УДК 531.4+550.34+551.243

УРАВНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

С. А. Арсеньев, В. Н. Николаевский, Н. К. Шелковников

(*кафедра физики моря и вод суши*)

Получены нелинейные уравнения, описывающие распространение упругих волн в движущихся пористых средах, насыщенных текущей жидкостью или газом.

Рассмотрим упругие волны, распространяющиеся внутри Земли в пористых и трещиноватых породах, в особенности вблизи ее поверхности в осадочных слоях четвертичного возраста. Осадочные слои имеют сложное строение, так как состоят из трех фаз: пористая твердая матрица содержит защемленные газ и жидкость, обычно воздух и воду. В нефтяных пластах наряду с воздухом и водой в матрице содержатся углеводородные газы и нефть. Впервые распространение упругих волн в пористых средах изучалось в работах [1–5]. Однако при этом рассматривалось лишь линейное приближение, без учета молекулярной релаксации и среднего фильтрационного течения, которое может взаимодействовать с упругими волнами. Цель настоящей работы — снять ненужные ограничения и получить наиболее полные уравнения в самом общем случае.

Будем исходить из баланса масс смеси двух фаз — твердой деформируемой матрицы и флюида (газа или жидкости) [3–5]

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-m)\rho_1 + \frac{\partial}{\partial x_i}(1-m)\rho_1 u_i = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}m\rho_2 + \frac{\partial}{\partial x_i}m\rho_2 w_i = 0, \qquad (2)$$

где m — пористость, ρ_1, u_i и ρ_2, w_i — плотность и скорость движения твердой и флюидной фаз соответственно. Полный баланс импульса для твердой и флюидной фаз не содержит силы взаимодействия, которая делает уравнения сохранения импульса для каждой фазы недивергентными. Он имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\{(1-m)\rho_1 u_i + m\rho_2 w_i\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i}\{(1-m)\rho_1 u_i u_j + m\rho_2 w_i w_j\} = \\ = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \{(1-m)\rho_1 + m\rho_2\}g_i, \qquad (3)$$

где g_i — ускорение силы тяжести, T_{ij} — полные напряжения, приложенные к произвольному сечению

$$T_{ij} = (1-m)\sigma_{ij} - mp\delta_{ij}, \qquad (4)$$

σ_{ij} — напряжения, действующие в твердой матрице и p — поровое давление.

Для того чтобы учесть баланс импульса для флюидной фазы, рассмотрим уравнение Жуковского [3]

$$\rho_2\frac{D_2 w_i}{D_2 t} = -\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\mu}{a}m(1-m)(w_i - u_i) + \rho_2 g_i, \qquad (5)$$

в котором $D_2/D_2t = \partial/\partial t + w_j\partial/\partial x_j$ — оператор Эйлера для флюидной фазы, $a = k(1-m)$, k — проницаемость среды, μ — вязкость флюида, причем $k = \mu m^2/r$, где r — фильтрационное сопротивление среды. Уравнение Жуковского (5) является, вообще говоря, уравнением баланса сил, учитывающим силу инерции, т. е. представляет собой обобщенный второй закон Ньютона. Из него и уравнения (2) можно получить и баланс импульса для флюидной фазы. Для этого необходимо подсчитать скорость изменения импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t}m\rho_2 w_i = \rho_2 m\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_i\frac{\partial}{\partial t}\rho_2 m. \qquad (6)$$

Второй член в правой части (6) можно найти из уравнения неразрывности (2)

$$\frac{\partial}{\partial t}m\rho_2 = -\frac{\partial}{\partial x_i}(m\rho_2 w_i),$$

$$w_i\frac{\partial}{\partial t}m\rho_2 = -w_i\frac{\partial}{\partial x_j}m\rho_2 w_j,$$

А первый член в правой части (6) — из уравнения Жуковского (5)

$$m\rho_2\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\rho_2 m w_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - m\frac{\partial p}{\partial x_i} + R_i + \rho_2 m g_i,$$

где $R = -r(w_i - u_i)$ — сила сопротивления. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}m\rho_2 w_i = -\frac{\partial}{\partial x_j}m\rho_2 w_i w_j - m\delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j} + R_i + \rho_2 m g_i.$$

Отсюда следует закон сохранения импульса для флюидной фазы:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_2 w_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(m\rho_2 w_i w_j) = -\frac{\partial(mp)}{\partial x_i} + \Psi_i + \rho_2 m g_i, \qquad (7)$$

где сила взаимодействия

$$\Psi_i = p\frac{\partial m}{\partial x_i} + R_i. \qquad (8)$$

Уравнение баланса импульса для твердой фазы получим, записав (3) в виде

$$(1-m)\rho_1\frac{\partial u_i}{\partial t} + m\rho_2\frac{\partial w_i}{\partial t} + u_i\frac{\partial}{\partial t}[(1-m)\rho_1] + \\ + w_i\frac{\partial m\rho_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j}[T_{ij} - \rho_1(1-m)u_i u_j - m\rho_2 w_i w_j] + \\ + [\rho_1(1-m) + \rho_2 m]g_i$$

и вычитая это уравнение из (5). В результате найдем

$$\rho_1(1-m)\frac{\partial u_i}{\partial t} - \rho_2(1-m)\frac{\partial w_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}^e}{\partial x_j} + \\ + w_i\frac{D_2}{D_2 t}(m_2\rho_2) + \rho_1(1-m)u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + m\rho_2 w_i\frac{\partial w_j}{\partial x_j} + \\ + (1-m)\left[\rho_i u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho_2 w_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right] - \\ - \frac{\mu}{a}m(1-m)(w_i-u_i) - (1-m)(\rho_1-\rho_2)g_i + \\ + u_i\frac{D_1}{D_1 t}[\rho_1(1-m)] = 0. \qquad (9)$$

Здесь $D_1/D_1 t = \partial/\partial t + u_j\partial/\partial x_j$ — оператор Эйлера для твердой фазы и

$$\sigma_{ij}^e = (1-m)(\sigma_{ij} + \delta_{ij}p) = T_{ij} + p\delta_{ij} \qquad (10)$$

— эффективные напряжения, впервые введенные в работах [3, 6].

Будем изучать упругие волны, которые представим в виде отклонений от основного состояния, обозначенного индексом ноль. Волновые возмущения обозначим угловыми скобками и запишем

$$m = m_0 + \langle m\rangle, \qquad u_i = u_i^0 + \langle u_i\rangle, \\ w_i = w_i^0 + \langle w_i\rangle, \qquad p = p_0 + \langle p\rangle, \qquad (11) \\ T_{ij} = T_{ij}^0 + \langle T_{ij}\rangle, \quad a = a_0 + \langle a\rangle.$$

Считаем, что отклонения от основного состояния, связанные с упругими волнами, малы и поэтому $\langle a\rangle \ll a_0$, $\langle m\rangle \ll m_0$, $\langle u_i\rangle \ll u_i^0$, $\langle w_i\rangle \ll w_i^0$, ...

Рассмотрим уравнение состояния для флюидной фазы:

$$\rho_2 = \rho_2^0\left[1 + \alpha_2(p-p_0) - \alpha_2 A\frac{d}{dt}(\rho_2 - \rho_2^0)\right]. \qquad (12)$$

Здесь $\alpha_2 \ll 1$ — объемная сжимаемость, связанная с модулем Юнга $E = 1/\alpha_2$, и A — релаксационная вязкость флюида. Третий член в правой части (12) описывает явление молекулярной релаксации флюида, т. е. адаптацию его молекул к быстрым колебаниям объема в упругой волне с необратимыми потерями энергии [7]. Молекулярная релаксация существенна для ряда задач, так как вызывает дисперсию упругих волн и дополнительное затухание. По этим причинам имеет смысл сохранять ее при выводе общих уравнений. Уравнение состояния (12) позволяет исключить плотность из уравнения неразрывности (2). Учитывая, что невозмущенное состояние среды в отсутствие волн является однородным ($m_0 = \mathrm{const}$, p_0 постоянно во времени, но изменяется в пространстве, $u_i^0 = \mathrm{const}$), получим уравнение

$$\frac{D_2^0\langle m\rangle}{D_2^0 t} + m_0\frac{\partial\langle w_i\rangle}{\partial x_i} + \alpha_2 m_0\frac{D_2^0\langle p\rangle}{D_2^0 t} - \\ - \alpha_2 A m_0\frac{D_2^0}{D_2^0 t}\left(\frac{d\langle\rho_2\rangle}{dt}\right) = 0. \qquad (13)$$

Здесь $D_2^0/D_2^0 t = \partial/\partial t + w_j^0\partial/\partial x_j$ — оператор Эйлера для флюида, кроме того учтено, что дважды повторяющиеся индексы, по которым ведется суммирование, можно обозначать как угодно, т. е. $w_i^0(\partial/\partial x_i) = w_j^0(\partial/\partial x_j) = w_k^0(\partial/\partial x_k) = \ldots$.

Уравнение неразрывности для твердой фазы (1) с учетом уравнения состояния

$$\rho_1 = \rho_1^0\left[1 - \frac{\alpha_1}{3}(\vartheta - \vartheta_0)\right] \qquad (14)$$

(здесь $\vartheta = \sigma_{ij}\delta_{ij} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ — первый вариант тензора истинных напряжений и α_1 — коэффициент объемного сжатия твердой фазы) имеет вид

$$\alpha_1\rho_1^0\frac{\partial}{\partial t}[(1-m)(p-p_0)] - \rho_1^0\left[1 + \frac{\alpha_1\vartheta_0^0}{3(1-m_0)}\right]\frac{\partial m}{\partial t} - \\ - \frac{\rho_1^0\alpha_1}{3}\frac{\partial\vartheta^e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}[(1-m)\rho_1 u_i] = 0, \qquad (15)$$

где $\vartheta^e = \sigma_{ij}^e\delta_{ij} = \sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e + \sigma_{33}^e$ — первый инвариант тензора эффективных напряжений. Из (10) следует связь

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\sigma_{ij}^e}{(1-m)},$$

которая при свертке $i = j$ дает формулу

$$\vartheta = -3p + \frac{\vartheta^e}{1-m}. \qquad (16)$$

Величиной $\alpha_1\vartheta_0^e/[3(1-m_0)]$ в (15) можно пренебречь из-за ее малости. Например, в водоносных геологических пластах $\alpha_1 \approx 5\cdot 10^{-6}$ атм$^{-1}$, $(\vartheta_0^e)_{\max} \approx 5\cdot 10^{-3}$ атм и $\alpha_1\vartheta_0^e \approx 10^{-8} \ll 1$. Подставляя в (15) соотношения (11), получим для твердой фазы уравнение неразрывности

$$\frac{D_1^0\langle m\rangle}{D_1^0 t} + \frac{\alpha_1}{3}\frac{D_1^0\langle\vartheta\rangle}{D_1^0 t} - \alpha_1(1-m_0)\frac{D_1^0\langle p\rangle}{D_1^0 t} - \\ - (1-m_0)\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_i} = 0, \qquad (17)$$

где $D_1^0/D_1^0 t = \partial/\partial t + u_j^0\partial/\partial x_j$ — оператор Эйлера, описывающий движение твердой фазы в данной точке пространства.

Подставляя в уравнение (7) формулы (11) и уравнение состояния (12), находим уравнение сохранения импульса для флюидной фазы в волне:

$$\rho_2^0\frac{D_2^0\langle w_i\rangle}{D_2^0 t} = -\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i} - \frac{\mu m_0(1-m_0)}{a_0}[\langle w_i\rangle - \langle u_i\rangle] + \langle\rho_2\rangle g_i. \qquad (18)$$

Уравнение (18) было выведено с учетом уравнения неразрывности для флюида (13) и закона Дарси [8]

$$\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{\mu m_0(1-m_0)}{a_0}(w_i^0 - u_i^0) - \rho_2^0 g_i = 0, \qquad (19)$$

который имеет место только для средних, стационарных значений скоростей движения твердой фазы

и флюида, его давления и плотности, пористости и проницаемости твердой матрицы.

Аналогично, подставляя в уравнение (9) формулы (11) и уравнение состояния (14), находим уравнение сохранения импульса для твердой фазы в упругой волне:

$$\rho_1^0(1-m_0)\frac{D_1^0\langle u_i\rangle}{D_1^0 t}-\rho_2^0(1-m_0)\frac{D_2^0\langle w_i\rangle}{D_2^0 t}-\frac{\partial\langle\sigma_{ij}^e\rangle}{\partial x_j}-$$
$$-\rho_1^0 u_i^0\left[\frac{D_1^0\langle m\rangle}{D_1^0 t}+\frac{\alpha_1}{3}\frac{D_1^0\langle\vartheta^e\rangle}{D_1^0 t}-(1-m_0)\alpha_1\frac{D_1^0\langle p\rangle}{D_1^0 t}\right]+$$
$$+\rho_2^0 w_i^0\left[m\alpha_2\frac{D_2^0\langle p\rangle}{D_2^0 t}+\frac{D_2^0\langle m\rangle}{D_2^0 t}\right]+$$
$$+\rho_1^0(1-m_0)u_i^0\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_j}+\rho_2^0 m_0 w_i^0\frac{\partial\langle w_j\rangle}{\partial x_j}-$$
$$-\frac{\mu}{a_0}m_0(1-m_0)(w_i-u_i)-\frac{\mu}{\langle a\rangle}\langle m\rangle(1-\langle m\rangle)(w_i^0-u_i^0)-$$
$$-(1-m_0)(\rho_1-\rho_2)g_i+\langle m\rangle(\rho_1^0-\rho_2^0)g_i-$$
$$-\rho_2^0 w_i^0 m_0\alpha_2 A\frac{D_2^0}{D_2^0 t}\left(\frac{d\langle\rho_2\rangle}{dt}\right)=0.$$

Оно упрощается с помощью уравнений неразрывности для твердой фазы (17) и флюида (13) следующим образом:

$$\rho_1^0(1-m_0)\frac{D_1^0\langle u_i\rangle}{D_1^0 t}-\rho_2^0(1-m_0)\frac{D_2^0\langle w_i\rangle}{D_2^0 t}-\frac{\partial\sigma_{ij}^e}{\partial x_j}-$$
$$-\mu\left[\frac{m_0}{a_0}(1-m_0)(w_i-u_i)+\frac{\langle m\rangle}{m_0 a_0}(1-\langle m\rangle)(w_i^0-u_i^0)\right]-$$
$$-\left[(1-m_0)(\rho_1-\rho_2)-\langle m\rangle(\rho_1^0-\rho_2^0)\right]g_i=0. \quad (20)$$

Система уравнений (20), (18), (13), (17) решает задачу, поставленную в начале статьи. Для проверки правильности этой системы рассмотрим несколько частных случаев.

1. В случае неподвижной матрицы $u_i^0=0$ и неподвижной (в среднем) флюидной фазы $w_i^0=0$. Тогда

$$\rho_1^0(1-m_0)\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial t}-\rho_2^0(1-m_0)\frac{\partial\langle w_i\rangle}{\partial t}-$$
$$-\mu\frac{m_0}{a_0}(1-m_0)[\langle w_i\rangle-\langle u_i\rangle]- \quad (21)$$
$$-\left[(1-m_0)(\rho_1-\rho_2)-\langle m\rangle(\rho_1^0-\rho_2^0)\right]g_i-\frac{\partial\sigma_{ij}^e}{\partial x_j}=0,$$

$$\rho_2^0\frac{\partial\langle w_i\rangle}{\partial t}=-\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i}-\frac{\mu m_0(1-m_0)}{a_0}[\langle w_i\rangle-\langle u_i\rangle]+\langle\rho_2\rangle g_i, \quad (22)$$

$$\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}+m_0\frac{\partial\langle w_i\rangle}{\partial x_i}+\alpha_2 m_0\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial t}-\alpha_2 A m_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\langle\rho\rangle}{dt}\right)=0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}+\frac{\alpha_1}{3}\frac{\partial\langle\vartheta^e\rangle}{\partial t}-\alpha_1(1-m_0)\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial t}-(1-m_0)\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_i}=0. \quad (24)$$

Уравнения (21)–(24) при $A=0$ (не учитывались процессы релаксации во флюиде) были получены впервые в работе [3]. Было также показано [4], что при некоторых дополнительных предположениях (постоянная пористость $m=\mathrm{const}$, дополнительные связи между коэффициентами и т. п.), эти уравнения (при $A=0$) совпадают с уравнениями Френкеля [1] и Био [2]. В дальнейшем уравнения (21)–(24) были детально исследованы в работах [4, 5].

2. Для практических приложений важен другой случай, когда флюид движется со скоростью $w_i^0\neq 0$ в неподвижной матрице $u_i^0=0$. В этом случае система уравнений (20), (18), (13), (17) принимает вид

$$\frac{\partial\langle m\rangle}{\partial t}-(1-m_0)\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_i}-\alpha_1(1-m_0)\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial t}+\frac{\alpha_1}{3}\frac{\partial\langle\vartheta^e\rangle}{\partial t}=0, \quad (25)$$

$$\frac{D_2^0\langle m\rangle}{D_2^0 t}+m_0\frac{\partial\langle w_i\rangle}{\partial x_i}+\alpha_2 m_0\frac{D_2^0\langle p\rangle}{D_2^0 t}-$$
$$-\alpha_2 A m_0\frac{D_2^0}{D_2^0 t}\left(\frac{d\langle\rho\rangle}{dt}\right)=0, \quad (26)$$

$$\rho_1^0(1-m_0)\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial t}-\rho_2^0(1-m_0)\frac{D_2^0\langle w_i\rangle}{D_2^0 t}-\frac{\partial\sigma_{ij}^e}{\partial x_{ij}}-$$
$$-\mu\left[\frac{m_0}{a_0}(1-m_0)(\langle w_i\rangle-\langle u_i\rangle)+\frac{\langle m\rangle}{a_0 m_0}(1-m_0)w_i^0\right]-$$
$$-\left[(1-m_0)(\rho_1-\rho_2)-\langle m\rangle(\rho_1^0-\rho_2^0)\right]g_i=0. \quad (27)$$

$$\rho_2^0\frac{D_2^0\langle w_i\rangle}{D_2^0 t}=-\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i}-\frac{\mu m_0(1-m_0)}{a_0}[\langle w_i\rangle-\langle u_i\rangle]+\langle\rho_2\rangle g_i. \quad (28)$$

Уравнения (25)–(28) получены в настоящей работе впервые и ранее не исследовались.

3. В случае сплошной твердой среды, при отсутствии пор и флюида имеем $m_0=\langle m\rangle=0$, $w_i^0=\langle w_i^0\rangle=0$, $\langle p\rangle=p_0=0$, уравнения (13) удовлетворяются тождественно, уравнения (18), (19) дают $\rho_2^0=\langle\rho_2\rangle=0$, а уравнение (20) превращается в уравнение, описывающее упругие волны в твердой среде с учетом силы тяжести:

$$\rho_1^0\frac{D_1^0\langle u_i\rangle}{D_1^0 t}-\frac{\partial\sigma_{ij}^e}{\partial x_j}-\rho_1 g_i=0 \quad (29)$$

в переменных Эйлера, не связанных с движущейся деформируемой твердой средой.

4. Наоборот, в случае сплошной нефти или воды, когда $u_i^0=\langle u_i\rangle=0$, $m_0=1$, $\langle m\rangle=1$, уравнение (13) дает уравнение неразрывности с учетом релаксации:

$$\frac{\partial\langle w_i\rangle}{\partial x_i}+\alpha_2\frac{D_2^0\langle p\rangle}{D_2^0 t}-\alpha_2 A\frac{D_2^0}{D_2^0 t}\left(\frac{d\langle\rho\rangle}{dt}\right)=0. \quad (30)$$

Уравнение (17) приводит к условию $\langle\vartheta^e\rangle=\mathrm{const}$, и эту постоянную можно выбрать равной нулю.

Уравнение (18) превращается в уравнение акустики движущейся среды:

$$\rho_2^0 \frac{D_2^0 \langle w_i \rangle}{D_2^0 t} = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \langle \rho_2 \rangle g_i, \qquad (31)$$

описывающее осцилляции скорости, давления и плотности в упругой волне с учетом гравитации [9]. Закон Дарси (19) принимает вид классического гидростатического закона для среднего давления p_0:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x_i} = \rho_2^0 g_i, \qquad (32)$$

и, так как $g_i = (0, 0, g)$, отличными от нуля оказываются изменения давления только по вертикальной координате z: $\partial p_0 / \partial z = \rho_2^0 g$. Кроме того, уравнение (20) дает $\sigma_{ij}^e = \mathrm{const}$, в частности $\sigma_{ij} = 0$.

Таким образом, выведенные нами полные уравнения переходят в некоторых частых случаях в уравнения, полученные ранее. Представляется целесообразным использовать их при решении новых задач физики пористых сред, что может составить предмет будущих исследований.

Литература

1. *Френкель Я.И.* // Изв. АН СССР. Сер. География и геофизика. 1944. **8**, № 4. С. 134.
2. *Biot M.A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1956. **28**, N 2. P. 168.
3. *Николаевский В.Н.* // Добыча нефти и газа (теория и практика). М., 1964. С. 40–48.
4. *Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.* Механика насыщенных пористых сред. М., 1970.
5. *Николаевский В.Н.* Геодинамика и флюидодинамика. М., 1996.
6. *Терцаги К.* Теория механики грунтов. М., 1961.
7. *Ноздрев В.Ф., Федорищенко Н.В.* Молекулярная акустика. М., 1974.
8. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М., 1952.
9. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М., 1981.

Поступила в редакцию
24.12.04