

УДК 533.951.8

ХАРАКТЕР ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ОДНОЧАСТИЧНОМ ЭФФЕКТЕ ЧЕРЕНКОВА ВБЛИЗИ ПОЛОСЫ НЕПРОЗРАЧНОСТИ

И. Н. Карташов, М. В. Кузелев

(кафедра физической электроники)

E-mail: kartashov@ph-elec.phys.msu.su

Рассмотрена неустойчивость, возникающая при вынужденном излучении электронного пучка в режиме одночастичного эффекта Черенкова в некоторой электродинамической системе вблизи полосы непрозрачности. Показано, что такая неустойчивость является абсолютной. Определены инкременты, области волновых чисел, где имеется неустойчивость, исследованы комплексные дисперсионные зависимости.

Исследование устойчивости системы относительно малых монохроматических возмущений сводится к решению дисперсионного уравнения $D(\omega, k) = 0$, которое получается в результате линеаризации «уравнений движения» системы относительно малых возмущений $\sim \exp(-i\omega t + ikx)$. Частота $\omega = \omega(k)$ определяет временную динамику развития возмущений с волновым числом k . Если мнимая часть частоты положительна $\text{Im} \omega > 0$ в некоторой области k , то возмущения экспоненциально нарастают со временем, и система неустойчива. Однако на основании лишь знака $\text{Im} \omega$ нельзя делать вывод о росте возмущений в фиксированной точке пространства.

Реально возмущение представляет собой не монохроматическую волну, а совокупность таких волн — волновой пакет. Монохроматические волны, входящие в пакет, в области неустойчивости экспоненциально нарастают, а сам пакет при этом сносится. Конкуренция этих противоположных факторов — роста амплитуды возмущений за счет неустойчивости и ее уменьшения за счет перемещения ограниченного в пространстве пакета и определяют поведение возмущений в фиксированной точке пространства x при $t \rightarrow +\infty$.

Для адекватного описания динамики развития возмущений в неустойчивой системе требуется, вообще говоря, решение начальной задачи. Однако можно показать, что при $t \rightarrow +\infty$ характер неустойчивости определяется исключительно дисперсионным уравнением и от вида начальных условий не зависит [1–4]. Если возмущения в фиксированной точке пространства неустойчивой системы нарастают со временем, то в таком случае говорят об абсолютной неустойчивости. Если же эти возмущения не нарастают в фиксированной точке x (обычно стремятся к нулю), то говорят о конвективной (сносовой) неустойчивости. Характер неустойчивости определяется точками ветвления функций $k(\omega)$ — решений дисперсионного уравнения. Если найдется хотя бы одна точка ветвления $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ с положительной мнимой частью $\omega_2 > 0$, причем это точка ветвления волн $k = k(\omega)$, соответствующих различным

направлениям распространения, то имеем абсолютную неустойчивость. Если таких точек ветвления функций $k(\omega)$ нет, то неустойчивость конвективна.

Рассмотрим дисперсионное уравнение

$$(\omega - \omega_p(k)) ((\omega - ku)^2 - \omega_b^2(k)) = \theta, \quad (1)$$

которое описывает, например, неустойчивость электронного пучка, движущегося со скоростью u в плазменном волноводе или некоторой иной электродинамической системе [5, 6]. Функции $\omega_p(k)$ и $\omega_b(k)$ определяют спектр частот волны электродинамической системы и пучковых волн соответственно. Параметр θ задает связь этих волн, причем его знак может быть как положительным, так и отрицательным. В случае пучков малой плотности — $\omega_b(k) \ll ku$ — говорят об одночастичном эффекте Черенкова, причем пучковые волны оказываются вырожденными и система (1) упрощается:

$$(\omega - \omega_p(k))(\omega - ku)^2 = \theta. \quad (2)$$

Наиболее сильная связь волн имеет место вблизи точки пересечения их дисперсионных кривых, которую можно найти из системы уравнений

$$\omega_0 = \omega_p(k_0), \quad \omega_0 = k_0 u. \quad (3)$$

Предполагая волновой пакет достаточно узким, разложим функцию $\omega_p(k)$ в ряд относительно $k - k_0$. Ограничившись линейным приближением, получим:

$$(\omega - \omega_0 - v_p(k - k_0))(\omega - \omega_0 - u(k - k_0))^2 = \theta, \quad (4)$$

где $v_p = \frac{\partial \omega_p}{\partial k}(k_0)$ — групповая скорость волны электродинамической системы.

Характер неустойчивости системы с дисперсионным уравнением (2) определяется двумя правилами (при любом знаке параметра θ) [7]:

1) если $v_p u > 0$, то неустойчивость конвективная и в системе имеется усиление колебаний;

2) если $v_p u < 0$, то неустойчивость является абсолютной.

Заметим, что во втором случае дисперсионное уравнение (2) имеет комплексно-сопряженные реше-

ния относительно волнового числа $k(\omega)$. Тем не менее говорить об усилении колебаний при этом не следует. Дело в том, что решения $\sim \exp(-i\omega t + ik(\omega)x)$ описывают установившееся (стационарное) поведение системы при $t \rightarrow +\infty$ (после завершения переходных процессов, связанных с включением возмущений при $x = 0$). В случае абсолютной неустойчивости установление стационарного состояния просто невозможно.

Вблизи полосы непрозрачности системы $v_p = 0$ и необходим учет следующего члена разложения по $k - k_0$:

$$(\omega - \omega_0 - \alpha(k - k_0)^2)(\omega - \omega_0 - u(k - k_0))^2 = \theta. \quad (5)$$

Вводя новые безразмерные переменные, перепишем (5):

$$(\tilde{\omega} - \tilde{\alpha}\tilde{k}^2)(\tilde{\omega} - \tilde{k})^2 = \tilde{\theta}, \quad (6)$$

где $\tilde{\theta} = \pm 1$. Подобное дисперсионное уравнение описывает возбуждение электронным пучком электродинамических систем вакуумной СВЧ-электроники вблизи полосы непрозрачности [8–10]. В плазменной СВЧ-электронике экстремум дисперсионной кривой имеется у циклотронной ветви в конечном магнитном поле. В дальнейшем знак тильды в (6) опускаем, сохранив таким образом прежние обозначения, а также считаем, что $\alpha > 0$.

В работе [11] уравнение, аналогичное (6), рассматривалось в пренебрежении ω по сравнению с k во втором множителе. Однако такое пренебрежение фактически приводит к уравнению, описывающему устойчивые колебания, а также искажает асимптотику двух корней $k(\omega)$ при $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$, что существенно для классификации волн по направлениям распространения. В настоящей работе анализируется дисперсионное уравнение с точной зависимостью от частоты.

Не выписывая в явном виде решения $\omega(k)$ уравнения (6), легко установить, что система, описываемая этим уравнением, неустойчива (имеет комплексно-сопряженные корни) при любых значениях параметров. Причем область волновых чисел k , на которых развивается неустойчивость, определяется неравенством

$$\frac{4}{27}\theta(k - \alpha k^2)^3 < 1. \quad (7)$$

Если $\theta = +1$, а $\alpha > 1/6\sqrt[3]{2}$, то система неустойчива при любых k . Поведение дисперсионных кривых в этом случае показано на рис. 1, а ($\alpha = 1$). На рис. 1, б изображена положительная мнимая часть комплексной частоты ω (инкремент).

Для $\alpha < 1/6\sqrt[3]{2}$ имеются две полубесконечных области k , при которых развивается неустойчивость:

$$k < \frac{1 - \sqrt{1 - 6\sqrt[3]{2}}}{2\alpha}, \quad k > \frac{1 + \sqrt{1 - 6\sqrt[3]{2}}}{2\alpha}. \quad (8)$$

Ход дисперсионных кривых и значение инкремента как функция k для $\alpha = 0.1$ показаны на рис. 2, а, б.

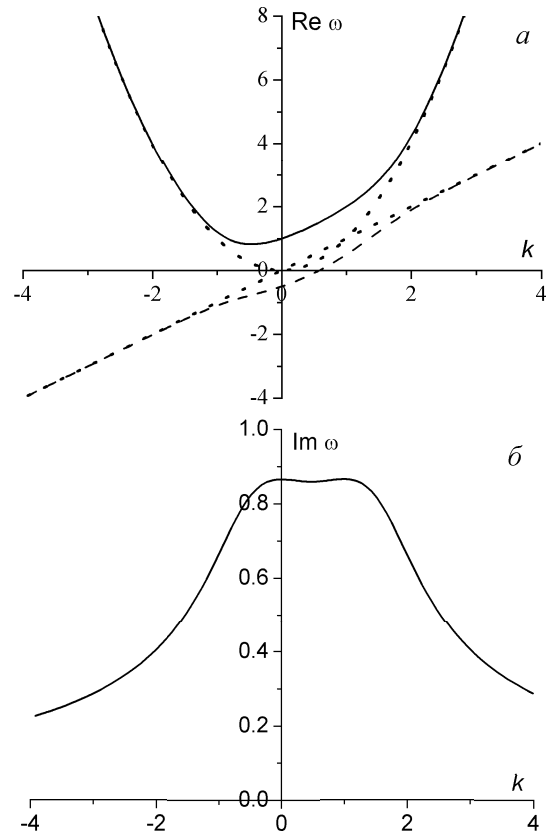


Рис. 1. Дисперсионные кривые (а) и инкремент неустойчивости (б) при $\theta = +1$, $\alpha = 1$. Штриховая кривая — $\text{Re } \omega$ в области неустойчивости, пунктирные кривые — те же волны в отсутствие связи

При больших значениях k величина инкремента, так же как и в первом случае, стремится к нулю.

При $\theta = -1$ в области волновых чисел, определяемых неравенствами

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 6\sqrt[3]{2}}}{2\alpha} < k < \frac{1 + \sqrt{1 - 6\sqrt[3]{2}}}{2\alpha}, \quad (9)$$

частоты ω комплексно-сопряженные, и в системе развивается неустойчивость. На рис. 3 изображены дисперсионные кривые (рис. 3, а) и инкременты неустойчивости (рис. 3, б) для $\alpha = 1$.

Определим теперь характер неустойчивости системы, описываемой дисперсионным уравнением (6). Точки ветвления функций $k = k(\omega)$ — решений дисперсионного уравнения (6) — определяются системой [1–4]

$$D(\omega, k) = 0, \quad \frac{\partial D(\omega, k)}{\partial k} = 0. \quad (10)$$

Используя дисперсионное уравнение (6), из (10) можно получить уравнение седьмой степени относительно ω для определения точек ветвления $\omega = \omega_1 + i\omega_2$. В зависимости от параметров системы имеем либо две, либо три точки ветвления с положительной мнимой частью $\omega_2 > 0$.

Дисперсионное уравнение (6) для заданного значения ω определяет четыре волны с различными k .

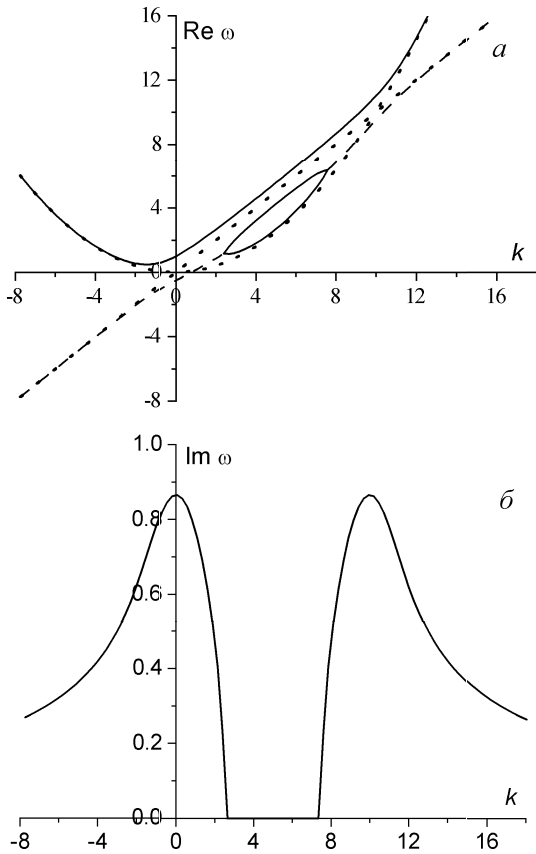


Рис. 2. Дисперсионные кривые (а) и инкремент неустойчивости (б) при $\theta = +1$, $\alpha = 0.1$. Штриховая кривая — $\text{Re} \omega$ в области неустойчивости, пунктирные кривые — те же волны в отсутствие связи

Устремляя мнимую часть частоты к бесконечности при фиксированной вещественной части, можно получить асимптотическое поведение корней:

$$k_{1,2}(\omega) \approx i \text{Im} \omega, \quad k_{3,4}(\omega) \approx \pm(1+i)\sqrt{\text{Im} \omega / 2\alpha}. \quad (11)$$

Три из четырех корней соответствуют волнам, затухающим в положительном направлении оси Ox , один — в отрицательном. Предельный переход $\text{Im} \omega \rightarrow +\infty$ означает мгновенно быстрое включение источника возмущений с частотой $\text{Re} \omega$ в некоторой точке пространства x . А значит, распространяющимися в данном направлении с частотой $\text{Re} \omega$ следует считать волны, затухающие в данном направлении при стремлении $\text{Im} \omega \rightarrow +\infty$ [1–4]. Такая классификация волн по направлению распространения соответствует принципу причинности. Характер неустойчивости системы определяется поведением корней $k(\omega)$ вблизи точек ветвления с $\text{Im} \omega > 0$. А именно, если имеется хотя бы одна точка ветвления с $\text{Im} \omega > 0$, в которой ветвятся корни $k(\omega)$, соответствующие волнам с различными направлениями распространения (мнимые части $\text{Im} k$ имеют разные знаки при $\text{Im} \omega \rightarrow +\infty$), то система абсолютно неустойчива. При этом асимптотическое поведение возмущений при $t \rightarrow +\infty$ определяется точкой ветвления волн $k(\omega)$ с различным направлением распространения и максимальной мнимой частью,

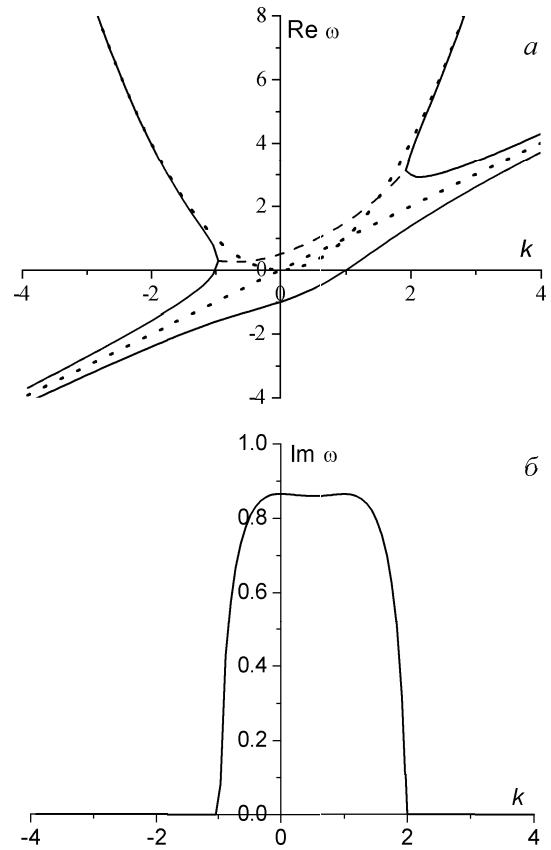


Рис. 3. Дисперсионные кривые (а) и инкремент неустойчивости (б) при $\theta = -1$, $\alpha = 1$. Штриховая кривая — $\text{Re} \omega$ в области неустойчивости, пунктирные кривые — те же волны в отсутствие связи

т. е. $\sim \exp(\omega_2 t - i\omega_1 t)$. Во всех других случаях неустойчивая система конвективно неустойчива [1–4].

На рис. 4 представлено поведение корней $k(\omega)$ на комплексной плоскости для случая $\alpha = 1$, $\theta = 1$ при изменении частоты вдоль контура $\text{Re} \omega = \omega_1$, $+\infty > \text{Im} \omega > \omega_2$. Четыре набора точек с разными маркировками соответствуют четырем различным ветвям $k(\omega)$. Уменьшая мнимую часть частоты $\text{Im} \omega$ от достаточно большого значения до ω_2 при фиксированной вещественной части ω_1 , получим эти четыре набора точек $k(\omega)$, два из которых стремятся к одному пределу (точка $k = -0.4 - 0.45i$ на рис. 4). Так как в данной точке ветвления сходятся

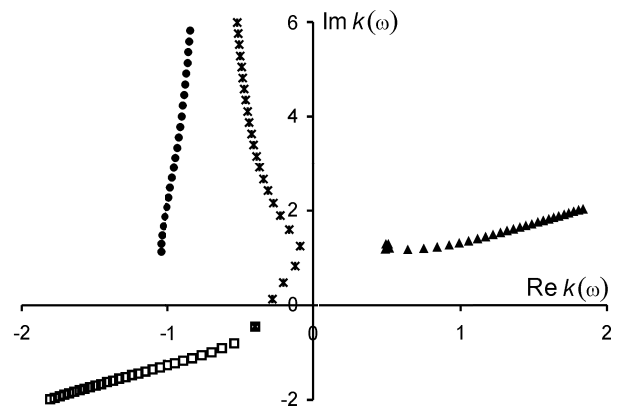


Рис. 4. Поведение корней $k(\omega)$ на комплексной плоскости при стремлении частоты ω от $\omega_1 + i\infty$ к $\omega_1 + i\omega_2$

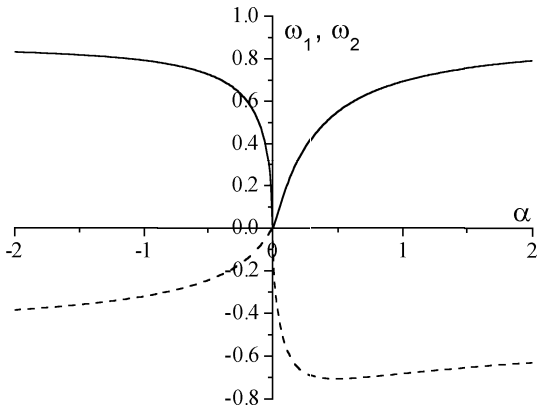


Рис. 5. Зависимость вещественной ω_1 (штриховая кривая) и мнимой ω_2 (сплошная кривая) частот развития абсолютной неустойчивости от α

корни $k(\omega)$, соответствующие волнам с различным направлением распространения, то мы имеем случай абсолютной неустойчивости [1–4]. Повторяя аналогичные вычисления при других значениях $\alpha > 0$ для всех точек ветвления функций $k(\omega)$ с положительной мнимой частью $\omega_2 > 0$, можно убедиться, что неустойчивость абсолютна при всех $\alpha > 0$.

Случай $\alpha < 0$ не требует специального рассмотрения, так как заменой $\alpha \rightarrow -\alpha$, $k \rightarrow -k$, $\omega \rightarrow -\omega$ и $\theta \rightarrow -\theta$ уравнение (6) сводится к уже рассмотренному с положительным коэффициентом перед k^2 и противоположным значением θ . Изменится, однако, процедура определения характера неустойчивости. В новых переменных $\text{Im } \omega$ следует изменять от $-\infty$ до $-\omega_2 < 0$. Но так как дисперсионное уравнение (6) имеет вещественные коэффициенты, то изменение знака $\text{Im } \omega$ приведет лишь к изменению всех знаков $\text{Im } k(\omega)$, а значит, характер неустойчивости не изменится. При этом возмущения в фиксированной точке пространства будут нарастать при $t \rightarrow +\infty$ с тем же инкрементом ω_2 и противоположным значением частоты ω_1 .

На рис. 5 представлены зависимости инкремента ω_2 (сплошная кривая) и частоты ω_1 (штриховая кривая) асимптотического поведения при $t \rightarrow +\infty$ возмущений $\sim \exp(\omega_2 t - i\omega_1 t)$ как функции параметра α при $\theta = 1$. Как уже указывалось, система, описываемая дисперсионным уравнением (6), всегда абсолютно неустойчива. Случай $\theta = -1$ получается отражением сплошной кривой на рис. 5 относительно

оси ординат, а штриховой — относительно начала координат. При α , не близких к нулю, ω_2 — порядка величины инкремента неустойчивости монохроматической волны. При $\alpha \rightarrow 0$ для адекватного анализа требуется учет следующего члена разложения ($\sim k^3$) в первом множителе левой части уравнения (6).

Авторы благодарны А. А. Рухадзе за внимание к работе и полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (проект УР.01.02.493) и Минобрнауки (проект ведущие научные школы НШ-1962.2003.2).

Литература

1. Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М., 1981.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Физическая кинетика. М., 2001.
3. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. Электродинамика плазмы. М., 1974.
4. Александров А.Ф., Рухадзе А.А. Лекции по электродинамике плазмopodobных сред. Неравновесные среды. М., 2002.
5. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М., 2002.
6. Карташов И.Н., Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // Физика плазмы. 2004. **30**, № 1. С. 60.
7. Ерохин Н.С., Кузелев М.В., Моисеев С.С. и др. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. М., 1982.
8. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Нусинович Г.С. и др. // Релятивистская высокочастотная электроника: Матер. Всесоюз. семинара. Горький, 1978. С. 157.
9. Бугаев С.П., Канавец В.И., Климов А.И. и др. // Релятивистская высокочастотная электроника: Матер. IV Всесоюз. семинара. Горький, 1984. С. 79.
10. Братман В.Л., Денисов Г.Г., Коровин С.Д. и др. // Релятивистская высокочастотная электроника: Матер. IV Всесоюз. семинара. Горький, 1984. С. 119.
11. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. **23**, № 9. С. 1104.

Поступила в редакцию
06.10.04