УДК 517.9:533.9

ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ В НЕЯВНОЙ БЕЗЫЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ

Л. В. Бородачев

(*кафедра математики*)

E-mail: boroda@afrodita.phys.msu.su

Обсуждается методика построения устойчивого численного решения уравнений самосогласованного поля в дискретной модели Власова—Дарвина с неявной схемой расчета динамики заряженных частиц.

Введение

Как известно, широкий круг явлений плазмофизики, определяемых коллективными взаимодействиями частиц [1], носит нерелятивистский и безызлучательный характер, что позволяет при их теоретическом исследовании перейти к упрощенному полевому описанию, исключающему из рассмотрения свободные электромагнитные волны.

В этом классе приближений наиболее интересным представляется дарвинское (магнитоиндукционное) [2], которое, являясь по сути «незапаздывающим», описывает тем не менее ряд не свойственных «мгновенным» системам индукционных эффектов, связанных с законом Фарадея [3].

При этом, будучи беднее по возможностям максвелловского формализма, дарвинский труднее поддается численному анализу в рамках самосогласованного подхода [4], что во многом объясняет сравнительно немногочисленные публикации по безызлучательному моделированию плазмы (работы [5–7] представляются автору наиболее значимыми). Парадоксальность ситуации во многом обусловлена развитием в счетной области сильной паразитной неустойчивости при любой явной разностной аппроксимации динамических уравнений поля. В настоящее время эта актуальная проблема корректной численной интерпретации дарвинского приближения принципиально решена с помощью, так называемой, эллиптической переформулировки исходного полевого описания (в работе [5] она изложена, по-видимому, наилучшим образом).

Однако практически эта методика успешно реализована лишь при использовании в самосогласованном алгоритме традиционной явной схемы («с перешагиванием») численного интегрирования уравнений движения частиц [4]. Применение же неявных схем интегрирования (в частности, оптимизированной схемы из работы [8]) вносит, как будет показано ниже, определенную специфику в решение проблемы актуальной численной устойчивости безызлучательных моделей на пути упомянутой выше эллиптической редакции полевого описания (эффективность использования в этих целях неявной разностной аппроксимации исходных уравнений поля обсуждается в работе [9]).

1. Система уравнений и вопросы устойчивости

Дарвинское приближение полей формально можно получить из полного электромагнитного описания (система уравнений Максвелла), выполнив следующие операции.

Во-первых, применить к электрическому полю и току, фигурирующим в максвелловских уравнениях, известную теорему Гельмгольца о разложении произвольной векторной величины на продольную (потенциальную) и поперечную (вихревую) составляющие, определяемые условиями

$$\nabla \times \mathbf{a}_l = 0, \quad \nabla \mathbf{a}_t = 0, \quad \mathbf{a}_l + \mathbf{a}_t = \mathbf{a}.$$

Во-вторых, отбросить в законе Ампера поперечную составляющую тока смещения $\frac{1}{4\pi}\partial \mathbf{E}_t/\partial t$.

Тогда систему уравнений дарвинского приближения можно записать следующим образом:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \mathbf{E}_t = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E}_l = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}_l}{\partial t}, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

где в случае конечной совокупности частиц плотности заряда и тока, играющие роль источников самосогласованных полей, имеют выражения

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \sum_j q_j \mathbf{v}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) \end{aligned} \tag{4}$$

и тождественно удовлетворяют за счет сохранившегося в системе продольного тока смещения уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}_l = 0. \tag{5}$$

При этом кинетические уравнения Власова, описывающие эволюцию распределения частиц, как известно, можно заменить уравнениями движения самих частиц под действием силы Лоренца

$$\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} = \mathbf{v}_j, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} = \frac{q_j}{m_j}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left(\mathbf{v}_j \times \mathbf{B}\right)\right). \tag{6}$$

Здесь и ниже m_j, q_j, v_j — соответственно масса, заряд и скорость частицы с индексом j.

Легко видеть, что от точного полевого описания магнитоиндукционное фактически отличается лишь опущенной производной по времени от поперечного электрического поля, что, однако, приводит к весьма существенным для корректной численной интерпретации последствиям: оставаясь формально гиперболическими, дарвинские уравнения отвечают полям с мгновенным дальнодействием, т. е. соответствуют системам без запаздывания. (Доказательство этого неочевидного, на первый взгляд, утверждения можно найти в работе [5].)

Практическим следствием указанной неадекватности формы и содержания безызлучательного приближения является абсолютная неустойчивость «явных» полевых алгоритмов, обусловленная мгновенной взаимоиндукцией поперечных электрических и магнитных полей в расчетной области.

Теоретически этот эффект легко объяснить, если воспользоваться критерием устойчивости Куранта [10], который в нашем случае имеет вид

$$v_f \leqslant v_h = h/\tau,$$

где v_f — скорость распространения электромагнитных возмущений; h, τ — величины сеточных шагов, определяемые характерными пространственно-временными масштабами рассматриваемого процесса. Очевидно, что в условиях мгновенного дальнодействия сил $(v_f = \infty)$ требуемое отношение не может быть удовлетворено ни при каких реальных значениях h, τ. Иными словами, передача достоверной информации через пространственную ячейку с конечной скоростью по сути не возможна в системах без запаздывания.

Таким образом, численная неустойчивость явных дарвинских алгоритмов носит принципиальный характер и ее исключение связано с физически естественной эллиптической редакцией исходного полевого описания, отвечающей характеру безызлучательного приближения. Ниже предлагается (достаточно схематично) численная реализации этой идеи в условиях неявной разностной аппроксимации уравнений движения частиц [8].

2. Эллиптическая переформулировка

Вернемся к полученной системе полевых уравнений и перепишем уравнения (2) и (3), имеющие временные производные, отдельно для продольных и поперечных составляющих:

$$\nabla \times \mathbf{E}_t = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_t, \tag{8}$$

$$4\pi \mathbf{j}_l + \frac{\partial \mathbf{E}_l}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (8) уже является эллиптическим, поэтому в контексте рассматриваемой переформулировки нас будут интересовать уравнения (7) и (9). Последнее является следствием уравнения непрерывности заряда (5) и носит поверочный характер: его невязка, определяющая внутреннюю согласованность магнитоиндукционного алгоритма, должна равняться нулю (дивергентно-свободной функции в общем случае). При этом численное решение уравнения (9) подразумевает лишь необходимую корректировку текущего значения $\partial \mathbf{E}_l/\partial t$ или $\mathbf{j}_l$. Для большинства алгоритмов, использующих схему «с перешагиванием» (или ее модификации) при интегрировании уравнений движения частиц, указанная корректировка носит чисто технический характер и не вызывает проблем, поскольку текущие значения полей и токов уже известны и разнесены во времени на $\tau/2$, а уравнение (9) рассматривается на полуцелых (токовых) временных слоях. Ситуация резко меняется при использовании для численного расчета динамики частиц неявной схемы, определяющей фазовые координаты, а стало быть и величины $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, на одном временном слое. Теперь необходимость разностного представления $\partial \mathbf{E}_l/\partial t$ потребует экстраполяции текущих значений продольного электрического поля, провоцирующей неустойчивость того же типа, что и прямое разностное интегрирование уравнения (7), т. е. непосредственная корректировка численного решения уравнения непрерывности заряда (точнее его следствия) оказывается невозможной.

Таким образом, в этом случае проблема дискретизации безызлучательного формализма состоит в адекватной разностной аппроксимации не только уравнения (7), являющегося общим местом дарвинских алгоритмов, но и дополнительно уравнения (9). В рамках метода макрочастиц она может быть решена следующим образом.

Возьмем ротор от обеих частей уравнения (7) и воспользуемся известным преобразованием двойного векторного произведения:

$$\nabla\left(\nabla \mathbf{E}_t\right) - \Delta \mathbf{E}_t = -\frac{1}{c}\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right).$$

Продифференцировав далее по времени первое из уравнений (3), подставим его в полученное. Тогда с учетом указанного выше разложения Гельмгольца будем иметь

$$\Delta \mathbf{E}_t = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \mathbf{E}_l}{\partial t^2}. \tag{10}$$

Отметим, что разностное представление уравнения (10) потребует экстраполяции текущих значений $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}_l$ и, как следствие, развитие уже известной неустойчивости. Можно, однако, попытаться избежать этого, выразив члены в правой части уравнения с помощью величин, заданных в тот же момент времени, что и искомое поле $\mathbf{E}_t$.

Для этого распишем частную производную по времени от плотности тока (4), опираясь на уравнение движения заряда в электромагнитном поле (воспользуемся для наглядности простейшей модификацией метода макрочастиц [4]):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} &= \frac{d\mathbf{j}}{dt} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{j} = \\ &= \sum_j q_j \left\{ \frac{d\mathbf{v}_j}{dt}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) - \mathbf{v}_j(\mathbf{v}_j\nabla)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)\right\} = \\ &= \sum_j \frac{q_j^2}{m_j}\mathbf{E}(\mathbf{r}_j)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) + \\ &+ \sum_j \frac{q_j^2}{cm_j}(\mathbf{v}_j\times\mathbf{B}(\mathbf{r}_j))\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) - \\ &- \sum_j q_j\mathbf{v}_j(\mathbf{v}_j\nabla)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j).\end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что первый и второй члены справа представляют собой свертки электрического и магнитного полей соответственно с плотностями заряда и тока.

Далее представим в разностном виде $\partial^2\mathbf{E}_l/\partial t^2$ для момента времени t^n, полагая, что уравнению (9) численно удовлетворено. Воспользовавшись центральными разностями [11], получим

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbf{E}_l^{n+1}-\mathbf{E}_l^{n-1}}{2\tau} = -4\pi\mathbf{j}_l^n, \\ &\frac{\mathbf{E}_l^{n+1}-2\mathbf{E}_l^{n}+\mathbf{E}_l^{n-1}}{\tau^2} = -\frac{2}{\tau}\left(4\pi\mathbf{j}_l^n + \frac{\mathbf{E}_l^{n}-\mathbf{E}_l^{n-1}}{\tau}\right),\end{aligned} \tag{12}$$

где члены справа уже известны ($\mathbf{E}_l$ из решения уравнения (1), а $\mathbf{j}_l$ — из решения стандартной краевой задачи [9, Приложение]).

Обозначив $(\mathbf{E}_l^n-\mathbf{E}_l^{n-1})/\tau = \mathrm{D}^-\mathbf{E}_l^n/\mathrm{D}\tau$, подставим выражения (11) и (12) в разностный аналог уравнения (10). Имея в виду замечание выше о физическом смысле членов выражения (11), окончательно получим в текущий момент времени t^n

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{E}_t^n - \frac{4\pi}{c^2}\sum_\alpha \rho_\alpha^n\mathbf{E}_t^n &= \frac{4\pi}{c^2}\Bigg\{\sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E}_l^n + \\ &+ \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{cm_\alpha}(\mathbf{j}_\alpha^n\times\mathbf{B}^n) - \sum_\alpha(\mathbf{v}_\alpha\nabla)\mathbf{j}_\alpha^n - \\ &- \frac{2}{\tau}\left[\mathbf{j}_l^n + \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{D}^-\mathbf{E}_l^n}{\mathrm{D}\tau}\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь правая часть имеет смысл источника поперечного электрического поля, поэтому в компактном виде ее можно записать как $-4\pi c^{-2}\mathbf{G}^n(\mathbf{r})$. Формальное решение уравнения (13) допускает использование прямых методов, однако экономически это оправдано лишь в одномерной пространственной геометрии ($\mathbf{E}_l = \mathrm{E}_x$), где оно сводится к системе обычных скалярных уравнений [12].

Альтернативой алгебраического решения в многомерном случае является организация итерационного процесса. Представим его в форме, удобной для физической интерпретации. Для этого запишем текущее значение плотности макрочастиц сорта α (рассмотрим для простоты двухкомпонентную ионно-электронную плазму: $\alpha = i, e$) в виде $n_\alpha(\mathbf{r}) = n_0 + \delta n_\alpha(\mathbf{r})$, где δn — флуктуация плотности частиц около среднего значения (напомним, что по условию квазинейтральности $n_{0i} = n_{0e} = n_0$). Вводя ленгмюровскую частоту ω_{pe} [3], перепишем уравнение (13) следующим образом:

$$\begin{aligned}\left[\Delta - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2}\left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)\right]\mathbf{E}_t^{(\nu+1)n}(\mathbf{r}) &= \\ = -\frac{4\pi}{c^2}\left[\mathbf{G}^n(\mathbf{r}) - \mu^n(\mathbf{r})\mathbf{E}_t^{\nu n}\right].&\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $\mu(\mathbf{r}) = \sum\limits_\alpha \left(q_\alpha^2/n_\alpha\right)\delta n_\alpha(\mathbf{r})$, ν — номер итерации, уточняющей текущее значение $\mathbf{E}_t^n$. Отметим, что правая часть, имеющая сложную структуру, носит нелинейный характер и учитывает взаимозависящие флуктуации поперечных электрических полей и токов.

Физический смысл проведенной редакции полевого описания усматривается из сравнения уравнения (14) с уравнением для экранированного (дебаевского) потенциала [3]:

$$\left[\Delta - \frac{\omega_{pe}^2}{v_T^2}\left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)\right]\varphi = -4\pi\rho_s, \tag{15}$$

где ρ_s — нелинейный источник, обусловленный колебаниями плотности заряда около среднего значения. Тогда по аналогии с уравнением (15) полученное выше уравнение (14) описывает эффективную в масштабах скин-слоя $c\omega_{pe}^{-1}$ экранировку $\mathbf{E}_t$ токами, обратными по отношению к порождающим магнитное поле и связанное с ним поперечное электрическое. Иными словами, предложенный подход исключает паразитную взаимоиндукцию полей и токов, определяющую актуальную численную неустойчивость традиционного дарвинского формализма.

Наконец обсудим характер и степень влияния возможной невязки разностного решения уравнения (9) на внутреннюю согласованность дискретной модели. И здесь прежде всего отметим, что основная причина невязки кроется в независимом от полевых уравнений и приближенном (интерполяционном) характере операций численного расчета плотностей тока и заряда (а следовательно, и продольного электрического поля), используемых в методе макрочастиц [4]. При этом точность указанных расчетов определяется в конечном итоге плотностью и формой макрочастиц (последний параметр описывает гладкость распределения реальных частиц в модельной частице и тем самым порядок интерполяционных процедур). Очевидно, что при использовании достаточно большого числа достаточно «гладких» макрочастиц (обычные условия постановки современных компьютерных экспериментов) оцениваемая невязка должна быть величиной малой и знаконеопределенной, а эффект ее присутствия — незначительным и локальным.

Вместе с тем этот эффект можно дополнительно минимизировать, потребовав (по аналогии со схемой «с перешагиванием») тождественного удовлетворения дискретного аналога уравнения непрерывности заряда (точнее, его следствия) на полуцелых временных слоях. Действительно, обозначив через ψ невязку решения уравнения (9), записанного в разностном виде для момента времени $t^{n-1/2}$:

$$\frac{\mathbf{E}_l^n - \mathbf{E}_l^{n-1}}{\tau} + 2\pi \left(\mathbf{j}_l^n + \mathbf{j}_l^{n-1}\right) = \psi,$$

легко получить величину требуемой для этого поправки текущего значения плотности тока $\delta \mathbf{j}_l^n = \psi / 2\pi$.

Таким образом, имея в виду низкочастотный характер дарвинского приближения, уместно предположить, что при использовании в полевых уравнениях скорректированных значений плотности тока влияние рассматриваемой невязки окажется несущественным с позиций самосогласованной эволюции модельной системы.

Литература

1. *Власов А.А.* Теория многих частиц. М.; Л., 1950.
2. *Darwin C.G.* // Phil. Mag. 1920. **39.** P. 537.
3. *Франк-Каменецкий Д.А.* Лекции по физике плазмы. М., 1968.
4. *Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц. М., 1987.
5. *Нильсон К., Льюис Г.* // Управляемый термоядерный синтез. М., 1980. С. 395.
6. *Hewett D.W.* // Space Sc. Rev. 1985. **42**. P. 29.
7. *DiPeso G., Hewett D.W., Simonson G.F.* // J. Comp. Phys. 1994. **111**. P. 237.
8. *Бородачев Л.В.* // ЖВМ и МФ. 1991. **30**, № 6. С. 934.
9. *Бородачев Л.В.* // Матем. моделир. 2005. **17**, № 9. С. 53.
10. *Рихтмайер Р.Д.* Разностные методы решения краевых задач. М., 1960.
11. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1977.
12. *Бородачев Л.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1993. **34**, № 3. С. 87.

Поступила в редакцию
01.12.04