ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958;621.372.8

ОБ УСЛОВИЯХ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ИМПЕДАНСНОГО ВОЛНОВОДА

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, Ю. В. Мухартова

(*кафедра математики*)

Рассмотрена задача о возбуждении колебаний током в регулярном полом круглом волноводе Ω, на границе которого заданы условия Щукина–Леонтовича. Показано, что требование существования обобщенного преобразования Фурье (Fr-преобразование) является вполне корректным условием излучения, выделяющим решение, представляющее собой суперпозицию волн, бегущих от источника.

Задача о возбуждении электромагнитных колебаний в регулярном полом цилиндрическом волноводе $\Omega = \{(x,y) \in S;\ z \in R\}$ с граничными условиями Щукина–Леонтовича током $\mathbf{j}e^{-i\omega t}$, где $\mathbf{j}$ имеет компактный носитель в Ω, записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{E} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mathbf{H}, \\ [\mathbf{n},\mathbf{E}]|_{\partial\Omega} = \varsigma[\mathbf{n},[\mathbf{n},\mathbf{H}]]. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\varsigma = -\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_0}}(1-i)$ – комплексная постоянная, σ_0 — удельная проводимость металла при постоянном токе [1, 2].

Пусть $(\mathbf{E}_0(\mathbf{j}), \mathbf{H}_0(\mathbf{j}))$ — известное решение задачи (1) при $\varsigma = 0$. Обозначим $\mathbf{e} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0(\mathbf{j})$, $\mathbf{h} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0(\mathbf{j})$. Тогда задача приобретает вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\mathbf{h}) = -i\omega\cdot\mathbf{e}, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{e}) = i\omega\cdot\mathbf{h}, \\ [\mathbf{n},\mathbf{e}]|_{\partial\Omega} = \varsigma[\mathbf{n},[\mathbf{n},\mathbf{h}]] + \varsigma\cdot\mathbf{F}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{F} = [\mathbf{n},[\mathbf{n},\mathbf{H}_0]]$. Решение задачи (2) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^e) + \omega^2\mathbf{\Pi}^e - i\omega\cdot\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^m, \\ \mathbf{h} &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^m) + \omega^2\mathbf{\Pi}^m + i\omega\cdot\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^e, \end{aligned} \tag{3}$$

где электрический и магнитный векторы Герца направлены по оси волновода:

$$\mathbf{\Pi}^e = \varphi(x,y,z)\cdot\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{\Pi}^m = \psi(x,y,z)\cdot\mathbf{e}_z. \tag{4}$$

Уравнения Максвелла сведутся к системе [1]

$$\Delta\varphi + \omega^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + \omega^2\psi = 0. \tag{5}$$

Введем помимо нормали к границе волновода касательный вектор $\tau = [\mathbf{e}_z,\mathbf{n}] = (-n_y, n_x, 0)$ и производные по касательной $\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\tau}} = (\operatorname{grad}\varphi, \boldsymbol{\tau})$, $\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\tau}} = (\operatorname{grad}\psi, \boldsymbol{\tau})$. Тогда

$$\begin{aligned} [\mathbf{n},\mathbf{e}] &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\boldsymbol{\tau}}\mathbf{e}_z - \left(\omega^2\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{\tau} + i\omega\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\mathbf{e}_z, \\ [\mathbf{n},[\mathbf{n},\mathbf{h}]] &= -\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\tau} - \left(\omega^2\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\mathbf{e}_z + i\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя эти выражения в граничные условия для $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ и приравнивая проекции на векторы $\mathbf{e}_z$ и $\boldsymbol{\tau}$ в полученном тождестве, найдем граничные условия для φ и ψ

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\boldsymbol{\tau}} + i\omega\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} + \varsigma\cdot\left(\omega^2\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = \varsigma\cdot(\mathbf{F},\mathbf{e}_z), \\ &-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \omega^2\varphi\right) + \varsigma\cdot\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\boldsymbol{\tau}} - i\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right) = \varsigma\cdot(\mathbf{F},\boldsymbol{\tau}). \end{aligned} \tag{7}$$

Будем рассматривать случай цилиндрического волновода кругового сечения радиуса R. В цилиндрической системе координат за счет условий периодичности по полярному углу θ функции $\varphi(z,\rho,\theta)$ и $\psi(z,\rho,\theta)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \varphi(z,\rho,\theta) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\varphi_m(z,\rho)\cdot e^{-im\theta}, \\ \psi(z,\rho,\theta) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\psi_m(z,\rho)\cdot e^{-im\theta}. \end{aligned} \tag{8}$$

Введем следующие обозначения: пусть $f_m^z(z,\rho)$ и $f_m^\tau(z,\rho)$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье по θ функций $(\mathbf{F},\mathbf{e}_z)$ и $(\mathbf{F},\boldsymbol{\tau})$ соответственно:

$$\begin{gathered} u = \begin{pmatrix}\varphi_m \\ \psi_m\end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix}-\varsigma & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix}0 & \varsigma \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \\ I_3 = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & \varsigma\end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix}f_m^\tau \\ f_m^z\end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{9}$$

С учетом этого задачу для $\varphi_m(z,\rho)$ и $\psi_m(z,\rho)$ можно записать в виде

$$\Delta_\rho u + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u + \left(\omega^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) u = 0, \qquad (10)$$

$$i\omega I_1 \frac{\partial}{\partial\rho} u - \frac{im}{\rho} I_2 \frac{\partial}{\partial z} u + I_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\right) u \Big|_{\rho=R} = \varsigma \cdot f. \qquad (11)$$

Предположим, как это было сделано в работе [3], что у задачи есть решение, допускающее Fr-преобразование

$$u(z,\rho) = \mathrm{Fr}\,(\hat{u}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \hat{u}(\gamma,\rho) \cdot e^{i\gamma\cdot z}\, d\gamma, \qquad (12)$$

где путь интегрирования C совпадает с вещественной осью γ-плоскости, если $\hat{u}$ не имеет на ней полюсов; если же $\hat{u}$ имеет вещественные полюсы, то отрицательные полюсы обходятся по верхней полуплоскости, а положительные — по нижней. Тогда его Fr-образ $\hat{u}(\gamma,\rho)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta_\rho \hat{u} + \left(\omega^2 - \gamma^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) \hat{u} = 0, \qquad (13)$$

$$i\omega I_1 \frac{d}{d\rho} \hat{u} + \frac{m\gamma}{\rho} I_2 \hat{u} + \left(\omega^2 - \gamma^2\right) I_3 \hat{u}\big|_{\rho=R} = \varsigma \cdot \hat{f}. \qquad (14)$$

Покажем, что эта задача может быть представлена при помощи компактных операторов в некотором гильбертовом пространстве $\mathbf{h}$. Будем считать, что $\varsigma \neq 0$. Формально подействуем на уравнение (13) оператором I_1, умножим на вектор-функцию $v(\rho) = (v_1(\rho)\ v_2(\rho))^{\mathrm{T}}$, $v_1, v_2 \in W_2^1(S)$, проинтегрируем по сечению и с учетом граничных условий получим следующее тождество:

$$-\int\limits_0^R \left(\frac{dv^T}{d\rho}\frac{d}{d\rho}(I_1\hat{u}) + \left(1 + \frac{m^2}{\rho^2}\right) v^T I_1 \hat{u}\right) \rho\, d\rho +$$
$$+ \int\limits_0^R v^T I_1 \hat{u} \rho\, d\rho + \left(\omega^2 - \gamma^2\right) \int\limits_0^R v^T I_1 \hat{u} \rho\, d\rho -$$
$$- \frac{i\varsigma R}{\omega}\, v^T \hat{f}\Big|_{\rho=R} + \frac{iR}{\omega}\left(\omega^2 - \gamma^2\right) \cdot \left(-\bar{v}_1\hat{u}_1 + \varsigma\bar{v}_2\hat{u}_2\right)\big|_{\rho=R} +$$
$$+ \frac{im\gamma}{\omega}\left(\varsigma\bar{v}_1\hat{u}_2 + \bar{v}_2\hat{u}_1\right)\big|_{\rho=R} = 0. \qquad (15)$$

Введем гильбертово пространство $\mathbf{h}$ как замыкание пространства векторных функций, компоненты которых принадлежат $C^\infty[0,R]$, по норме $\sqrt{[v,v]}$, где

$$[v,v] = \int\limits_0^R \left(\left|\frac{dv}{d\rho}\right|^2 + \left(1 + \frac{m^2}{\rho^2}\right) \cdot |v|^2\right) \rho\, d\rho. \qquad (16)$$

В этом гильбертовом пространстве скалярное произведение имеет вид

$$[u,v] = \int\limits_0^R \left(\frac{dv^T}{d\rho} \cdot \frac{du}{d\rho} + \left(1 + \frac{m^2}{\rho^2}\right) v^T u\right) \rho\, d\rho. \qquad (17)$$

Рассмотрим следующие билинейные формы:

$$a\left(\hat{u}, I_1^* v\right) = \int\limits_0^R v^T I_1 \hat{u} \rho\, d\rho = \int\limits_0^R \left(I_1^* v\right)^{\mathrm{T}} \hat{u} \rho\, d\rho,$$
$$c_1\left(\hat{u}, v\right) = \frac{im}{\omega}\left(\varsigma\bar{v}_1\hat{u}_2 + \bar{v}_2\hat{u}_1\right)\big|_{\rho=R}, \qquad (18)$$

$$c_2\left(\hat{u}, v\right) = \frac{i}{\omega} R\left(-\bar{v}_1\hat{u}_1 + \varsigma\bar{v}_2\hat{u}_2\right)\big|_{\rho=R},$$
$$g\left(\hat{f}, v\right) = -\frac{i\varsigma}{\omega} R\, v^{\mathrm{T}} \hat{f}\Big|_{\rho=R}. \qquad (19)$$

Оператор K будет компактным на $\mathbf{h}$, если для соответствующей ему билинейной формы $k(u,v) = [Ku, v]_{\mathbf{h}}$ при $u, v \in \mathbf{h}$ выполнено следующее условие: для любого числа $\varepsilon \in (0,1]$ существует такая вполне непрерывная билинейная форма k_ε (т. е. билинейная форма, соответствующая компактному оператору), что $|k(u,u)| \leqslant \varepsilon\|u\|_{\mathbf{h}}^2 + |k_\varepsilon(u,u)|$, $u \in \mathbf{h}$ [4].

При доказательстве теоремы вложения пространства $W_2^1(S)$ в $L_2(S)$ в работе [5] было показано, что $\forall\, u \in C^\infty(S) \subset W_2^1(S)$ справедливы неравенства

$$\int\limits_S |u|^2\, ds \leqslant \varepsilon \int\limits_S |\nabla u|^2\, ds + \sum_{n=1}^{M(\varepsilon)} \frac{1}{|\Pi_n|} \cdot \left|\int\limits_{\Pi_n} u\, ds\right|^2,$$

$$\int\limits_{\partial S} |u|^2\, dl \leqslant \varepsilon \int\limits_S |\nabla u|^2\, ds + C_\varepsilon \int\limits_S |u|^2\, ds, \qquad (20)$$

где прямоугольник $\Pi = \{x\colon\ 0 < x_i < l_i,\ \ i = 1,2\}$, $S \subset \Pi$ и Π_n — элементарные прямоугольники, на которые разбивается Π. Так как в данной задаче область S — круг радиуса R и для $\forall\, v(\rho)\colon\ v_1(\rho), v_2(\rho) \in C^\infty[0,R]$ компоненты функции $u = v(\rho) \cdot e^{im\theta}$ принадлежат $C^\infty(S)$, то с учетом определения $\mathbf{h}$

$$\int\limits_0^R |v(\rho)|^2 \rho\, d\rho \leqslant \varepsilon\|v\|_h^2 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{M(\varepsilon)} \frac{1}{|\Pi_n|} \left|\int\limits_{\Pi_n} v(\rho) \cdot e^{im\theta}\, ds\right|^2,$$

$$|v(R)|^2 \leqslant \varepsilon\|v\|_h^2 + C_\varepsilon \int\limits_0^R |v(\rho)|^2 \rho\, d\rho. \qquad (21)$$

Билинейная форма $h_\varepsilon(u,u) = \sum\limits_{n=1}^{M(\varepsilon)} \frac{1}{|\Pi_n|} \cdot \left|\int\limits_{\Pi_n} u\, ds\right|^2$ вполне непрерывна при $u_1, u_2 \in W_2^1(S)$ [5], поэтому билинейные формы a и g компактны на $\mathbf{h} \times \mathbf{h}$. Компактность c_1 и c_2 следует из того, что $c_1(u,v) = \frac{im}{\omega}\left(I_2^* v\right)^{\mathrm{T}} u\Big|_{\rho=R}$ и $c_2(u,v) = \frac{iR}{\omega}\left(I_3^* v\right)^{\mathrm{T}} u\Big|_{\rho=R}$ при $u, v \in \mathbf{h}$. Поэтому доказана

Теорема 1. *Пусть функция u является решением задачи возбуждения круглого импедансного волновода, записанной в форме* (10), (11). *Тогда задача* (13), (14) *для $\hat{u}$, где $u = \mathrm{Fr}(\hat{u})$, может быть представлена в операторном виде*

$$I_1(I - T(\gamma))\hat{u} = I_1\hat{u} - I_1A\hat{u} - \gamma C_1\hat{u} - \\ - \left(\omega^2 - \gamma^2\right)(I_1A + C_2)\hat{u} = G\hat{f} \tag{22}$$

в гильбертовом пространстве $\mathbf{h}$ *со скалярным произведением* (17), *где линейные компактные в* $\mathbf{h}$ *операторы A, C_1, C_2 и G определяются из соотношений*

$$a\left(\hat{u}, I_1^*v\right) = \left[A\hat{u}, I_1^*v\right], \quad c_1\left(\hat{u}, v\right) = \left[C_1\hat{u}, v\right], \\ c_2\left(\hat{u}, v\right) = \left[C_2\hat{u}, v\right], \quad g\left(\hat{f}, v\right) = \left[G\hat{f}, v\right]. \tag{23}$$

Покажем, что справедлива

Теорема 2. *Существует, и притом единственное, решение u задачи* (10), (11), *имеющее* Fr*-преобразование, если соответствующая однородная краевая задача для $\hat{u}$ решений не имеет. Это решение может быть представлено в виде*

$$u(z,\rho) = \sum_{n=1}^{N1}\int_{-\infty}^{0} e^{-i\bar{\bar{\gamma}}_n y}\bar{\bar{P}}_n(y,\rho)f(z-y,\rho)\,dy + \\ + \sum_{m=1}^{N2}\int_{0}^{\infty} e^{i\bar{\gamma}_m y}\bar{P}_m(y,\rho)f(z-y,\rho)\,dy + \tilde{\tilde{u}}(z,\rho), \tag{24}$$

где $\bar{\bar{P}}_n(y,\rho)$ и $\bar{P}_m(y,\rho)$ — некоторые операторы в $\mathbf{h}$, *$(-\bar{\bar{\gamma}}_n)$ и $\bar{\gamma}_m$ — отрицательные и положительные вещественные собственные значения соответственно, а функция $\tilde{\tilde{u}}$ такова, что ее компоненты принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть γ_n — собственные значения однородной краевой задачи для $\hat{u}$. Тогда рассматриваемая задача (13), (14) имеет единственное решение при $\gamma \neq \gamma_n$. Поэтому и решение задачи (10), (11), допускающее Fr-преобразование, единственно. Функция $v = R\hat{f}$, где $R = (I - T)^{-1}I_1^{-1}G$, является мероморфной функцией переменной γ с полюсами γ_n. Покажем, что функция $v = R\hat{f}$ стремится к нулю при $|\gamma| \to \infty$ на вещественной оси. Для этого задачу для $\hat{u}$ при $\varsigma \neq 0$ формально запишем в виде

$$L(\gamma)\hat{u} = \Big(I - \left(I_1 + \gamma^2(I_1A + C_2)\right)^{-1} \times \\ \times \left(I_1A + \omega^2(I_1A + C_2) + \gamma C_1\right)\Big)\hat{u} = \\ = \left(I_1 + \gamma^2(I_1A + C_2)\right)^{-1} G\hat{f}. \tag{25}$$

Для существования ограниченного $L^{-1}(\gamma)$ достаточно, чтобы

$$\Big\| \left(I_1 + \gamma^2(I_1A + C_2)\right)^{-1} \times \\ \times \left(I_1A + \omega^2(I_1A + C_2) + \gamma C_1\right)\Big\| < 1. \tag{26}$$

Можно показать, что оператор $\left(A + I_1^{-1}C_2\right)$ не имеет вещественных отрицательных точек спектра, и для любого компактного в $\mathbf{h}$ оператора K при $|\gamma| \to \infty$ на действительной оси $\left\|\left(I + \gamma^2\left(A + I_1^{-1}C_2\right)\right)^{-1}K\right\| \to 0$. Кроме того,

$$\lim_{|\gamma|\to\infty}\left\|\left(I + \gamma^2\left(A + I_1^{-1}C_2\right)\right)^{-1}\gamma \cdot I_1^{-1}C_1\right\| = 0. \tag{27}$$

Поэтому, так как операторы $A + \omega^2\left(A + I_1^{-1}C_2\right)$ и G компактные, то при $|\gamma| \to \infty$ на действительной оси

$$\lim_{|\gamma|\to\infty}\left\|L^{-1}(\gamma)\right\| \leqslant \lim_{|\gamma|\to\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big\|\left(I + \gamma^2\left(A + I_1^{-1}C_2\right)\right)^{-1} \times \\ \times \left(A + \omega^2\left(A + I_1^{-1}C_2\right) + \gamma \cdot I_1^{-1}C_1\right)\Big\|^n < 1, \tag{28}$$

$$\lim_{|\gamma|\to\infty}\|\hat{u}\| \leqslant \lim_{|\gamma|\to\infty}\left\|L^{-1}(\gamma)\right\| \times \\ \times \left\|\left(I + \gamma^2\left(A + I_1^{-1}C_2\right)\right)^{-1} I_1^{-1}G\right\| \cdot \left\|\hat{f}\right\| = 0. \tag{29}$$

Следовательно, число $N(\omega, m)$ вещественных $\gamma_n(\omega, m)$ конечно, так как в противном случае вещественные $\gamma_n(\omega, m)$ имели бы конечную точку сгущения, что невозможно. Это означает, что в выражении для функции v можно выделить главную часть [6], т.е. представить v в виде $v = \sum\limits_{n=1}^{N1}\bar{\bar{v}}_n + \sum\limits_{m=1}^{N2}\bar{v}_m + \tilde{\tilde{v}}$, где $N1$ — число отрицательных, а $N2$ — число неотрицательных вещественных полюсов. Обозначим неотрицательные вещественные полюсы как $\bar{\gamma}_m$, а отрицательные как $(-\bar{\bar{\gamma}}_n)$. Тогда

$$\bar{\bar{v}}_n(\gamma,\rho) = \frac{\bar{\bar{P}}_n^{(1)}\hat{f}}{\gamma + \bar{\bar{\gamma}}_n} + \cdots + \frac{\bar{\bar{P}}_n^{(M_n)}\hat{f}}{\left(\gamma + \bar{\bar{\gamma}}_n\right)^{M_n}}, \\ \bar{v}_m(\gamma,\rho) = \frac{\bar{P}_m^{(1)}\hat{f}}{\gamma - \bar{\gamma}_m} + \cdots + \frac{\bar{P}_m^{(M_m)}\hat{f}}{\left(\gamma - \bar{\gamma}_m\right)^{M_m}}. \tag{30}$$

Здесь все $\bar{\bar{P}}_n^{(k)}(\rho)\hat{f}(\gamma,\rho)$ и $\bar{P}_m^{(k)}(\rho)\hat{f}(\gamma,\rho)$ представляют собой некоторые суммы элементов вида $\left[I_1^{-1}G\hat{f}, z_i\right]_h y_j$, где $\{y_j\}, \{z_i\}$ являются каноническими системами собственных и присоединенных векторов оператора $T(\gamma)$ при $\gamma = -\bar{\bar{\gamma}}_n$ и $\gamma = \bar{\gamma}_m$. Остаток $\tilde{\tilde{v}} = R^{(N)}\hat{f}$ уже не имеет полюсов на вещественной оси. При больших $|\gamma|$ функция $\tilde{\tilde{v}}$ имеет такую же асимптотику, как и v, поэтому можно вычислить функцию $\tilde{\tilde{u}}(z,\rho) = \mathrm{Fr}\left(\tilde{\tilde{v}}\right)$, которая будет дважды дифференцируема по z. Докажем, что и функция $\tilde{u} = \sum\limits_{n=1}^{N1}\mathrm{Fr}\left(\bar{\bar{v}}_n\right) + \sum\limits_{m=1}^{N2}\mathrm{Fr}\left(\bar{v}_m\right)$ существует и является дважды дифференцируемой по z:

$$\mathrm{Fr}\left(\bar{\bar{v}}_n\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz'\left\{\left[\frac{1}{2\pi}\int_C d\gamma\frac{e^{i\gamma(z-z')}}{\gamma + \bar{\bar{\gamma}}_n}\right]\bar{\bar{P}}_n^{(1)}f\Big|_{z=z'} + \right.$$

$$+\cdots+\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_C d\gamma\frac{e^{i\gamma(z-z')}}{(\gamma+\bar{\bar{\gamma}}_n)^{M_n}}\right]\bar{\bar{P}}_n^{(M_n)}f\Big|_{z=z'}\Bigg\}. \quad (31)$$

Согласно лемме Жордана, при $z-z'\leqslant 0$ контур C можно замкнуть в нижней полуплоскости, и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C d\gamma\frac{e^{i\gamma(z-z')}}{\gamma+\bar{\bar{\gamma}}_n}=ie^{-i\bar{\bar{\gamma}}_n(z-z')},$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C d\gamma\frac{e^{i\gamma(z-z')}}{(\gamma+\bar{\bar{\gamma}}_n)^{M_n}}= \quad (32)$$
$$=\frac{i^{M_n}}{(M_n-1)!}\cdot(z-z')^{M_n-1}\cdot e^{-i\bar{\bar{\gamma}}_n(z-z')}.$$

Аналогично

$$\mathrm{Fr}\,(\bar{v}_m)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dz'\Bigg\{\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_C d\gamma\frac{e^{i\gamma(z-z')}}{\gamma-\bar{\gamma}_m}\right]\bar{P}_m^{(1)}f\Big|_{z=z'}+$$
$$+\cdots+\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_C d\gamma\frac{e^{i\gamma(z-z')}}{(\gamma-\bar{\gamma}_m)^{M_m}}\right]\bar{P}_m^{(M_m)f}\Big|_{z=z'}\Bigg\}. \quad (33)$$

Согласно лемме Жордана, при $z-z'\geqslant 0$ контур C можно замкнуть в верхней полуплоскости, и поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C d\gamma\frac{e^{i\gamma(z-z')}}{\gamma-\bar{\gamma}_m}=ie^{i\bar{\gamma}_m(z-z')},$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C d\gamma\frac{e^{i\gamma(z-z')}}{(\gamma-\bar{\gamma}_m)^{M_m}}= \quad (34)$$
$$=\frac{i^{M_m}}{(M_m-1)!}\cdot(z-z')^{M_m-1}\cdot e^{i\bar{\gamma}_m(z-z')}.$$

Пусть $y=z-z'$. Вводя операторы

$$\bar{\bar{P}}_n(y,\rho)=i\bar{\bar{P}}_n^{(1)}(\rho)+\cdots+\frac{i^{M_n}}{(M_n-1)!}y^{M_n-1}\bar{\bar{P}}_n^{(M_n)}(\rho),$$

$$\bar{P}_m(y,\rho)=i\bar{P}_m^{(1)}(\rho)+\cdots+\frac{i^{M_m}}{(M_m-1)!}y^{M_m-1}\bar{P}_m^{(M_m)}(\rho),$$

получим

$$\tilde{u}(z,\rho)=\sum_{n=1}^{N1}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-i\bar{\bar{\gamma}}_n y}\bar{\bar{P}}_n(y,\rho)f|_{z-y}dy+$$
$$+\sum_{m=1}^{N2}\int\limits_{0}^{\infty}e^{i\bar{\gamma}_m y}\bar{P}_m(y,\rho)f|_{z-y}dy.$$

Поэтому функция $u=\mathrm{Fr}(v)$ вполне определена и может быть продифференцирована два раза по z. Тогда

$$\left(\Delta_\rho+\frac{d^2}{dz^2}+\left(\omega^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\right)u=$$
$$=\mathrm{Fr}\left(\left(\Delta_\rho-\gamma^2+\left(\omega^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\right)v\right)=\mathrm{Fr}\left(\hat{f}\right)=f, \quad (35)$$

т. е. построенная функция u является решением исходной задачи.

Основной смысл доказанной теоремы состоит в том, что требование существования Fr-образа является условием, позволяющим выделить решение, являющееся суперпозицией волн, бегущих от источника и удовлетворяющее парциальным условиям излучения.

Литература

1. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1991.
2. *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электромагнитных системах с потерями. М., 1983.
3. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* // ЖВМ и МФ. 2003. **43**, № 4. С. 585.
4. *Stummel F.* Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. Berlin; Heidelberg; N. Y., 1969.
5. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
6. *Келдыш М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов. Гл. I. Избр. труды. Математика. М., 1985. С. 305–320.

Поступила в редакцию
06.10.04