

РАДИОФИЗИКА

УДК 537.52

ДВУМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛАЗМЫ И СЛОЯ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СТОЛБА ГАЗОВОГО РАЗРЯДА

С. А. Двинин, А. А. Кузовников

(кафедра физической электроники)

E-mail: dvinin@ph-elec.phys.msu.su

Получено уравнение плазмы и слоя пространственного заряда, обобщающее уравнение Ленгмюра–Тонкса на двумерно неоднородную плазму. Данное уравнение может быть основой для расчета пространственных характеристик плазмы положительного столба в режиме свободного пробега ионов при произвольной форме границы положительного столба разряда. Приведенные результаты интересны для расчета процессов в ионных источниках и плазменных химических реакторах низкого давления.

Положительный столб газового разряда в режиме свободного пробега ионов впервые рассмотрен Ленгмюром и Тонксом в 1929 г. ([1]; см. также обзор [2]). Решение полученного ими уравнения плазмы и слоя позволяет рассчитать пространственные распределения электростатического потенциала и плотности заряженных частиц, а также время жизни последних, если плазма одномерно неоднородна. В то же время рабочие камеры плазменных реакторов или ионных источников обычно имеют цилиндрическую (или более сложную) форму, причем радиус и высота камеры близки по величине, поэтому условие одномерной неоднородности не выполняется.

В настоящей работе мы получим одну из простейших форм уравнения плазмы и слоя, описывающую двумерно неоднородный плазменный столб в режиме свободного пробега ионов. Поскольку мы не рассматриваем механизмы передачи энергии электронам, полученные результаты могут быть применены как к разряду постоянного тока, так и к ВЧ- и СВЧ-разрядам низкого давления.

1. Исходные предположения и общий вид уравнения плазмы и слоя

Рассмотрим положительный столб газового разряда, находящийся в области пространства, ограниченной поверхностью Q . Исходные предположения модели положительного столба такие же, как и в одномерной модели.

1. Положительный столб состоит из нейтральных частиц, электронов и ионов одного сорта.

2. Распределение электронов по энергиям соответствует распределению Максвелла с температурой T_e , не зависящей от координат. Электроны находятся в равновесии с электростатическим полем.

3. Механизм ионизации – прямая ионизация нейтральных частиц электронным ударом из основного состояния, рекомбинации – рекомбинация на стенке, которая расположена на заданной поверхно-

сти Q . В силу предположения 2 частота ионизации, которую мы будем обозначать ν_i , не зависит от координат.

4. Ионы при ионизации рождаются с нулевой энергией и достигают стенок в режиме свободного пробега.

5. Мы предположим также, что существует точка, где электростатический потенциал максимален, а распределение потенциала вдоль траектории каждого отдельного иона монотонно. Выполнение последнего условия должно быть проверено после проведения решения.

Повторяя вычисления Ленгмюра и Тонкса, будем исходить из уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi e(n - n_e). \quad (1)$$

Здесь и далее φ – амбиполярный потенциал, n_e, n – плотности электронов и ионов, $e > 0$ – элементарный электрический заряд. Так как электроны находятся в равновесии с электрическим полем,

$$n_e = n_0 \exp(e\varphi/kT_e), \quad (2)$$

где n_0 – плотность электронов в центре положительного столба, k – постоянная Больцмана.

Для замыкания системы уравнений (1)–(2) необходимо рассчитать плотность ионов в точке r . Для решения этой задачи будем исходить из балансовых соотношений, аналогичных используемым в [1–3] при решении одномерных задач. Пусть $\mathbf{r}_S(t)$ – координаты точки рождения иона, который в момент времени t после рождения попадает в точку наблюдения r_0^*). Множество всех точек $\mathbf{r}_S(t)$ представляет собой параметрически заданную кривую. В симметричной системе кривая $\mathbf{r}_S(t)$ начинается в начале координат (где потенциал максимален, $t = \infty$) и заканчивается в точке наблюдения ($t = 0$).

*) В дальнейшем все величины, относящиеся к точке рождения иона, будем отмечать индексом S , а к точке наблюдения – индексом 0.

Траектория иона $\mathbf{l}(t, t_1)$, рожденного в точке $\mathbf{r}_S(t)$ в момент времени $t_1 = t$, проходит через точку \mathbf{r}_0 . Таким образом, кривая $\mathbf{r}_S(t)$ и траектория иона имеют две общие точки (рис. 1). В окрестности кривых $\mathbf{r}_S(t)$ и $\mathbf{l}(t, t_1)$ введем систему координат (u, v, w) с базисными векторами $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)^*$, такую, чтобы выполнялись условия $(\boldsymbol{\tau} \mathbf{e}_u) \neq 0$ и $(\boldsymbol{\eta} \mathbf{e}_u) \neq 0$, где $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}_S/dt$, $\boldsymbol{\eta} = \partial \mathbf{l} / \partial t_1$ — касательные векторы к кривым $\mathbf{r}_S(t)$ и $\mathbf{l}(t, t_1)$. В этом случае координату u можно будет использовать для параметрического задания обеих кривых, которые мы будем обозначать $\mathbf{r}_S(u)$ и $\mathbf{l}(u_S, u)^{**}$.

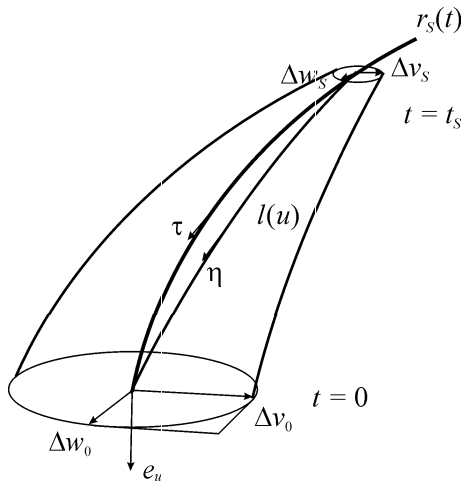


Рис. 1. Взаимное расположение траекторий ионов l и множества начальных точек траекторий r_S , попадающих в точку наблюдения r_0

Рассмотрим поток ионов, рожденных в окрестности $(\Delta u_S, \Delta v_S, \Delta w_S)$ точки $\mathbf{r}_S(u)$, протекающий через окрестность точки наблюдения $(\Delta v_0, \Delta w_0)^{***})$ в единицу времени. Число ионов в потоке $\Delta N = \Delta n(\mathbf{V}(u_S, u_S)[\mathbf{e}_{u0} \times \mathbf{e}_{v0}])\Delta v_0 \Delta w_0$, где Δn — плотность этих ионов в окрестности точки наблюдения. С другой стороны, $\Delta N = \nu_i n_e(u_S)(\mathbf{e}_{uS}[\mathbf{e}_{vS} \times \mathbf{e}_{wS}])\Delta u_S \Delta v_S \Delta w_S$. Приравнявая оба выражения для ΔN , получим:

$$\Delta n(u_S) = \frac{n_e(u_S)\nu_i(\mathbf{e}_{uS}[\mathbf{e}_{vS} \times \mathbf{e}_{wS}])\Delta u_S \Delta v_S \Delta w_S}{(\mathbf{V}(u_S, u_S)[\mathbf{e}_{u0} \times \mathbf{e}_{v0}])\Delta v_0 \Delta w_0}.$$

Устремляя $\Delta u_S, \Delta v_S, \Delta w_S$ к нулю, учитывая функциональную связь $(\Delta v_0, \Delta w_0)$ и $(\Delta v_S, \Delta w_S)$ и интегрируя по du_S , получим:

$$n(u_0) = \int_{r_S} du_S \frac{n_e(u_S)\nu_i(\mathbf{e}_{uS}[\mathbf{e}_{vS} \times \mathbf{e}_{wS}])}{(\mathbf{V}(u_S, u_0)[\mathbf{e}_{u0} \times \mathbf{e}_{v0}])} \times \left(\frac{\partial(v_0, w_0)}{\partial(v_S, w_S)} \right)^{-1}. \quad (3)$$

*) Если система координат задана зависимостью $\mathbf{r}(u, v, w)$, то $\mathbf{e}_u = \partial \mathbf{r} / \partial u$, $\mathbf{e}_v = \partial \mathbf{r} / \partial v$, $\mathbf{e}_w = \partial \mathbf{r} / \partial w$.

**) В качестве координаты u , в частности, можно использовать любую из переменных t или t_1 .

***) $u_0, v_0 + \Delta v_0$ и $w_0 + \Delta w_0$ представляют собой координаты точки в окрестности точки наблюдения u_0 , через которые проходит траектория ионов, рожденных в точке $(u_S, v_S + \Delta v_S, w_S + \Delta w_S)$, т.е. являются функциями $(u_S, \Delta v_S, \Delta w_S)$.

Скорость в точке наблюдения u_0 иона, рожденного в точке u_S , — $\mathbf{V}(u_S, u_0)$, и функциональная связь координат $(\partial(v_0, w_0) / \partial(v_S, w_S))$, а также кривая интегрирования $\mathbf{r}_S(u_S)$ должны быть найдены из уравнений движения ионов в потенциале φ . Подставляя (2) и (3) в уравнение Пуассона (1), а также опуская индекс 0 у величин, относящихся к точке наблюдения, получим многомерное уравнение плазмы и слоя:

$$\Delta \varphi = 4\pi n_0 e \left(\exp \left(\frac{e\varphi(\mathbf{r})}{kT_e} \right) - \nu_i \int_{r_S} du_S \frac{(\mathbf{e}_{uS}[\mathbf{e}_{vS} \times \mathbf{e}_{wS}])}{(\mathbf{V}(u_S, u_0)[\mathbf{e}_{u0} \times \mathbf{e}_{v0}])} \left(\frac{\partial(v_0, w_0)}{\partial(v_S, w_S)} \right)^{-1} \times \exp \left(\frac{e\varphi(\mathbf{r}_S)}{kT_e} \right) \right).$$

Введем безразмерный потенциал $\eta = e\varphi / kT_e$, и обозначения $r_{De} = \sqrt{kT_e} / 4\pi e^2 n_0$, $V_S = \sqrt{kT_e} / M$, M — масса ионов, при этом искомое уравнение упрощается:

$$r_{De}^2 \Delta \eta = \exp(\eta(\mathbf{r})) - \nu_i \int_{r_S} du_S \frac{(\mathbf{e}_{uS}[\mathbf{e}_{vS} \times \mathbf{e}_{wS}])}{(\mathbf{V}(u_S, u_0)[\mathbf{e}_{u0} \times \mathbf{e}_{v0}])} \left(\frac{\partial(v_0, w_0)}{\partial(v_S, w_S)} \right)^{-1} \times \exp(\eta(u_S)). \quad (4)$$

Результат Ленгмюра и Тонкса может быть легко получен из (4) при учете функциональной связи $\Delta y = (x/x_S)^\mu \Delta y_S$, прямолинейности кривых $\mathbf{r}_S(t)$ и $\mathbf{l}(t, t_1)$ и введении прямоугольной системы координат в их окрестности (рис. 2, а, б). Здесь $\mu = 0$ для плоской геометрии, $\mu = 1$ для цилиндрической и $\mu = 2$ для сферической. При этом из (4) следует, что

$$r_{De}^2 \Delta \eta = \exp(\eta(\mathbf{r})) - \frac{\nu_i}{\sqrt{2}V_S} \int_0^L \frac{x_S^\mu}{x^\mu} \frac{du_S}{\sqrt{\eta(u_S) - \eta(u)}} \exp(\eta(u_S)). \quad (5)$$

В отличие от одномерной задачи, где получаемое уравнение является математически точным (в рамках сделанных приближений (1)–(5)) при записи двумерного уравнения на определенном этапе приходится использовать теорию возмущений. По существу необходимо указать явный вид кривой $\mathbf{r}_S(u)$ и траекторий ионов. Положение точки на траектории будет функционалом от потенциала, т.е. будет зависеть от всех производных потенциала в окрестности кривой. В простейшей модели при построении приближенного решения будем учитывать производные низшего порядка, используя в качестве малого параметра отношение длины траектории к ее радиусу кривизны. Направление движения иона зависит от отношения E_y/E_x . Кривизна появляется тогда, когда это отношение начинает зависеть от координаты. Следует отметить, что кривизна как

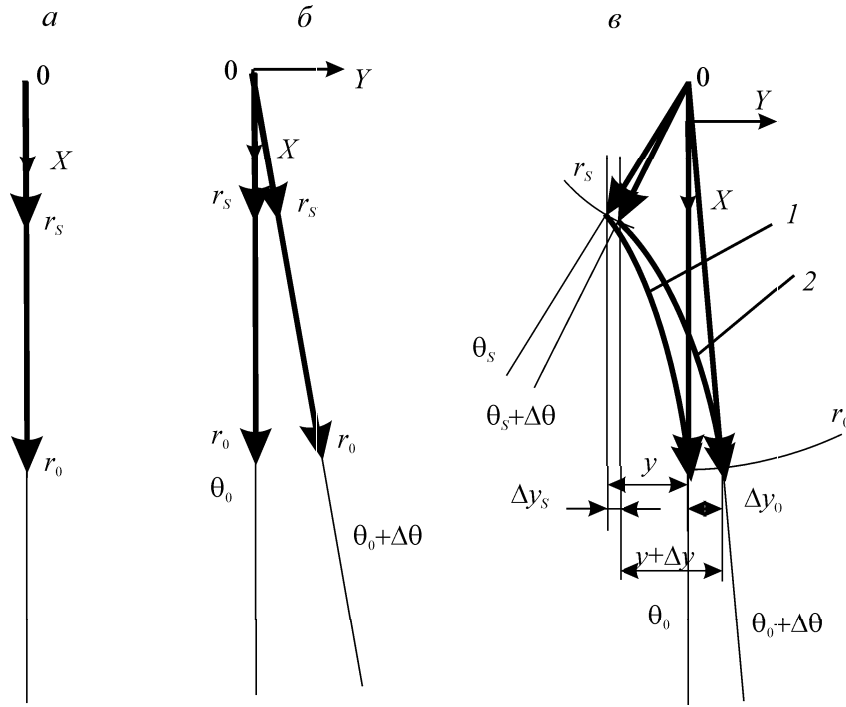


Рис. 2. Взаимное положение соседних траекторий ионов: (а) — плоская геометрия, (б) — цилиндрическая геометрия, (в) — произвольная геометрия

таковая влияет только на форму траектории ионов. Ионизационный баланс, а следовательно, и распределение потенциала вдоль траектории зависит от скорости разбегания соседних траекторий, определяемой пространственным распределением потенциала. Таким образом, параметром малости будет величина $\mu = \left(L \frac{d}{dt} \ln \frac{E_y}{E_x}\right)^{-1}$, где L — длина траектории. Само выражение для малого параметра свидетельствует о сложном виде приближений даже низших порядков. Поскольку возможны различные варианты построения теории возмущений, могут существовать и разные формы уравнения плазмы и слоя.

Граничные условия на поверхности Q для уравнения (5) могут быть сформулированы следующим образом*). Для положительного столба (ПС), ограниченного диэлектриком, граничное условие имеет смысл локального равенства электронного и ионного токов [1–4] в каждой точке q граничной поверхности. Для расчета электронного тока на стенку можно использовать уравнение стандартной теории тока для зонда [8] (A — константа порядка единицы, зависящая, например, от вида функции распределения электронов по энергиям, m — масса электрона):

$$G(q) = \left\{ A |(\mathbf{e}_{uq} [\mathbf{e}_{vq} \times \mathbf{e}_{wq}])| \sqrt{\frac{kT_e}{m}} \exp(\eta(\mathbf{r})) - \nu_i \int_{\mathbf{r}_S} (\mathbf{e}_{us} [\mathbf{e}_{vs} \times \mathbf{e}_{ws}]) \exp(\eta(u_s)) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial(v_q, w_q)}{\partial(v_s, w_s)} \right)^{-1} du_s \right\} \Big|_{\mathbf{r}=q} = 0. \quad (6)$$

В случае проводящей границы условие равенства токов должно быть поставлено для поверхности в целом:

$$\oint_Q G(q) dq = 0. \quad (7)$$

Наконец, в квазинейтральном приближении ($r_{De} \ll \ll L$), не рассматривающем процессы в слое пространственного заряда, когда в (7) полагают $r_{De} = 0$, граничное условие имеет смысл нарушения взаимно однозначной связи преобразования координат [5]:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\eta, v, w)} = 0. \quad (8)$$

2. Приближенный вариант уравнения плазмы и слоя

В этом разделе получим один из простейших вариантов уравнения плазмы и слоя, ограничившись двумерной задачей.

Упростим уравнение (4), введя цилиндрическую систему координат (рис. 2, в). Здесь u — параметрически заданная координата на кривой $\mathbf{r}_S(u)$, r_0, θ_0 — координаты точки наблюдения, $r_S(u, r_0, \theta_0)$, $\theta_S(u, r_0, \theta_0)$ — координаты точки на кривой $\mathbf{r}_S(u)$, в которой рождается ион, $V(u, r_0, \theta_0)$ — скорость иона, рожденного в этой точке, при достижении им точки наблюдения, θ_V — угол, определяющий направление скорости. При расчете траектории иона будем использовать также прямоугольную декартову

*) Точки, относящиеся к граничной поверхности, будут отмечаться индексом q .

систему координат xy , ось x которой направлена вдоль радиуса (рис. 2, в).

В простейшей модели, которая будет описана ниже, движение иона вдоль оси x будет описываться таким образом, как будто движения вдоль оси y нет. Кроме того, мы ограничимся первым порядком по теории возмущений. Тогда $\eta(r_S, \theta_S) = \eta(r_S, \theta_0) - \frac{\partial \eta}{r_S \partial \theta} \Delta y + \dots$, где $(-\Delta y)$ — y -координата точки (r_S, θ_S) в системе координат xy (рис. 1),

$$n_e(r_S, \theta_S) = n_e(r_S, \theta_0) \left(1 - \frac{\partial \eta}{r_S \partial \theta} \Delta y + \dots \right),$$

$$V_r = V(u, u_0) \cos(\theta_V(u_0, r_0, \theta_0) - \theta_0) =$$

$$= V_S \sqrt{2(\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r_0, \theta_0))}. \quad (9)$$

Для расчета Δy воспользуемся уравнением Ньютона для ионов. Считая, что

$$\ddot{y} = -V_S^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} y + \frac{\partial^3 \eta}{2 \partial y^3} y^2 + \dots \right), \quad (10)$$

где все производные вычисляются на луче $\theta = \theta_0 = \text{const}$ и являются функциями от r и θ_0 , получим:

$$\dot{y}(r_S, \theta_S, r) = -V_S^2 \int_0^t dt' \frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= -V_S \int_{r_S}^r \frac{dr'}{\sqrt{2(\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r', \theta_0))}} \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$y(r_S, \theta_S, r) = \int_0^t \dot{y} dt' - y_S = \int_r^{r_0} \frac{dr'}{2\sqrt{\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r', \theta_0)}} \times$$

$$\times \int_{r_S}^{r'} \frac{dr''}{\sqrt{\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r'', \theta_0)}} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (11)$$

Из сравнения траекторий ионов, родившихся в двух соседних точках θ_0 и $\theta_0 + \Delta\theta$, следует (см. рис. 2, в):

$$\Delta y(r_S, \theta_0, r) = \frac{r}{r_0} \Delta y_0 + \int_r^{r_0} \frac{dr'}{2\sqrt{\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r', \theta_0)}} \times$$

$$\times \int_{r_S}^{r'} \frac{dr''}{\sqrt{\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r'', \theta_0)}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \Delta y(r_S, \theta_0, r''). \quad (12)$$

Соотношение (12) представляет собой интегральное уравнение относительно Δy . Из (15) в пределе $\Delta y \rightarrow 0$ следует уравнение для скорости разбега траекторий

$$\frac{dy(r_S, \theta_0, r)}{dy_0} = \frac{r}{r_0} + \int_r^{r_0} \frac{dr'}{2\sqrt{\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r', \theta_0)}} \times$$

$$\times \int_{r_S}^{r'} \frac{dr''}{\sqrt{\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r'', \theta_0)}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \frac{dy(r_S, \theta_0, r'')}{dy_0}. \quad (13)$$

Здесь первое слагаемое учитывает поворот системы координат при изменении угла θ_0 . Принимая во внимание связь координат x, y и r, θ , получим, решая (13) методом теории возмущений:

$$\frac{dy_S}{dy_0} = \left(\frac{r_S}{r_0} + \int_{r_S}^{r_0} \frac{dr'}{2\sqrt{\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r', \theta_0)}} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{r_S}^{r'} \frac{dr''}{\sqrt{\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r'', \theta_0)}} \frac{\partial^2 \eta}{r'' r_0 \partial \theta^2} \right).$$

Полученное соотношение при использовании формулы (9) позволяет рассчитать плотность ионов в точке наблюдения (3):

$$n = \frac{\nu_i}{\sqrt{2} V_S} \int_0^{r_0} e^{\eta(r_S, \theta_0)} \frac{r_S}{r_0} \times \frac{dr_S}{\sqrt{\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r_0, \theta_0)}} \times$$

$$\times \left(1 + \int_{r_S}^{r_0} \frac{dr'}{2\sqrt{\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r', \theta_0)}} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{r_S}^{r'} \frac{dr''}{\sqrt{\eta(r_S, \theta_0) - \eta(r'', \theta_0)}} \left(\frac{\partial \eta}{r_S \partial \theta} \frac{\partial \eta}{r'' \partial \theta} + \frac{\partial^2 \eta}{r_S r'' \partial \theta^2} \right) \right),$$

а уравнение плазмы и слоя имеет вид (мы опустили индекс 0 для точки наблюдения)

$$\exp(-\eta(r)) r_D^2 e \Delta \eta = 1 - \frac{\nu_i}{\sqrt{2} V_S} \int_0^r e^{\eta(r_S, \theta) - \eta(r, \theta)} \frac{r_S}{r} \times$$

$$\times \frac{dr_S}{\sqrt{(\eta(r_S, \theta) - \eta(r, \theta))}} \left(1 + \int_{r_S}^r \frac{dr'}{2\sqrt{\eta(r_S, \theta) - \eta(r', \theta)}} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{r_S}^{r'} \frac{dr''}{\sqrt{\eta(r_S, \theta) - \eta(r'', \theta)}} \left(\frac{\partial \eta}{r_S \partial \theta} \frac{\partial \eta}{r'' \partial \theta} + \frac{\partial^2 \eta}{r_S r'' \partial \theta^2} \right) \right). \quad (14)$$

Если азимутальные производные равны нулю, то из (14) следует результат Тонкса и Ленгмюра (5) [1]. Дополнительные слагаемые описывают азимутальное выравнивание потенциала и рост плотности ионов за счет азимутального дрейфа (ионы приходят из области более высокой плотности электронов), причем оба эффекта оказываются нелокальными, так как зависят от свойств потенциала во всех точках, в которых побывал ион. Частота ионизации является собственным значением уравнения (14). На тех траекториях, где расстояние до границы $R(\theta_0)$ минимально, азимутальное поле уменьшает, а вблизи максимума $R(\theta_0)$, напротив, увеличивает разбегание траекторий, благодаря чему на каждой из траекторий выполняется условие баланса частиц при одном и том же значении частоты ионизации. Способы решения уравнений типа (14) будут рассмотрены в последующих работах.

Выводы

В работе проведен вывод интегро-дифференциального уравнения, описывающего распределение потенциала в двумерно неоднородной плазме, аналогичного уравнению плазмы и слоя Ленгмюра и Тонкса для цилиндрического положительного столба газового разряда. В отличие от одномерной задачи полученное уравнение оказывается приближенным, причем в качестве малого параметра используется отношение характерного размера плазменного столба к радиусу кривизны траектории иона. Приведенные в статье результаты интересны для анализа процессов в плазменных химических реакторах низкого давления.

Литература

1. *Langmuir I., Tonks L.* // Phys. Rev. 1929. **34**. P. 876.
2. *Грановский В.Л.* Электрический ток в газе. Установившийся ток. М., 1971. С. 235–291.
3. *Двинин С.А., Довженко В.А., Кузовников А.А.* // Физика плазмы. 1999. **25**, № 11. С. 957.
4. *Двинин С.А., Довженко В.А., Кузовников А.А.* // Физика плазмы. 2000. **26**, № 2. С. 179.
5. *Берлин Е.В., Двинин С.А., Михеев В.В.* и др. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2004. № 3. С. 43.
6. *Каган Ю.М., Перель В.И.* // УФН. 1963. **81**, № 3. С. 409.

Поступила в редакцию
19.07.04