УДК 517.958:533.7

КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И АППРОКСИМАЦИОННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОБЪЕМНОЙ ВЯЗКОСТИ

Т. Г. Елизарова[*)], В. В. Серегин

(*кафедра математики*)

E-mail: seregin@afrodita.phys.msu.ru

Приведен вид КГД уравнений, полученных путем моментного осреднения модельного кинетического уравнения. На основе представления КГД уравнений в виде дифференциальных законов сохранения и выделения в них диссипативных слагаемых в форме Навье–Стокса получена оценочная формула для коэффициента объемной вязкости. Выведенная формула аналогична известному выражению для объемной вязкости, связанному с неравновесностью по вращательным степеням свободы.

Введение

Квазигазодинамические (КГД) уравнения первоначально были получены путем моментного осреднения модельного кинетического уравнения [1, 2]. В работе [2] КГД уравнения выписаны в виде локальной формы интегральных законов сохранения массы, импульса и полной энергии для моноатомного газа. Дополнительные по сравнению с навье-стоксовскими члены в КГД уравнениях представляют собой эффективные регуляризаторы, обеспечивающие устойчивость численного алгоритма [2, 3] и др.

В данной работе, следуя подходу описанному в [2], КГД уравнения представлены в виде локальных законов сохранения для немоноатомного газа, т. е. газа, обладающего внутренними степенями свободы. В этом случае выделение диссипативных слагаемых типа Навье–Стокса приводит к построению приближенной формулы для коэффициента объемной вязкости. Полученная таким образом формула соответствует данным, имеющимся в литературе.

1. Две формы записи КГД уравнений

Согласно работам [1, 2], квазигазодинамическую систему можно вывести из кинетического уравнения вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla) f^{(0)} = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\tau(\mathbf{v}\cdot\nabla) f^{(0)} + \frac{f^{(0)} - f}{\tau}, \quad (1)$$

где

$$f^{(0)} = \rho\left(\frac{1}{2\pi RT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2RT}\right). \quad (2)$$

Здесь $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ — плотность, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — газодинамическая скорость, $p = p(\mathbf{x}, t)$ — давление, $T = T(\mathbf{x}, t)$ — температура, $f^{(0)}$ — локально-равновесное распределение Максвелла (2) с макропараметрами $\rho, \mathbf{u}, T$, определяемыми с помощью функции $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, T)$. Параметр $\tau = \tau(\rho, T)$ в правой части (2) интерпретируется как характерное время релаксации молекул к локально-равновесному распределению и совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега молекул в газе. Макропараметры, входящие в формулу для вычисления τ, также считаются квадратурами от f.

Проинтегрировав уравнение (1) с весами $1, \mathbf{v}, \mathbf{v}^2/2$, придем к системе

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = \operatorname{div}\tau\left[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p\right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p = \\ = \operatorname{div}\tau\left[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + (\nabla\otimes p\mathbf{u}) + (\nabla\otimes p\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right] + \\ + \nabla\tau[\operatorname{div}(p\mathbf{u})], \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon\right)\right] + \operatorname{div}\left[\rho\mathbf{u}\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon\right) + p\mathbf{u}\right] = \\ = \operatorname{div}\tau\left\{\operatorname{div}\left[\rho\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon+2\frac{p}{\rho}\right)\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\right] + \right. \\ \left. + \nabla\left[p\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)\right]\right\}, \quad (5)$$

где $\otimes$ — операция прямого тензорного произведения.

Следуя идеям работы [2], представим эту систему в виде законов сохранения массы, импульса и энергии, записанных в дифференциальной форме для подвижного материального объема $V(t)$, перемещающегося вдоль интегральных кривых векторного поля $\mathbf{j}_m(t)/\rho$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}_m = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m\otimes\mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div}\Pi, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon\right)\right] + \operatorname{div}\left[\mathbf{j}_m\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon\right)\right] = \operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{div}\mathbf{q}. \quad (8)$$

[*)] Институт математического моделирования РАН.

2. Уравнение неразрывности и вектор плотности потока массы

Сравнивая первые уравнения (3) и (6), найдем вектор плотности потока массы

$$\mathbf{j}_m = \rho\mathbf{u} - \tau\left(\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p\right). \tag{9}$$

3. Уравнение импульса и тензор вязких напряжений

Сопоставим уравнения импульса (4) и (7) и найдем вид тензора Π. Для этого вычислим

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}_m\otimes\mathbf{u}) = \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) - \operatorname{div}(\tau\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\otimes\mathbf{u}) - \operatorname{div}(\tau\nabla p\otimes\mathbf{u}).$$

Тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m\otimes\mathbf{u}) + \nabla p = -\operatorname{div}(\tau\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\otimes\mathbf{u}) - \operatorname{div}(\tau\nabla p\otimes\mathbf{u}) + \operatorname{div}\left\{\tau\left[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + (\nabla\otimes p\mathbf{u}) + (\nabla\otimes p\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right]\right\} + \operatorname{div}\left\{I\tau\operatorname{div}(p\mathbf{u})\right\}, \tag{10}$$

где использовано тождество

$$\operatorname{div}\left\{I\tau\operatorname{div}(p\mathbf{u})\right\} = \nabla\left\{\tau\operatorname{div}(p\mathbf{u})\right\}.$$

Из (10) и (7) следует, что тензор вязких напряжений Π имеет вид

$$\Pi = -\tau\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\otimes\mathbf{u} - \tau(\nabla p\otimes\mathbf{u}) + \tau\left[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + (\nabla\otimes p\mathbf{u}) + (\nabla\otimes p\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right] + I\tau\operatorname{div}(p\mathbf{u}).$$

Представим этот тензор в виде суммы тензора вязких напряжений Навье–Стокса

$$\Pi_{\mathrm{NS}} = \mu[(\nabla\otimes\mathbf{u}) + (\nabla\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}} - (2/3)I\operatorname{div}\mathbf{u}] + \zeta I\operatorname{div}\mathbf{u} \tag{11}$$

и некоторой добавки. Здесь μ — коэффициент динамической вязкости, ζ — коэффициент второй, или объемной, вязкости.

Воспользуемся тождествами

$$(\nabla\otimes p\mathbf{u}) = p(\nabla\otimes\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\otimes\nabla p),$$

$$(\nabla\otimes p\mathbf{u})^{\mathrm{T}} = p(\nabla\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}} + (\nabla p\otimes\mathbf{u}),$$

$$\operatorname{div}(p\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)p + p\operatorname{div}\mathbf{u},$$

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\otimes\mathbf{u} + \rho\mathbf{u}\otimes[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}].$$

Тогда Π примет вид

$$\Pi = \tau p\left[(\nabla\otimes\mathbf{u}) + (\nabla\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right] + \tau\mathbf{u}\otimes[\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p] + \tau I\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)p + p\operatorname{div}\mathbf{u}\right].$$

Преобразуем полученное выражение, прибавляя и вычитая величины $\tau I\gamma p\operatorname{div}\mathbf{u}$ и $(2/3)\tau pI\operatorname{div}\mathbf{u}$:

$$\Pi = \tau p\left[(\nabla\otimes\mathbf{u}) + (\nabla\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}} - (2/3)I\operatorname{div}\mathbf{u}\right] + \tau\mathbf{u}\otimes[\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p] + \tau I\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)p + \gamma p\operatorname{div}\mathbf{u}\right] + \tau Ip\operatorname{div}\mathbf{u} - \tau I\gamma p\operatorname{div}\mathbf{u} + (2/3)\tau pI\operatorname{div}\mathbf{u},$$

или, сгруппировав слагаемые,

$$\Pi = \tau p\left[(\nabla\otimes\mathbf{u}) + (\nabla\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}} - (2/3)I\operatorname{div}\mathbf{u}\right] + \tau pI(5/3-\gamma)\operatorname{div}\mathbf{u} + \tau\mathbf{u}\otimes[\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p] + \tau I\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)p + \gamma p\operatorname{div}\mathbf{u}\right]. \tag{12}$$

Сравнивая выражение (12) с видом тензора Навье–Стокса (11), увидим что

$$\mu = \tau p, \quad \zeta = \mu\left(\frac{5}{3} - \gamma\right). \tag{13}$$

Из первого соотношения сразу следует, что τ имеет смысл максвелловского времени релаксации [6]. Из полученной формулы для коэффициента объемной (второй) вязкости следует, что этот коэффициент неотрицателен и связан с наличием внутренних степеней свободы молекулы, что соответствует теоретическим представлениям, изложенным в частности, в работах [4, 5].

Таким образом, тензор вязких напряжений в КГД системе уравнений может быть записан в виде

$$\Pi = \Pi_{\mathrm{NS}} + \tau\mathbf{u}\otimes[\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p] + \tau I\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)p + \gamma p\operatorname{div}\mathbf{u}\right], \tag{14}$$

где Π_{NS} имеет вид (11).

4. Уравнение полной энергии и вектор теплового потока

Рассмотрим третью пару уравнений (5), (8) из которых с помощью достаточно громоздких тензорных преобразований определим вид векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{q}$. Для этого запишем (5) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon\right)\right] + \operatorname{div}\left[\mathbf{j}_m\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right] = -\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{w}\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right] + \operatorname{div}\tau\left\{\operatorname{div}\left[\rho\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + 2\frac{p}{\rho}\right)\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\right] + \nabla\left[p\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right]\right\},$$

а (8) перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon\right)\right] + \operatorname{div}\left[\mathbf{j}_m\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right] = \operatorname{div}\left(\mathbf{j}_m\frac{p}{\rho}\right)\operatorname{div} + \mathbf{A} - \operatorname{div}\mathbf{q}.$$

Сравнивая последние два выражения, найдем

$$\mathbf{A}-\mathbf{q}=-\mathbf{j}_m\frac{p}{\rho}-[\tau\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})+\nabla p]\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)+$$
$$+\tau\operatorname{div}\left[\rho\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon+2\frac{p}{\rho}\right)\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\right]+$$
$$+\tau p\nabla\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)+\tau\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)\nabla p.$$

Приводя подобные члены и используя тождества тензорного анализа, полученное выражение можно переписать в виде

$$\mathbf{A}-\mathbf{q}=$$
$$=-\mathbf{j}_m\frac{p}{\rho}+\tau p\left[(\nabla\otimes\mathbf{u})+(\nabla\otimes\mathbf{u})-(2/3)I\operatorname{div}\mathbf{u}\right]\mathbf{u}+$$
$$+\tau\mathbf{u}\left(\mathbf{u}\cdot[\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p]\right)+\tau\mathbf{u}\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)p+\gamma p\operatorname{div}\mathbf{u}\right]+$$
$$+\tau p\mathbf{u}\,(5/3-\gamma)\operatorname{div}\mathbf{u}+\tau p\nabla\left[\frac{p}{\rho}+\varepsilon\right]+$$
$$+\tau\rho\mathbf{u}\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\varepsilon+p(\mathbf{u}\cdot\nabla)\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]+$$
$$+\tau\frac{p}{\rho}\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho-\tau\rho\mathbf{u}p\frac{1}{\rho^2}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho.$$

Из полученного выражения можно выделить тензор Π в виде (12):

$$\mathbf{A}-\mathbf{q}=\Pi\mathbf{u}-\mathbf{j}_m\frac{p}{\rho}+\tau p\nabla\left[\frac{p}{\rho}+\varepsilon\right]+$$
$$+\tau\rho\mathbf{u}\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\varepsilon+p(\mathbf{u}\cdot\nabla)\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

В теории Навье–Стокса [4]

$$\mathbf{A}_{\mathrm{NS}}=\Pi_{\mathrm{NS}}\mathbf{u}-p\mathbf{u}$$

представляет собой работу поверхностных сил давления и внутреннего вязкого трения в единицу времени. По аналогии положим

$$\mathbf{A}=\Pi\mathbf{u}-p\mathbf{j}_m/\rho.$$

Остальные слагаемые обозначим через

$$\mathbf{q}=-\tau p\nabla\left[\frac{p}{\rho}+\varepsilon\right]-\tau\rho\mathbf{u}\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\varepsilon+p(\mathbf{u}\cdot\nabla)\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Выделим в тепловом потоке $\mathbf{q}$ часть, связанную с потоком Навье–Стокса:

$$\mathbf{q}_{\mathrm{NS}}=-\varkappa\nabla T.$$

Примем в качестве уравнения состояния — уравнение состояния идеального газа

$$p=\rho RT,\quad \varepsilon=\frac{RT}{\gamma-1},$$

тогда

$$\mathbf{q}=-\tau p\frac{\gamma R}{\gamma-1}\nabla T-\tau\rho\mathbf{u}\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\varepsilon+p(\mathbf{u}\cdot\nabla)\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Сопоставляя формулы для $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}_{\mathrm{NS}}$, получим, что коэффициент теплопроводности в КГД модели определяется как

$$\varkappa=\tau p\frac{\gamma R}{\gamma-1},$$

и выражение для теплового потока в КГД уравнениях примет вид

$$\mathbf{q}=\mathbf{q}_{\mathrm{NS}}-\tau\rho\mathbf{u}\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\varepsilon+p(\mathbf{u}\cdot\nabla)\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].\qquad(15)$$

Таким образом, полученная на основе кинетического уравнения КГД система вида (3)–(5) представлена в виде законов сохранения (6)–(8), где векторы плотности потока массы, теплового потока и тензор вязких напряжений представляются в виде слагаемых вида Навье–Стокса, и добавки с коэффициентом τ и имеют вид (9), (14) и (15). В работе [2] было показано, что добавки к слагаемым Навье–Стокса в тензоре вязких напряжений Π, векторе плотности потока массы $\mathbf{j_m}$ и тепловом потоке $\mathbf{q}$ в стационарном случае малы и имеют порядок $o(\tau^2)$.

5. Формулы для диссипативных коэффициентов и их обобщения

На основании кинетического вывода КГД уравнений диссипативные коэффициенты получаются в упрощенной форме

$$\mu=\tau p,\quad \zeta=\mu\left(\frac{5}{3}-\gamma\right),\quad \varkappa=\tau p\frac{\gamma R}{\gamma-1}.$$

Заметим, что именно в таком виде коэффициенты вязкости μ и теплопроводности æ получаются при выводе системы уравнений Навье–Стокса методами Чепмена–Энскога из уравнения Бхатнагара, Гросса, Крука (БГК).

Введем число Прандтля $\mathrm{Pr}\neq 1$ и запишем коэффициент теплопроводности в виде

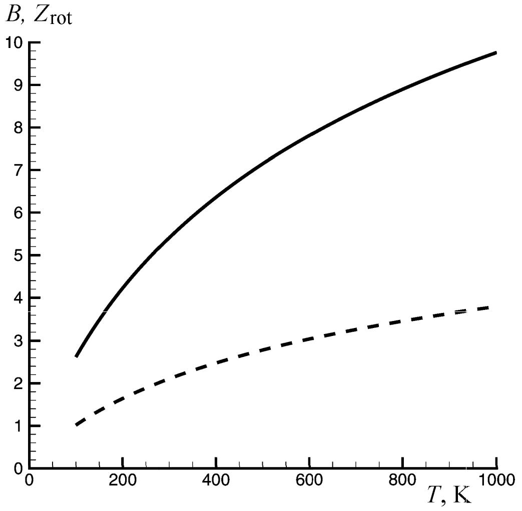
$$\varkappa=\mu\frac{\gamma R}{\gamma-1}\frac{1}{Pr}.$$

В работе [2] релаксационный параметр КГД модели предложено вычислять как

$$\tau=\frac{\mu}{\tau\,\mathrm{Sc}},$$

где Sc — число Шмидта, величина которого для газов близка к единице [6].

Формула для коэффициента объемной вязкости (13) отражает основные свойства величины ζ, а именно, так как в газах $\gamma\leqslant 5/3$, то ζ равна нулю для газов без внутренних степеней свободы (одноатомных газов) и положительна для газов, имеющих внутренние степени свободы [4–6]. При этом величина коэффициента второй вязкости не связывается с конкретными видами внутренних степеней свободы и определялся только величиной γ.



Коэффициенты B (пунктир) и Z_{rot} (сплошная линия)

Выражение для коэффициента второй вязкости, зависящей от вращательных степеней свободы, предложено в работе [5] в виде

$$\zeta = \frac{pR}{c_V}\gamma_{\text{rot}}\tau_{\text{rot}}, \qquad (16)$$

где c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме, γ_{rot} — доли внутренней энергии, содержащейся во вращательных степенях свободы, τ_{rot} — время релаксации вращательных степеней свободы.

Можно показать, что выражение (16) может быть представлено в виде

$$\zeta = \mu B\left(\frac{5}{3} - \gamma\right),$$

где

$$B = (\gamma - 1)A\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{8}}Z_{\text{rot}}.$$

Здесь Z_{rot} — коэффициент обмена энергий между вращательными и поступательными степенями свободы. Выражения для Z_{rot} приведены, например, в книгах [5, 6]. Для азота

$$Z_{\text{rot}} = Z^{\infty}/[1+(\pi^{3/2}/2)(T^*/T)^{1/2}+(\pi+\pi^2/4)(T^*/T)],$$

где $Z^{\infty} = 23$, $T^* = 91.5$ K. Коэффициент A вычисляется из соотношения между средней длиной свободного пробега и вязкостью газа согласно формулам Чепмена или Берда [6] в виде

$$\lambda = A\mu\sqrt{RT}/p,$$

где

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{или} \quad A = \frac{2(7-2\omega)(5-2\omega)}{15\sqrt{2\pi}}$$

— формулы Чепмена и Берда соответственно. Здесь ω — показатель степени в законе вязкости $\mu \sim T^{\omega}$. На рисунке приведены зависимости B (пунктир) и Z_{rot} (сплошная линия) в зависимости от температуры для азота. Видно, что коэффициент B изменяется от 1 до 4.

Литература

1. *Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н.* Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений. Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М., 1986. С. 261–278.
2. *Шеретов Ю.В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь, 2000.
3. *Елизарова Т.Г., Соколова М.Е.* Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2004. №1. С. 10 (Moscow University Phys. Bull. 2004. N 1. P. 12).
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М., 1986.
5. *Жданов В.М., Алиевский М.Я.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М., 1989.
6. *Bird G.A.* Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Oxford, 1994.

Поступила в редакцию
29.12.04