КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958; 621.372.8

К ТЕОРЕМЕ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВЛОЖЕННЫХ ЛОВУШЕЧНЫХ МОД

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых
(*кафедра математики*)
E-mail: malykham@mtu-net.ru

Предложено новое обоснование теории возмущений для вложенных ловушечных мод волновода.

Рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda q u = 0, & x \in X, \\ u = 0, & x \in \partial X, \end{cases} \tag{1}$$

с условием

$$\|u\|^2 = \int\limits_X u^2\, d\tau = 1.$$

Здесь X — цилиндр постоянного сечения S, т. е. «волновод», а q — вещественная кусочно-непрерывная функция с компактным носителем $\operatorname{supp}(q-1)$, характеризующая заполнение волновода. С физической точки зрения такие собственные функции представляют собой стоячие волны с частотой $\sqrt{\lambda}$, не переносящие энергию. Большая часть энергии таких волн сосредоточена в конечной области, в «ловушке», образованной неоднородностью заполнения. Поэтому их называют ловушечными модами [1].

Направим ось Ox по оси волновода, а переменные, меняющиеся вдоль сечения S, обозначим как y. Далее обозначим как ψ_n и α_n собственные функции и собственные значения задачи Дирихле на сечении S, т. е.

$$\Delta\psi + \alpha^2\psi = 0, \quad \psi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(S).$$

Непрерывный спектр задачи (1) начинается с α_1^2. При помощи принципа Рэлея было показано, что задача (1) при $q \geqslant 1$ обязательно имеет хотя бы одно собственное значение, меньшее α_1^2, т. е. невложенное в непрерывный спектр. Исследование существования вложенных ловушечных мод, т. е. собственных значений $\lambda > \alpha_1^2$, требует поднять нижнюю границу непрерывного спектра, для того чтобы можно было применить принцип Рэлея и регулярную теорию возмущения Реллиха–Като.

Пусть u — собственная функция задачи (1), отвечающая собственному значению $\lambda \in (\alpha_r^2, \alpha_{r+1}^2)$, тогда при $n = 1, \dots, r$ функции

$$u_n(x) := \int\limits_S u(x,y)\psi_n(y)\, dy,$$

имеют компактный носитель, а при $n > r$

$$u_n(x) := \int\limits_S u(x,y)\psi_n(y)\, dy \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\mathbb{R}^1).$$

Поэтому u является собственной функцией задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda q u = 0, & x \in X, \\ u = 0, & x \in \partial X, \\ u_n|_{x=\pm a} = 0 & (n = 1, \dots, r), \\ u_n \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\mathbb{R}^1) & (n = r+1, \dots). \end{cases} \tag{2}$$

Непрерывный спектр этой задачи, рассматриваемой в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ всех функций вида

$$v = v_1(x)\psi_1(y) + \ldots + v_r(x)\psi_r(y) + w,$$

где $v_n \in \overset{\circ}{W}{}^1_2([-a,a])$, $w \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(X)$ и

$$\int\limits_S w\psi_n\, dy = 0 \quad (n = 1, \dots, r),$$

начинается с α_{r+1}^2, т. е. u — собственная функция задачи (2), отвечающая изолированному собственному значению. Это обстоятельство позволяет дать значительно более простое доказательство нашей теоремы о неустойчивости вложенных ловушечных мод при малых возмущениях заполнения волновода [2].

Как известно, задача (1) при $q = q_0(x) \geqslant 1$ имеет ловушечную моду вида $u_0(x,y) = u_0(x)\psi_{r+1}(y)$, отвечающую собственному значению $\lambda = e_0 > \alpha_r^2$. Покажем, что не для всякого возмущенного заполнения

$$q = q_0(x) + \varepsilon q_1(x,y)$$

имеется собственное значение $\lambda = e(\varepsilon)$, стремящееся при $\varepsilon \to 0$ к e_0.

Допустим противное. Тогда $e(\varepsilon)$, $u(x,y;\varepsilon)$ — изолированные собственное значение и собственная функция задачи (2), следовательно, в силу самосопряженности задачи они разложимы в ряд по степеням ε:

$$e(\varepsilon) = e_0 + e_1\varepsilon + \ldots, \quad u = u_0(x)\psi_{r+1}(y) + \varepsilon u_1(x,y) + \ldots .$$

Умножив (1) на $\psi_1(y)$ и проинтегрировав по всему сечению S, получим

$$\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_S dy\, u(x,y)\psi_1(y) + e\int\limits_S dy\, q(x,y)u(x,y)\psi_1(y) = \\ = \alpha_1^2 \int\limits_S dy\, u(x,y)\psi_1(y).$$

Подставим сюда ряды для $e(\varepsilon)$ и $u(\varepsilon)$, тогда в первом порядке теории возмущений, обозначив

$$\int\limits_S dy\, u(x,y)\psi_1(y) = v(x),$$

получим

$$\frac{d^2v}{dx^2} + [e_0 q_0(x) - \alpha_1^2]v = e_0 u_0(x)\int\limits_S dy\, q_1(x,y)\psi_1(y)\psi_2(y).$$

Для того чтобы $u(x,y;\varepsilon)$ принадлежало L^2, необходимо, чтобы и $v(x)$ принадлежала $L^2(\mathbb{R}^1)$. Поскольку носитель возмущенного заполнения $q(x,y)-1$ ограничен, это уравнение имеет решение, принадлежащее пространству L^2, лишь при весьма специальных условиях на $q_1(x,y)$. Тем самым доказано следующее.

Теорема. *Существуют такие кусочно-непрерывные вещественные возмущения $q_1(x,y)$ исходного заполнения $q_0(x)$, что в окрестности невозмущенного собственного значения нет возмущенных собственных значений.*

Литература

1. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* // Радиотехника и электроника. 2005. **50**, № 2. С. 218.
2. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г.* // Докл. РАН. 2002. **385**, № 6. С. 744.

Поступила в редакцию
11.04.05