ГЕОФИЗИКА

УДК 537.86:519.2; 537.876.23:551.510; 550.3

ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ДВИЖУЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ОГРАНИЧЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ НАБЛЮДЕНИЯ

А. Г. Вологдин, Л. И. Приходько

(*кафедра физики атмосферы*)

Проведен анализ условий эквивалентности оценок автокорреляционной функции движущихся случайных полей при усреднении на ограниченных временных и пространственных интервалах. С использованием нового подхода к пространственной эргодичности показано, что временные и пространственные оценки статистической автокорреляционной функции полностью совпадают, если случайное поле движется с постоянной скоростью, а пространственное усреднение производится вдоль линии, совпадающей с направлением перемещения поля. Получено подтверждение гипотезы Тейлора относительно автокорреляционной функции.

При экспериментальном изучении случайных полей в геофизических средах и обработке измеренных данных встает вопрос об эффективности их статистических оценок на ограниченных интервалах наблюдения. Известно, что в условиях эксперимента усреднение по ансамблю реализаций является практически недостижимым и обычно приходится усреднять данные по времени или пространству. При этом обычно предполагается, что эти типы средних значений совпадают. Как отмечено в [1], если такое предположение делается относительно равенства среднего по ансамблю и какого-нибудь другого типа среднего, то оно называется эргодической гипотезой.

Определение временной эргодичности для случайного поля $\xi(\mathbf{r},t)$, где $\mathbf{r}$ и t — пространственная и временная координаты, дано, например, в книге [2]. Так, если стационарное случайное поле $\xi(\mathbf{r},t)$ как функция t является эргодическим, то для произвольной детерминированной функции f практически справедливо равенство

$$\langle f[\xi(\mathbf{r},t)]\rangle = \lim_{T\to\infty} \widetilde{f[\xi(\mathbf{r},t)]}_T \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T f[\xi(\mathbf{r},t)]\,dt, \tag{1}$$

где угловыми скобками здесь и далее обозначено статистическое усреднение (усреднение по ансамблю реализаций), а волнистой линией сверху — усреднение по времени на промежутке $[0,T]$. Знак равенства в (1) необходимо понимать в смысле вероятностной сходимости. Для получения средних по ансамблю путем временного усреднения можно с достаточной степенью точности ограничиться конечными интервалами наблюдения T, а предельный переход $T\to\infty$ можно заменить условием $T \gg \tau_k$, где τ_k — время корреляции случайного поля. Пространственные координаты в (1) при этом рассматриваются как параметры. Один из способов формулировки условия выполнения (1) применительно к математическому ожиданию случайного поля $\xi(\mathbf{r},t)$ состоит в следующем. Если оценить математическое ожидание на конечном временном интервале $[0,T]$, то взятая по ансамблю реализаций дисперсия полученной оценки должна стремиться к нулю с ростом интервала усреднения по времени. Иными словами, среднее по времени должно приближаться к некоторому устойчивому значению, и это значение должно совпадать со средним по ансамблю [1]. Это утверждение можно записать в виде формулы

$$\sigma_T^2 = \left\langle \left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi(\mathbf{r},t)\,dt\right]^2 \right\rangle \to 0 \tag{2}$$

при $T\to\infty$. Здесь для простоты положено, что $\langle\xi(\mathbf{r},t)\rangle = 0$. Пользуясь свойством симметрии корреляционной функции случайного поля ξ, последнее соотношение можно преобразовать к виду

$$\sigma_T^2 = \frac{2\sigma^2}{T}\int\limits_0^T \left(1-\frac{\tau}{T}\right)\rho(\mathbf{r},\tau)\,d\tau \to 0$$

при $T\to\infty$, где σ^2 — дисперсия поля ξ, взятая по ансамблю реализаций, а $\rho(\mathbf{r},\tau)$ — его коэффициент корреляции.

При условии, что время корреляции случайного поля τ_k существенно меньше интервала наблюдения T, последняя формула может быть использована для оценки необходимого значения T при допустимом уровне точности измерения.

Аналогичные критерии могут быть применены при пространственном усреднении случайных полей, когда пользуются понятием пространственной эргодичности. Так, для статистически однородных пространственно-эргодических полей средние по ансамблю реализаций совпадают (в смысле сходимости по вероятности) со средними по пространству [2].

Это означает, что для произвольной детерминированной функции f поля $\xi(\mathbf{r},t)$ можно считать справедливым равенство

$$\langle f[\xi(\mathbf{r},t)]\rangle = \lim_{W\to\infty} \overline{f[\xi(\mathbf{r},t)]}_W \equiv \equiv \lim_{W\to\infty} \frac{1}{W}\int\limits_W f[\xi(\mathbf{r},t)]\,d\mathbf{r},$$

здесь прямая черта — символ пространственного усреднения, а W — пространственная область, по которой ведется усреднение. Предельный переход может быть приостановлен на области W, поперечные размеры которой велики по сравнению с пространственным радиусом корреляции ℓ_ξ случайного поля $\xi(\mathbf{r},t)$, т. е. $L\sim W^{1/3}\gg \ell_\xi$.

При одновременном выполнении последнего равенства и соотношения (1) можно говорить о пространственно-временной эргодичности полностью статистически однородных случайных полей $\xi(\mathbf{r},t)$ [2]. В работах [3–5] применен новый подход к пространственной эргодичности случайных полей, основанный на замене усреднения по пространству усреднением вдоль произвольной прямой линии. Такой подход позволяет снизить уровень сложности как математического, так и экспериментального характера при решении проблем пространственной эргодичности случайных полей.

Автокорреляционная функция движущегося пространственного случайного поля. В предыдущей работе [7] нами были рассмотрены вопросы временной и пространственной эргодичности относительно математического ожидания движущегося случайного поля $\xi(\mathbf{r}+\mathbf{V}t)$ (либо в одной точке пространства, либо в фиксированный момент времени), где $\mathbf{V}$ — скорость поля.

Теперь обратимся к проблеме эргодичности применительно к произведению $\xi(\mathbf{r}_1+\mathbf{V}t_1)\,\xi(\mathbf{r}_2+\mathbf{V}t_2)$ для движущегося случайного поля $\xi(\mathbf{r}+\mathbf{V}t)$, взятого в разные моменты времени и в разных точках пространства при $\mathbf{V}=\mathbf{V}(\mathbf{r},t)=\mathrm{const}$. Запишем вначале временное среднее значение этого произведения на интервале $[0,T]$ при $t_1=t$, $t_2=t+\tau$ для полностью статистически однородного поля:

$$\widetilde{\xi(\mathbf{r}_1+\mathbf{V}t)\,\xi(\mathbf{r}_2+\mathbf{V}(t+\tau))}_T = = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi(\mathbf{r}_1+\mathbf{V}t)\,\xi(\mathbf{r}_2+\mathbf{V}(t+\tau))\,dt. \quad (3)$$

Статистическое среднее этого произведения равно пространственно-временной функции автокорреляции поля:

$$\langle \xi(\mathbf{r}_1+\mathbf{V}t)\,\xi(\mathbf{r}_2+\mathbf{V}(t+\tau))\rangle = \Psi(\Delta\mathbf{r}+\mathbf{V}\tau), \quad (4)$$

$\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\Delta\mathbf{r}$, в предположении, что $\langle\xi\rangle=0$. При выполнении условия временной эргодичности временное среднее (3) сходится при $T\to\infty$ в вероятностном смысле к своему статистическому среднему, т. е. к функции автокорреляции (4). Функцию автокорреляции (4) можно находить аналогичным образом и путем пространственного усреднения. При этом, в соответствии с новым подходом к пространственной эргодичности, указанное произведение при усреднении вдоль прямой линии должно стремиться к статистическому среднему при увеличении интервала усреднения ($L\to\infty$).

Рассмотрим вопрос о выполнении условий временной и пространственной эргодичности для функции автокорреляции движущегося случайного поля при усреднении в фиксированной точке пространства на ограниченном временном интервале $[0,T]$, а также при усреднении на ограниченном пространственном интервале $[0,L]$ в один и тот же момент времени.

Достаточным условием выполнения теоремы временной эргодичности [7] относительно автокорреляционной функции (4) является стремление к нулю при $T\to\infty$ дисперсии временной оценки (3), т. е. состоятельность этой оценки. Обозначим функцию автокорреляции случайной величины $\eta(\mathbf{V}t)=\xi(\mathbf{V}t)\,\xi(\mathbf{V}(t+\tau))$ через $\Psi_\eta(\mathbf{V}\tau_1)$:

$$\Psi_\eta(\mathbf{V}\tau_1) = \Big\langle \xi(\mathbf{V}t)\,\xi(\mathbf{V}(t+\tau))\,\xi(\mathbf{V}(t+\tau_1))\times \times\xi(\mathbf{V}(t+\tau+\tau_1))\Big\rangle - \Psi^2(\mathbf{V}\tau). \quad (5)$$

Можно показать, что состоятельность временной оценки сводится к тому, что должно выполняться равенство [6]

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \Psi_\eta(\mathbf{V}\tau_1)\,d\tau_1 = 0. \quad (6)$$

При выбранном направлении перемещения случайного поля, когда постоянная скорость имеет две компоненты $V_x=V\cos\theta$, $V_z=V\sin\theta$, где θ — угол между вектором $\mathbf{V}$ и координатной осью x, временная оценка функции автокорреляции (3) в фиксированной точке пространства имеет вид

$$\widetilde{\xi(\mathbf{V}t)\,\xi(\mathbf{V}(t+\tau))}_T = = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi(V_xt,0,V_zt)\,\xi(V_x(t+\tau),0,V_z(t+\tau))\,dt = = \frac{1}{V_xT}\int\limits_0^{V_xT} \xi(x,0,x\,\mathrm{tg}\,\theta)\,\xi(x+V_x\tau,0,x\,\mathrm{tg}\,\theta+V_z\tau)\,dx. \quad (7)$$

Здесь заменой $V_xt=x$ совершен переход от усреднения по времени к усреднению по прямой линии.

Найдем теперь пространственную оценку функции автокорреляции поля в один и тот же момент времени при усреднении вдоль линии, совпадающей с направлением скорости перемещения поля. При $L_x = L\cos\theta$ имеем:

$$\overline{\xi(\mathbf{r})\,\xi(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})}_L = \frac{1}{L}\int\limits_0^L \xi(x,0,z)\,\xi(x+\Delta r_x, 0, z+\Delta r_z)\,dl = = \frac{1}{L}\int\limits_0^{L_x} \xi(x,0,z(x))\,\xi(x+\Delta r_x, 0, z(x)+\Delta r_z)\times \times\sqrt{1+[z'(x)]^2}\,dx = = \frac{1}{L_x}\int\limits_0^{L_x} \xi(x,0,x\operatorname{tg}\theta)\,\xi(x+\Delta r_x, 0, x\operatorname{tg}\theta+\Delta r_z)\,dx, \tag{8}$$

Из сравнения выражений (7) и (8) видно, что, если временной интервал усреднения выбрать так, чтобы выполнялись соотношения $V_xT = L_x$ или, что тоже самое, $VT = L$, а пространственные сдвиги $\Delta r_x, \Delta r_z$ по осям x и z связать с временным сдвигом τ соотношениями $V_x\tau = \Delta r_x$, $V_z\tau = \Delta r_z$, то можно констатировать эквивалентность временной и пространственной оценок функции автокорреляции движущегося случайного поля, т. е.

$$\widetilde{\xi(\mathbf{V}t)\,\xi(\mathbf{V}(t+\tau))}_T = \overline{\xi(\mathbf{r})\,\xi(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})}_L. \tag{9}$$

Найдем теперь условия справедливости временной и пространственной эргодической теоремы для функции автокорреляции движущегося случайного поля в важном частном случае, когда ξ подчиняется нормальному закону распределения вероятности, а значит, все моменты, в том числе и четвертые, выражаются через математическое ожидание $\langle\xi\rangle$ и второй смешанный момент (функцию автокорреляции) Ψ. Тогда выражение (5) принимает вид

$$\Psi_\eta(\mathbf{V}\tau_1) = \Psi^2(\mathbf{V}\tau_1) + \Psi(\mathbf{V}(\tau_1-\tau))\,\Psi(\mathbf{V}(\tau_1+\tau)),$$

а дисперсия оценки функции автокорреляции изотропного поля на временном интервале $[0,T]$ равна

$$\sigma_\Psi^2(T) = = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^4\frac{\ell_k}{VT}\left[1+\exp\left(-\frac{2V^2\tau^2}{\ell_k^2}\right)\right]\Phi\left(\frac{\sqrt{2}VT}{\ell_k}\right), \tag{10}$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности. Из этого выражения видно, что выполняется условие справедливости для временной эргодической теоремы (6), т. е. временная оценка функции автокорреляции (3) является асимптотически состоятельной.

Аналогичным образом найдем условие справедливости пространственной эргодической теоремы на основе нового подхода, которое, очевидно, должно сводиться к тому, чтобы имело место равенство

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int\limits_0^L \Psi_\eta(\Delta\mathbf{r},\Delta\mathbf{r}_1)\,dl = 0,$$

где интегрирование ведется вдоль произвольной прямой линии, а $\Delta\mathbf{r}$, $\Delta\mathbf{r}_1$ — пространственные сдвиги. Для нормального случайного поля ξ подынтегральная функция корреляции имеет вид

$$\Psi_\eta(\Delta\mathbf{r},\Delta\mathbf{r}_1) = = \overline{\xi(\mathbf{r})\,\xi(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})\,\xi(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}_1)\,\xi(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}_1)} - \Psi^2(\Delta\mathbf{r}) = = \Psi^2(\Delta\mathbf{r}_1) + \Psi(\Delta\mathbf{r}_1-\Delta\mathbf{r})\,\Psi(\Delta\mathbf{r}_1+\Delta\mathbf{r}),$$

а дисперсия пространственной оценки на интервале $[0,L]$ для функции автокорреляции изотропного случайного поля при усреднении вдоль линии, ориентированной по направлению скорости перемещения поля, равна

$$\sigma_\Psi^2(L) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^4\frac{\ell_k}{L}\left[1+\exp\left(-\frac{2\rho^2}{\ell_k^2}\right)\right]\Phi\left(\frac{\sqrt{2}L}{\ell_k}\right).$$

Сравнивая последнее выражение с (10) видим, что они полностью совпадают, если интервалы наблюдения $[0,T]$ и $[0,L]$, а также временные и пространственные сдвиги τ и $\Delta\mathbf{r}$ связаны соотношениями $VT = L$, $V_x\tau = \Delta r_x$, $V_z\tau = \Delta r_z$, приведенными выше. Впрочем, этот результат непосредственно следует из полученного равенства временных и пространственных оценок (9).

Таким образом, полученные результаты подтверждают гипотезу Тейлора относительно функции автокорреляции движущегося случайного поля, в соответствии с которой временные наблюдения флуктуаций случайного поля дают информацию о пространственных корреляционных свойствах вдоль направления среднего движения.

При анализе функции автокорреляции анизотропного движущегося поля путем измерения на ограниченном временном интервале $[0,T]$ примем, что функция автокорреляции случайного поля остается гауссовой, а неоднородности представляют собой эллипсоиды вращения, сечения которых в плоскости (x,z) есть эллипсы, направления большой оси которых составляют угол γ с осью z [7]. Тогда для дисперсии временной оценки функции автокорреляции получим выражение

$$\sigma_\Psi^2(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^4\frac{d}{VT}\frac{\Phi\left[\frac{\sqrt{2}}{d}VT\varphi(\alpha,\gamma)\right]}{\varphi(\alpha,\gamma)}\times \times\left[1+\exp\left(-\frac{V^2\tau^2}{d^2}\left(e^2\cos^2(\theta+\gamma)+\sin^2(\theta+\gamma)\right)\right)\right],$$

где $\alpha = \pi/2-\theta$, $\varphi(\alpha,\gamma) = [e^2\sin^2(\alpha-\gamma)+\cos^2(\alpha-\gamma)]^{1/2}$, $e = d/b$ — отношение осей эллипсоида вращения. Отсюда следует состоятельность временной оценки и, следовательно, выполнение условия справедливости временной эргодичности (6). Аналогичные результаты найдены и для пространственной оценки функции автокорреляции при усреднении вдоль линии, совпадающей с направлением скорости (здесь не приводится).

Для анизотропного движущегося поля анализ временной и пространственной оценок функции автокорреляции и сравнение $\sigma_\Psi^2(T)$ с $\sigma_\Psi^2(L)$, т. е. дисперсии временной оценки с дисперсией пространственной оценки, полученной усреднением по линии вдоль скорости поля, а также связь временного и пространственного сдвигов по формулам, указанным выше, позволяет прийти к утверждению полной эквивалентности указанных оценок и их дисперсий, т. е. в частности $\sigma_\Psi^2(T) = \sigma_\Psi^2(L)$.

Общие выводы. Анализ выполнения условий справедливости временной и пространственной эргодичности (на основе нового подхода) движущегося случайного поля с изотропной и анизотропной функцией автокорреляции показывает, что в рамках корреляционной теории статистические средние можно находить путем наблюдения, как на временном, так и на пространственном интервале (при усреднении вдоль прямой линии).

Полученные результаты являются прямым подтверждением гипотезы Тейлора о замороженной турбулентности, т. е. в работе показано, что для движущегося с постоянной скоростью случайного поля временные наблюдения флуктуаций случайного поля дают информацию о пространственных корреляционных свойствах вдоль направления среднего движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-02-16595).

Литература

1. *Ламли Дж.Л., Пановский Г.А.* Структура атмосферной турбулентности. М., 1966.
2. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М., 1978.
3. *Вологдин А.Г., Гусев В.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №1. С. 46.
4. *Вологдин А.Г., Гусев В.Д.* // Радиотехника и электроника. 2001. **46**, №1. С. 72.
5. *Вологдин А.Г., Гусев В.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. №6. С. 48 (Moscow University Phys. Bull. 2000. N 6. P. 60).
6. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. Случайные процессы. М., 1976.
7. *Вологдин А.Г., Приходько Л.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2005. №3. С. 39.

Поступила в редакцию
25.12.03