & x \leq x_j, \\ -\frac{4(x - x_j)(x - x_{j+1})}{(x_{j+1} - x_j)^2}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & x \geq x_{j+1}, \end{cases}$$

$$\varphi_{3,4(n+1)} = \begin{cases} 0, & x \leq x_j, \\ \frac{2(x - x_j)(x - 0.5(x_j + x_{j+1}))}{(x_{j+1} - x_j)^2}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ \frac{2(x - x_{j+1})(x - 0.5(x_j + x_{j+1}))}{(x_{j+1} - x_j)^2}, & x_{j+1} \leq x \leq x_{j+2}, \\ 0, & x \geq x_{j+2}. \end{cases}$$

При этом в точках  $x_0$  и  $x_N$  базисные функции должны удовлетворять граничным условиям исходной задачи.

Подставляя полученные разложения в вариационный функционал и производя интегрирование, получим задачу на собственные значения:  $A(k, m) = -\gamma^2 B$ , где  $A(k, m) = a(k, m)_l^l$ ,  $B = b_l^l$ ,  $l = 0, \dots, N_1 + N_2 + N_3$ , — квадратные разреженные матрицы.

Программа составлена для расчета цилиндрических волноводов с произвольным кусочно-непрерывным заполнением диэлектриком. Тестирование проводилось для случаев полого волновода и двухслойного волновода, допускающих точное решение.

Таблица 1

Номер моды	Номер $\gamma$	$\gamma$	
		ТМ-волна	ТЕ-волна
0	1	2.4048256 (2.4048261)	3.8317064 (3.8317061)
	2	5.5200791 (5.5200780)	7.0155942 (7.0155858)
	3	8.6537380 (8.6537277)	10.173511 (10.1734682)
1	1	3.8317062 (3.8317061)	1.8409158 (1.8411838)
	2	7.0155895 (7.0155858)	5.3298359 (5.3314429)
	3	10.173489 (10.1734682)	8.5322647 (8.5363167)
2	1	5.1356226 (5.1356231)	3.0542370 (3.05423697)
	2	8.4172498 (8.41724411)	6.7061354 (6.70613322)
	3	11.619875 (11.6198408)	9.9694866 (9.96946724)

Таблица 2

Точные собственные значения	Радиус внутреннего проводящего стержня $a$					
	$a = 10^{-2}$	$a = 10^{-3}$	$a = 10^{-4}$	$a = 10^{-5}$	$a = 10^{-6}$	$a = 10^{-7}$
2.4048261	2.4052714	2.4048302	2.4048258	2.4048257	2.4048257	2.4048257
5.5200780	5.5224651	5.5201168	5.5200932	5.5200930	5.5200930	5.5200930
3.8317061	3.8328913	3.8317252	3.8317135	3.8317134	3.8317134	3.8317134
7.0155858	7.0195663	7.0157455	7.0157080	7.0157080	7.0157079	7.0157081

В случае полого волновода система волн представляет собой суперпозицию полей магнитного и электрического типа. Решение можно выписать через вектор Герца  $\Pi = C J_m(\lambda r) \cos m\varphi$  или  $\Pi = C J_m(\lambda r) \sin m\varphi$ .

Тогда уравнение на собственные значения для электрических волн имеет вид  $\Pi^e = 0$  при  $r = 1$ , т.е.  $J_m(\lambda) = 0$ ,  $\lambda_{mn}$  —  $n$ -й положительный корень. Для магнитных:  $\frac{d\Pi^m}{dr} = 0$  при  $r = 1$ , т.е.  $J'_m(\lambda) = 0$ ,  $\lambda_{mn}$  —  $n$ -й положительный корень.

В табл. 1 приведены вычисленные собственные значения и точные собственные значения (указаны в скобках) при 40 конечных элементах и радиусе внутреннего стержня  $a = 10^{-6}$ .

В табл. 2 приведена зависимость собственных значений нулевой моды от внутреннего радиуса  $a$  при 20 конечных элементах.

Полученные результаты позволяют утверждать,

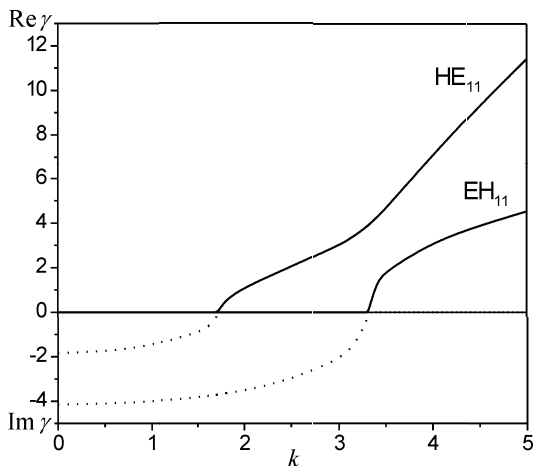


Рис. 1

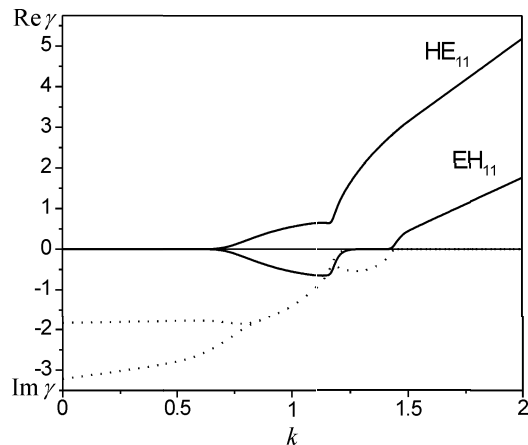


Рис. 2

что применение конечных элементов высокого порядка позволяет аппроксимировать поле в нуле и приводит к высокой точности на достаточно грубой сетке.

Рассмотрим теперь случай двухслойного волновода с осесимметричным заполнением радиуса  $b$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Моды круглых слоистых волноводов обладают рядом особенностей, отсутствующих у волн однородно заполненных волноводов и волн с осевой симметрией. В частности, им присуще, например, явление аномальной дисперсии  $(d\gamma/dk) < 0$ . При определенных параметрах волновода эти волны даже при отсутствии диссипации энергии преобразуются в волны с комплексными постоянными распространения — комплексные волны.

Решение будем искать методом смешанных конечных элементов описанным выше образом. Для расчета берется 20 конечных элементов и радиус внутреннего стержня  $a = 10^{-6}$ .

Ниже приведены дисперсионные характеристики низших типов гибридных волн  $HE_{11}$  и  $EH_{11}$  волновода при  $\epsilon = 10$ ,  $b = 0.2$  (рис. 1),  $b = 0.6$  (рис. 2). Непрерывными линиями изображены зависимости  $\text{Re } \gamma$  от  $k$ , точками — зависимости  $\text{Im } \gamma$  от  $k$ . Результаты расчетов с графической точностью совпадают с точными значениями, приведенными в [5].

Как видно из рис. 1, в данном случае постоянные распространения волн низших типов могут быть либо чисто мнимыми, либо чисто действительными величинами, причем обе волны являются нормальными во всем частотном диапазоне.

Как видно из рис. 2, в данном случае присутствуют как нормальные, так и аномальные волны. При этом возникают комплексные значения  $\gamma$ , имеющие как вещественную, так и комплексную части.

#### Литература

1. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 1. С. 9 (Moscow University Phys. Bull. 1996. N 1. P. 7).
2. Самарский А.А. // Докл. АН СССР. 1948. № 1. С. 631.
3. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. // ЖВМ и МФ. 2001. 41, № 1. С. 126.
4. Sturlit P.J., Lions J.L. Handbook on numerical analysis. V. 2. Finite element method. North Holland, Amsterdam, 1991.
5. Веселовский Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М., 1988.

Поступила в редакцию  
11.10.04