УДК 517.958

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ С ИМПЕДАНСНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. П. Моденов, С. А. Иванов

(*кафедра математики*)

Построена и математически обоснована схема неполного метода Галеркина, предназначенная для исследования распространения аксиально-симметричных электромагнитных волн в цилиндрической области с граничными условиями 3-го рода с малым по модулю комплексным импедансом.

Введение

При расчете базовых элементов электродинамических многофункциональных систем сверхбыстрой обработки информации, использующих ОИС СВЧ, КВЧ и оптического диапазона частот, достаточно эффективна так называемая импедансная модель. Эта модель основана на применении эквивалентных граничных условий. К ним относятся импедансные условия Щукина–Леонтовича, двухсторонние импедансные условия, импедансные анизотропные граничные условия, граничные условия Вайнштейна и др. [1–3].

Цель данной работы — сформулировать и математически обосновать алгоритм решения уравнения Гельмгольца, аналогичный описанным в работах [4–7], для цилиндрической области на примере решения задачи дифракции осесимметричных поперечно-электрических и поперечно-магнитных волн круглого волновода с поверхностным импедансом на конечном участке длины волновода.

Постановка задачи

Математическая постановка задачи заключается в решении уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+k^2U=0, \quad k=\frac{\omega}{c}, \tag{1}$$

в цилиндрической области $\Omega=\{(r,z)\colon\ 0<r<R,\ -\infty<z<+\infty\}$ (зависимость от времени полагается $\exp(-j\omega t)$). Это решение должно быть непрерывным, ограниченным и удовлетворять:

1*а*) граничным условиям Дирихле (А) или Неймана (Б) при $r=R$ на полубесконечных участках:

$$\begin{aligned}
&(\text{А}) \quad U|_{r=R,\,z<0}=U|_{r=R,\,z>l}=0,\\
&(\text{Б}) \quad \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R,\,z<0}=\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R,\,z>l}=0;
\end{aligned} \tag{2}$$

1*б*) граничным условиям третьего рода на конечном участке:

$$\begin{aligned}
&(\text{А}) \quad \left.U+\alpha\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R,\,0<z<l}=0, \quad \alpha=\alpha(z),\\
&(\text{Б}) \quad \left.\frac{\partial U}{\partial r}+hU\right|_{r=R,\,0<z<l}=0, \quad h=h(z),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha(z)$ и $h(z)$ — заданные комплексные параметры или в общем случае комплекснозначные функции координаты z;

2) условиям сопряжения, выражающим непрерывность потока энергии на границах нерегулярного участка (в сечениях $z=0$ и $z=l$):

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\int_0^R rU^*\frac{\partial U}{\partial z}dr\bigg|_{z=-0}=\operatorname{Im}\int_0^R rU^*\frac{\partial U}{\partial z}dr\bigg|_{z=+0},\\
&\operatorname{Im}\int_0^R rU^*\frac{\partial U}{\partial z}dr\bigg|_{z=l-0}=\operatorname{Im}\int_0^R rU^*\frac{\partial U}{\partial z}dr\bigg|_{z=l+0}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что из данных условий следует выполнение условий Мейкснера;

3) условиям на бесконечности

$$U(r,z)=\begin{cases}
A\exp(j\gamma_{n0}z)\varphi_{n0}(r)+\\
\quad+\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n\exp(-j\gamma_n z)\varphi_n(r), & z<0,\\
B\exp(-j\gamma_{m0}(z-l))\varphi_{m0}(r)+\\
\quad+\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n\exp(j\gamma_n(z-l))\varphi_n(r), & z>l,
\end{cases} \tag{5}$$

где $0\leqslant r\leqslant R$,

$$\gamma_n=\sqrt{k^2-\mu_n^2}, \tag{6}$$

A и B — известные амплитуды падающих нормальных волн с номерами соответственно n_0 и m_0, R_n и T_n — искомые коэффициенты отражения и прохождения нормальных волн, $\{\varphi_n(r),\mu_n\}$ — система собственных функций и собственных значений задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя нулевого порядка:

$$(\text{А}) \quad \begin{cases}
\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d\varphi_n}{dr}\right)+\mu_n^2\varphi_n=0,\\
|\varphi_n(r)|<\infty,\\
\varphi_n(R)=0,
\end{cases}$$

$$\text{(Б)}\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d\varphi_n}{dr}\right)+\mu_n^2\varphi_n=0,\\ |\varphi_n(r)|<\infty,\\ \dfrac{d}{dr}\varphi_n(R)=0. \end{cases} \tag{7}$$

В дальнейшем будем также использовать другое представление для поля U при $z<0$ и $z>l$:

$$U(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n(z)\varphi_n(r). \tag{8}$$

Существование и единственность решения задачи

Вначале заметим, что из (5), (8) следуют парциальные условия излучения вида

$$\begin{gathered} S_n'(z)+j\gamma_nS_n(z)=2j\gamma_nA\delta_{n,n0}\exp(j\gamma_nz),\quad z<0,\\ S_n'(z)-j\gamma_nS_n(z)=-2j\gamma_nB\delta_{n,m0}\exp(-j\gamma_n(z-l)),\\ z>l. \end{gathered} \tag{9}$$

Применяя вторую формулу Грина в цилиндрической области Ω для точного решения задачи (1)–(8) и функции, комплексно сопряженной с ним, получим энергетические соотношения

$$\begin{aligned} \text{(А)}\quad &\operatorname{Im}k^2\int_\Omega r|U|^2\,dr\,dz+R\int_0^l\operatorname{Im}\alpha\left|\frac{\partial U}{\partial r}\right|^2\Bigg|_{r=R}dz+\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}\gamma_n\left|S_n(0)-\delta_{n,n0}\frac{\gamma_nA}{\operatorname{Re}\gamma_n}\right|^2\|\varphi_n\|^2+\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}\gamma_n\left|S_n(l)-\delta_{n,m0}\frac{\gamma_nB}{\operatorname{Re}\gamma_n}\right|^2\|\varphi_n\|^2=\\ &=\operatorname{Re}\gamma_{n0}|\gamma_{n0}A|^2\|\varphi_{n0}\|^2+\operatorname{Re}\gamma_{m0}|\gamma_{m0}B|^2\|\varphi_{m0}\|^2,\\ \text{(Б)}\quad &\operatorname{Im}k^2\int_\Omega r|U|^2\,dr\,dz-R\int_0^l\operatorname{Im}h|U|^2\big|_{r=R}\,dz+\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}\gamma_n\left|S_n(0)-\delta_{n,n0}\frac{\gamma_nA}{Re\gamma_n}\right|^2\|\varphi_n\|^2+\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}\gamma_n\left|S_n(l)-\delta_{n,m0}\frac{\gamma_nB}{Re\gamma_n}\right|^2\|\varphi_n\|^2=\\ &=\operatorname{Re}\gamma_{n0}|\gamma_{n0}A|^2\|\varphi_{n0}\|^2+\operatorname{Re}\gamma_{m0}|\gamma_{m0}B|^2\|\varphi_{m0}\|^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда получаем, что при $\operatorname{Im}\alpha>0$ $(\operatorname{Im}h<0)$ решение задачи (1)–(8) существует и единственно.

Приближенное решение задачи

Построим приближенное решение $U^N(r,z)$ задачи (1)–(8) таким образом, чтобы энергетическое соотношение, которому оно удовлетворяет, совпадало с энергетическим соотношением (10) точного решения. Представим $U^N(r,z)$ в виде конечного ряда:

$$U^N(r,z)=\sum_{n=1}^{N}C_n(z)\varphi_n(r), \tag{11}$$

где $\{\varphi_n(r)\}$ — полная на отрезке $[0,R]$ система собственных функций соответствующей задачи (7). Потребуем, чтобы для приближенного решения U^N выполнялись условия непрерывности потока энергии (4) в сечениях $z=0$ и $z=l$ и приведенные выше парциальные условия излучения (9), которые запишем в виде

$$\begin{gathered} C_n'(z)+j\gamma_nC_n(z)=2j\gamma_nA\delta_{n,n0}\exp(j\gamma_nz),\quad z<0,\\ C_n'(z)-j\gamma_nC_n(z)=-2j\gamma_nB\delta_{n,m0}\exp(-j\gamma_n(z-l)),\\ z>l. \end{gathered} \tag{12}$$

Применяя вторую формулу Грина для приближенного решения U^N и функции, комплексно сопряженной с ним, и учитывая, что функции φ_n ортогональны с весом r на отрезке $[0,R]$, получим

$$\begin{aligned} &-\operatorname{Im}\int_\Omega rU^{N*}\Delta U^N\,dr\,dz+R\operatorname{Im}\int_0^l U^{N*}\frac{\partial U^N}{\partial r}\Bigg|_{r=R}dz+\\ &+\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\left|C_n(0)-\delta_{n,n0}\frac{\gamma_nA}{\operatorname{Re}\gamma_n}\right|^2\|\varphi_n\|^2+\\ &+\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\left|C_n(l)-\delta_{n,m0}\frac{\gamma_nB}{\operatorname{Re}\gamma_n}\right|^2\|\varphi_n\|^2=\\ &=\operatorname{Re}\gamma_{n0}|\gamma_{n0}A|^2\|\varphi_{n0}\|^2+\operatorname{Re}\gamma_{m0}|\gamma_{m0}B|^2\|\varphi_{m0}\|^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Определим, при каких дополнительных условиях, наложенных на функцию U^N, формула (13) сведется к (10). Пусть

$$\int_0^R r\left(\Delta U^N+k^2U^N\right)\varphi_n(r)\,dr=f_n(z),\quad z\in[0,l], \tag{14}$$

где $f_n(z)$ — неизвестные пока функции. Подставляя (14) в (13), найдем, что искомые функции должны удовлетворять следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \text{(А)}\quad &\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{N}\int_0^l C_n^*(z)f_n(z)\,dz-\\ &-R\operatorname{Im}\int_0^l U^{N*}\frac{\partial U^N}{\partial r}\Bigg|_{r=R}dz=\\ &=R\operatorname{Im}\int_0^l\alpha^*\left|\frac{\partial U^N}{\partial r}\right|^2\Bigg|_{r=R}dz, \end{aligned}$$

$$
\text{(Б)} \quad \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{N} \int_0^l C_n^*(z) f_n(z)\, dz - \\
- R \operatorname{Im} \int_0^l U^{N*} \frac{\partial U^N}{\partial r}\bigg|_{r=R} dz = \\
= R \operatorname{Im} \int_0^l h \left|U^N\right|^2 \bigg|_{r=R} dz.
$$

Преобразуя последнее выражение, получаем, что искомые функции равны:

$$
\begin{aligned}
&\text{(А)} \quad f_n(z) = -R\varphi_n'(r) \left(U^N + \alpha \frac{\partial U^N}{\partial r} \right)\bigg|_{r=R}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z \in [0, l], \\
&\text{(Б)} \quad f_n(z) = R\varphi_n(r) \left(\frac{\partial U^N}{\partial r} + hU^N \right)\bigg|_{r=R}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z \in [0, l].
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Таким образом, приближенное решение задачи (1)–(8), построенное согласно (5), (11), (12), (14), (15), существует и единственно. Рассматривая функцию $\delta^N = U - U^N$ и сводя соответствующую ей задачу к аналогичному энергетическому соотношению, можно показать сходимость в L_2 приближенного решения к точному при $N \to \infty$, как это сделано в работе [5].

Для нахождения коэффициентов отражения и прохождения нормальных волн R_n и T_n при известных амплитудах падающих нормальных волн A и B требуется решить краевую задачу с граничными условиями (12) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, получаемой из (14)–(15) относительно функций $C_n(z)$. После чего по найденным коэффициентам $C_n(0)$ и $C_n(l)$ определяются искомые коэффициенты R_n и T_n.

Заключение

В настоящей работе решена краевая задача для уравнения Гельмгольца в цилиндрической области с импедансными (в общем случае несамосопряженными) граничными условиями. Доказано существование и единственность решения этой задачи. Изложен алгоритм построения приближенного решения и доказана сходимость приближенного решения к точному. Построенное приближенное решение удовлетворяет условию непрерывности потока энергии и условию Мейкснера в особых точках. Результаты данной работы могут найти применение в задачах волноводной электродинамики с импедансными граничными условиями при математическом моделировании на основе импедансной модели.

Литература

1. *Pelozi G., Ufimtsev P.Ya.* // IEEE Trans. AP. 1996. **38**, N 1. P. 31.
2. *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М., 1983.
3. *Кравченко В.Ф., Казаров А.Б.* // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1997. № 11. С. 59.
4. *Свешников А.Г., Ильинский А.С.* // Вычислительные методы и программирование. 1969. № 13. С. 27.
5. *Конюшенко В.В., Моденов В.П.* // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптического диапазона. 2002. № 1. С. 21.
6. *Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 1963. **3**, № 1. С. 170.
7. *Моденов В.П.* // Радиотехника и электроника. 2005. **50**, № 2. С. 1.

Поступила в редакцию
29.12.04