УДК 530.1

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МОДЕЛЬНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ

Д. С. Голиков

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

E-mail: golikov@qs.phys.msu.ru

Построена асимптотика собственных значений гамильтониана системы взаимодействующих бозонов. Показано соответствие результатов следствиям вариационного принципа Боголюбова.

Рассмотрим систему взаимодействующих бозонов, которые могут находиться в одном из G различных состояний. Пространством состояний этой системы является пространство фока $\mathcal{F}_G$, порождаемое вакуумным вектором $|0\rangle$ и операторами рождения $\hat{b}_i^+$ и уничтожения $\hat{b}_i$, подчиняющимися стандартным коммутационным соотношениям статистики Бозе:

$$[\hat{b}_i, \hat{b}^+{}_j] = \delta_{ij}, \quad [\hat{b}_i, \hat{b}_j] = [\hat{b}_i^+, \hat{b}_j^+] = 0.$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, индексы принимают целые значения от единицы до G. Вакуумный вектор имеет единичную норму.

Гамильтониан определим следующим образом:

$$\widehat{H} = -\frac{T}{G}\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+\sum_{j=1}^{G}\hat{b}_j + \frac{J}{G}\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+\hat{b}_i^+\sum_{j=1}^{G}\hat{b}_j\hat{b}_j - \mu\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+\hat{b}_i,$$

где T, J — произвольные действительные параметры, μ — химический потенциал. При $G=2$ гамильтониан является частным случаем гамильтониана двухуровневой модели, введенного в работе [1].

Воспользуемся методом, впервые предложенном в [2]. Решение стационарного уравнения Шрёдингера

$$\widehat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

будем искать, следуя работам [3–5], в виде $|\Psi\rangle = \hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}|\Phi\rangle$. Через $\hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}$ обозначен оператор uv-преобразования Боголюбова [6]:

$$\hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}^{-1}\hat{b}_i^+\hat{\mathrm{U}}_{u,v,w} = u\hat{b}_i^+ + v\hat{b}_i + w,$$

$$\hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}^{-1}\hat{b}_i\hat{\mathrm{U}}_{u,v,w} = u^*\hat{b}_i + v^*\hat{b}_i^+ + w^*.$$

Для коэффициентов преобразования u, v выполняется условие каноничности

$$u^*u - v^*v = 1. \tag{1}$$

Уравнение Шрёдингера в таком случае примет вид

$$\widehat{\mathcal{H}}|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle. \tag{2}$$

Преобразованный гамильтониан

$$\widehat{\mathcal{H}} \equiv \hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}^{-1}\widehat{H}\hat{\mathrm{U}}_{u,v,w} =$$

$$= -\frac{T}{G}\sum_{i=1}^{G}\left(u\hat{b}_i^+ + v\hat{b}_i + w\right)\sum_{j=1}^{G}\left(u^*\hat{b}_i + v^*\hat{b}_i^+ + w^*\right) +$$

$$+\frac{J}{G}\sum_{i=1}^{G}\left(u\hat{b}_i^+ + v\hat{b}_i + w\right)^2\sum_{j=1}^{G}\left(u^*\hat{b}_i + v^*\hat{b}_i^+ + w^*\right)^2 -$$

$$-\mu\sum_{i=1}^{G}\left(u\hat{b}_i^+ + v\hat{b}_i + w\right)\left(u^*\hat{b}_i + v^*\hat{b}_i^+ + w^*\right)$$

зависит от операторов

$$\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+, \quad \sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i, \quad \sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+\hat{b}_i^+, \quad \sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i\hat{b}_i, \quad \sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+\hat{b}_i.$$

Целесообразно перейти к новым операторам

$$\widehat{B}^+ = \tfrac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+, \quad \widehat{B} = \tfrac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i,$$

$$\widehat{C}^+ = \tfrac{1}{\sqrt{2G}}\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+\hat{b}_i^+, \quad \widehat{C} = \tfrac{1}{\sqrt{2G}}\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i\hat{b}_i, \quad \widehat{\mathcal{N}} = \sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i^+\hat{b}_i.$$

Все они порядка единицы по степени G. Например,

$$\langle 0|\sum_{i=1}^{G}\hat{b}_i\sum_{j=1}^{G}\hat{b}_j^+|0\rangle = G,$$

отсюда $\sum\limits_{i=1}^{G}\hat{b}^+{}_i \sim \sqrt{G}$ и $\widehat{B}^+ \sim 1$.

Выпишем коммутационные соотношения и их асимптотику при $G \to \infty$ для введенных операторов:

$$[\widehat{B}, \widehat{B}^+] = 1, \qquad [\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{B}^+] = \widehat{B}^+,$$

$$[\widehat{C}, \widehat{C}^+] = \frac{2}{G}\widehat{\mathcal{N}} + 1 \to 1, \quad [\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{C}^+] = 2\widehat{C}^+,$$

$$[\widehat{B}, \widehat{C}] = 0, \qquad [\widehat{B}, \widehat{C}^+] = \sqrt{\frac{2}{G}}\widehat{B}^+ \to 0.$$

Гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}$ через новые операторы запишется в виде

$$\widehat{\mathcal{H}} = G\Big(-T|w|^2 + J\left(|w|^4 + |u|^2|v|^2 + w^{*2}uv + \right.$$

$$\left. + w^2u^*v^*\right) - \mu\left(|w|^2 + |v|^2\right)\Big) +$$

$$+\sqrt{G}\Big(\Big\{-(T+\mu)\left(wu^* + w^*v\right) +$$

$$+ 2J\left(wv\left(w^{*2} + u^*v^*\right) + w^*u^*\left(w^2 + uv\right)\right)\Big\}\widehat{B} +$$

$$+\left\{J\left(v^2\left(w^{*2}+u^*v^*\right)+u^{*2}\left(w^2+uv\right)\right)-\mu u^* v\right\}\sqrt{2}\widehat{C}+ \\ +\mathrm{h.c.}\Big)+\widehat{\mathcal{H}}_1+\frac{4J}{G}|u|^2|v|^2\widehat{\mathcal{N}}^2,$$

где h.c. обозначает слагаемое, эрмитово сопряженное стоящему перед ним,

$$\widehat{\mathcal{H}}_1=\left(-\frac{T}{2}+2J|w|^2\right)\left(|u|^2+|v|^2\right)\widehat{B}^+\widehat{B}+ \\ +\frac{J}{2}\left(|u|^4+|v|^4\right)\widehat{C}^+\widehat{C}+uv^*\left(-T+4J|w|^2\right)\widehat{B}^+\widehat{B}^++ \\ +2Ju^2v^{*2}\widehat{C}^+\widehat{C}^++2\sqrt{2}J\left(wuu^{*2}+w^*v^*v^2\right)\widehat{B}^+\widehat{C}+ \\ +2\sqrt{2}Juv^*\left(wv^*+w^*u\right)\widehat{B}^+\widehat{C}^+-\frac{T}{2}|v|^2+ \\ +J\left(|v|^4+2|w|^2|v|^2\right)+\mathrm{h.c.}+\Big(-\mu\left(|u|^2+|v|^2\right)+ \\ +2J\left(uv\left(u^*v^*+w^{*2}\right)+u^*v^*\left(uv+w^2\right)\right)\Big)\widehat{\mathcal{N}}.$$

Оператор числа частиц $\widehat{\mathcal{N}}$ коммутирует с $\widehat{\mathcal{H}}$, следовательно, они обладают общей системой собственных векторов, а N-частичные подпространства $\mathcal{F}_G$ являются его инвариантными подпространствами.

Выберем коэффициенты преобразования Боголюбова таким образом, чтобы коэффициент при $\sqrt{G}$ в $\widehat{\mathcal{H}}$ обращался в нуль. Кроме того, будем считать их действительными. Тогда имеет место система уравнений

$$\begin{cases} w\left(T+\mu-\dfrac{2uv}{u^2+v^2}\mu\right)=0, \\ J\left(w^2+uv\right)=\dfrac{uv}{u^2+v^2}\mu. \end{cases} \tag{3}$$

Эти уравнения вместе с условием (1) образуют полную систему для нахождения коэффициентов преобразования u, v, w.

Собственные значения уравнения Шрёдингера (2) можно искать по теории возмущений в виде

$$E=GE_0+E_1+O\left(\frac{1}{G}\right).$$

Тогда для главной асимптотики собственных значений гамильтониана [7] получим выражение

$$E_0=-T|w|^2+J\left(|w|^4+|u|^2|v|^2+w^{*2}uv+w^2u^*v^*\right)- \\ -\mu\left(|w|^2+|v|^2\right),$$

где u, v, w удовлетворяют уравнениям (1), (3).

Для нахождения первой поправки решение уравнения Шрёдингера будем искать в виде вектора

$$|\Phi_0\rangle=\Phi\left(\widehat{B}^+,\widehat{C}^+\right)|0\rangle, \tag{4}$$

где функция $\Phi(x,y)$ не зависит от G.

Оператор числа частиц можно представить в виде

$$\widehat{\mathcal{N}}=\widehat{B}^+\widehat{B}+\widehat{C}^+\widehat{C}+\hat{A}.$$

Как несложно установить, оператор $\hat{A}$ удовлетворяет соотношениям

$$[\hat{A},\widehat{B}^+]=0,\quad [\hat{A},\widehat{C}^+]=0$$

при $G\to\infty$, а также обладает очевидными свойствами

$$\hat{A}=\hat{A}^+,\quad \hat{A}|0\rangle=0.$$

Поэтому для векторов вида (4) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{G\to\infty}A|\Phi_0\rangle=0.$$

Таким образом, на подпространстве, образованном векторами вида (4), выполняется равенство

$$\widehat{\mathcal{N}}=\widehat{B}^+\widehat{B}+\widehat{C}^+\widehat{C}.$$

Используя это соотношение, $\widehat{\mathcal{H}}_1$ можно переписать в виде

$$\widehat{\mathcal{H}}_1=\Bigg(2Juv\left(u^*v^*+w^{*2}\right)- \\ -\left(\frac{T+\mu}{2}-2J|w|^2\right)\left(|u|^2+|v|^2\right)\Bigg)\widehat{B}^+\widehat{B}+ \\ +\Bigg(-\frac{\mu}{2}\left(|u|^2+|v|^2\right)+\frac{J}{2}\left(|u|^4+|v|^4\right)+ \\ +2Juv\left(u^*v^*+w^{*2}\right)\Bigg)\widehat{C}^+\widehat{C}+ \\ +uv^*\left(-T+4J|w|^2\right)\widehat{B}^+\widehat{B}^++2Ju^2v^{*2}\widehat{C}^+\widehat{C}^++ \\ +2\sqrt{2}J\left(wuu^{*2}+w^*v^*v^2\right)\widehat{B}^+\widehat{C}+ \\ +2\sqrt{2}Juv^*\left(wv^*+w^*u\right)\widehat{B}^+\widehat{C}^+-\frac{T}{2}|v|^2+ \\ +J\left(|v|^4+2|w|^2|v|^2\right)+\mathrm{h.c.}$$

Последнее выражение удобно представить в более компактной записи:

$$\widehat{\mathcal{H}}_1=\frac{1}{2}a^+La^++a^+Ka+\frac{1}{2}aL^*a+h, \tag{5}$$

где $L=L^{\mathrm{T}}$, $K=K^+$ — матрицы 2×2, $a=(\widehat{B},\widehat{C})$ — столбец, если стоит справа от матрицы, строка — если слева, $h=-T|v|^2+2J\left(|v|^4+2|w|^2|v|^2\right)$. Элементы матриц, очевидно, будут равны

$$L_{11}=-2uv^*\left(T-4J|w|^2\right),$$

$$L_{12}=L_{21}=2\sqrt{2}Juv^*\left(wv^*+w^*u\right),$$

$$L_{22}=4Ju^2v^{*2},$$

$$K_{11}=2Juv\left(u^*v^*+w^{*2}\right)+\mathrm{h.c.}- \\ -\left(T+\mu-4J|w|^2\right)\left(|u|^2+|v|^2\right),$$

$$K_{12}=K_{21}^*=2\sqrt{2}J\left(wuu^{*2}+w^*v^*v^2\right),$$

$$K_{22}=4Juv\left(u^*v^*+w^{*2}\right)+\mathrm{h.c.}+ \\ +2J\left(|u|^4+|v|^4\right)-2\mu\left(|u|^2+|v|^2\right).$$

Далее рассмотрим частный случай и собственный вектор состояния будем искать в виде

$$|\Phi_1\rangle = e^{\frac{1}{2}a^+Ma^+}|0\rangle,$$

где M — симметричная 2×2-матрица. При $G\to\infty$ имеют место соотношения

$$a_i|\Phi_1\rangle = (Ma^+)_i\,|\Phi_1\rangle,$$
$$a_ja_i|\Phi_1\rangle = M_{ij}|\Phi_1\rangle + (Ma^+)_i\,(Ma^+)_j\,|\Phi_1\rangle.$$

Поэтому результат действия предпоследнего слагаемого в (5) на $|\Phi_1\rangle$ можно представить как

$$aL^*a|\Phi_1\rangle = \left(a^+ML^*Ma^+ + \operatorname{Tr}L^*M\right)|\Phi_1\rangle.$$

Таким образом,

$$\widehat{\mathcal{H}}_1|\Phi_1\rangle = \left(\frac{1}{2}a^+La^+ + a^+KMa^+ + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}a^+ML^*Ma^+ + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(L^*M) + h\right)|\Phi_1\rangle. \tag{6}$$

Для любой 2×2-матрицы D имеет место равенство $a^+Da^+ = a^+D^{\mathrm{T}}a^+$. Следовательно, второе слагаемое в скобках можно записать в виде $a^+\left(KM + MK^{\mathrm{T}}\right)a^+/2$.

Из (6) следует, что вектор вида $|\Phi_1\rangle$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера с точностью до членов порядка $O\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\right)$ в случае, когда матрица M удовлетворяет стационарному уравнению Риккати

$$L + KM + MK^{\mathrm{T}} + ML^*M = 0.$$

Кроме того, собственное значение, отвечающее вектору $|\Phi_1\rangle$, равно

$$E_1 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}L^*M + h.$$

Рассмотрим нестационарное уравнение Риккати,

$$i\dot{M} = A + BM + MB^{\mathrm{T}} + MA^*M.$$

Его решение будем искать в виде

$$M = FG^{-1},$$

тогда F и G определяются из системы уравнений в вариациях [7, 8]:

$$\begin{cases} i\dot{F} = LG + KF, \\ -i\dot{G} = K^*G + L^*F. \end{cases} \tag{7}$$

Решением стационарного уравнения будут любые F и G, удовлетворяющие

$$FG^{-1} = \mathrm{const}\,.$$

Такими, например, являются матрицы со столбцами

$$F^{(k)} = e^{i\beta_k t}F_0^{(k)}, \quad G^{(k)} = e^{i\beta_k t}G_0^{(k)},$$

где $k=1,2$ — номер столбца, $F_0^{(k)}$, $G_0^{(k)}$ — произвольные ненулевые столбцы. Подстановка $F^{(k)}$, $G^{(k)}$ в систему (7) приводит к однородной системе уравнений

$$\begin{pmatrix} K+\boldsymbol{\beta}_k & L \\ L^* & K^*-\boldsymbol{\beta}_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_0^{(k)} \\ G_0^{(k)} \end{pmatrix} = 0,$$

где

$$\boldsymbol{\beta}_k = \begin{pmatrix} \beta_k & 0 \\ 0 & \beta_k \end{pmatrix}.$$

Она имеет нетривиальное решение, если

$$\det\begin{pmatrix} K+\boldsymbol{\beta}_k & L \\ L^* & K^*-\boldsymbol{\beta}_k \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда определяются возможные значения β_k.

Установим теперь соответствие выводов с результатами, полученными вариационным принципом Боголюбова. В работе [9] рассматривался вектор состояния вида

$$|\Psi\rangle = \exp\left\{\alpha\sum_{i=1}^{G}b_i^+ + \beta\sum_{i=1}^{G}b_i^+b_i^+\right\}|0\rangle.$$

Заметим, что преобразование Боголюбова удобно выбрать так, чтобы $|\Psi\rangle = \hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}|0\rangle$. Очевидно, что

$$b_i|\Psi\rangle = \left(\alpha + 2\beta b_i^+\right)|\Psi\rangle = \left(\alpha + 2\beta b_i^+\right)\hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}|0\rangle =$$
$$= \hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}\left(\alpha + 2\beta\left(ub_i^+ + vb_i + w\right)\right)|0\rangle =$$
$$= \hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}\left(\alpha + 2\beta\left(ub_i^+ + w\right)\right)|0\rangle.$$

С другой стороны,

$$b_i\hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}|0\rangle = \hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}\left(u^*b_i + v^*b_i^+ + w^*\right)|0\rangle =$$
$$= \hat{\mathrm{U}}_{u,v,w}\left(v^*b_i^+ + w^*\right)|0\rangle.$$

Поэтому, сравнивая последние выражения, имеем

$$\alpha = w^* - 2\beta w, \quad \beta = \frac{v^*}{2u}.$$

Вместе с условием (1) получим, что замена

$$w \to \gamma \equiv \frac{\alpha}{1-2\beta}, \quad u^2 \to \frac{1}{1-4\beta^2}, \quad v^2 \to \frac{4\beta^2}{1-4\beta^2}$$

приводит энергию E_0, уравнения (3) к виду, полученному вариационным принципом Боголюбова. Поэтому система имеет те же решения, что и в [9].

Таким образом, исследован гамильтониан, являющийся бозонным аналогом гамильтониана с четырехфермионным взаимодействием. Построено асимптотическое решение уравнения Шрёдингера. Найдены энергетические уровни системы, следуя методам построения асимптотик Маслова, Шведова. Результаты совпадают с выводами, полученными применением вариационного принципа Боголюбова к данной задаче.

Автор глубоко признателен В. П. Маслову и О. Ю. Шведову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Белов В.В., Маслов В.П., Шведов О.Ю.* // Матем. заметки. 1993. **53**, №5. С. 14.
2. *Маслов В.П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М., 1977.
3. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* // ДАН. 1998. **361**, №4. С. 453.
4. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* // Матем. заметки. 1999. **65**, №1. С. 84.
5. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* // Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2000. **228**. С. 246.
6. *Боголюбов Н.Н.* // Вестн. АН СССР. 1958. **28**, №4. С. 25.
7. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М., 2000.
8. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* // ТМФ. 1995. **104**, №3. С. 479.
9. *Голиков Д.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2005. №3. С. 17.

Поступила в редакцию
21.01.05