ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.123.17:539.124.17

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПАУЛИ ДЛЯ ЗАРЯЖЕННОГО И НЕЙТРАЛЬНОГО ФЕРМИОНОВ В ПРИСУТСТВИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ С УЧЕТОМ АНОМАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ ЧАСТИЦ

Х. Гоударзи*), И. В. Мамсуров

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: goudarzia@phys.msu.ru

В настоящей работе получены волновая функция и спектр энергии уравнения Паули во внешнем цилиндрически-симметричном магнитном поле для нейтрального фермиона, а также поправки к спектру энергии для заряженного фермиона с учетом взаимодействия аномального магнитного момента частиц с внешним полем. Получены оценки для порога распада нуклонов в присутствии данного поля.

Введение

В релятивистской квантовой теории движение заряженной частицы со спином $1/2$ во внешнем электромагнитном поле описывается уравнением Дирака, содержащим так называемое «минимальное» взаимодействие заряженного фермиона с векторным потенциалом внешнего электромагнитного поля $A_\mu(x)$. Паули [1], изучая лагранжианы релятивистских заряженных фермионов во внешних электромагнитных полях, указал, что добавлением к лагранжиану дополнительных членов, содержащих явно напряженности внешнего поля $F_{\mu\nu}(x)$, можно описать дополнительные (аномальные) магнитные моменты (АММ) заряженных фермионов.

Учет дополнительного члена, связанного с аномальным магнитным моментом заряженного и нейтрального фермионов, существенно усложняет структуру и нахождение точных решений полученного из такого лагранжиана обобщенного уравнения Дирака–Паули в присутствии внешнего электромагнитного поля. Точные решения уравнения Дирака–Паули для заряженного и нейтрального массивного фермионов, обладающих АММ, известны лишь в некоторых специальных конфигурациях электромагнитных полей: в поле плоской электромагнитной волны [2, 3], в произвольном постоянном электромагнитном поле [4] и для одного класса постоянных неоднородных электрических полей [5, 6]. Решения уравнения Дирака–Паули для аксиально-симметричного магнитного и центрально-симметричного электрического полей получены в [7].

В настоящей работе с помощью метода теории возмущений будут получены волновые функции и спектр энергий уравнения Паули во внешнем постоянном цилиндрически-симметричном магнитном поле для заряженного и нейтрального массивных фермионов, обладающих аномальными магнитными моментами в нерелятивистском приближении. На основе полученных решений даются оценки для порога распадов нуклонов в таком поле. Цилиндрически-симметричное магнитное поле зададим в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (0, 0, b + a/r), \quad a, b = \mathrm{const}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Поскольку задача рассматривается в нерелятивистском приближении, для нахождения спектра энергии и волновых функций надо привести уравнение Дирака к уравнению Паули, т. е. разложить уравнение Дирака и искать решение, сохраняя члены $\sim 1/c$ [8].

Исходим из уравнения Дирака–Паули для фермионов с учетом АММ ($\boldsymbol{\mu}$) во внешнем поле [9]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = \left[c(\alpha\mathbf{P}) + \rho_3 m_0 c^2 - \boldsymbol{\mu}\rho_3(\sigma\mathbf{B})\right]\psi(\mathbf{r}, t). \tag{2}$$

В релятивистском выражении для энергии частицы содержится также и ее энергия покоя m_0c^2. Для перехода к нерелятивистскому приближению она должна быть исключена, для чего вместо ψ вводим функцию ψ'

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi'(\mathbf{r}, t)e^{-im_0c^2t/\hbar}.$$

Тогда

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + m_0c^2\right)\psi'(\mathbf{r}, t) = \\ = \left[c(\alpha\mathbf{P}) + \rho_3 m_0 c^2 - \boldsymbol{\mu}\rho_3(\sigma\mathbf{B})\right]\psi'(\mathbf{r}, t). \tag{3}$$

Представив ψ' в виде $\psi' = \begin{pmatrix}\phi' \\ \chi'\end{pmatrix}$, получим систему уравнений

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}(\sigma\mathbf{B})\right]\phi' = c(\sigma\mathbf{P})\chi', \tag{4}$$

*) Физический факультет, Университет «Урмия», Урмия, Иран.

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + 2m_0c^2 - \boldsymbol{\mu}(\sigma\mathbf{B})\right]\chi' = c(\sigma\mathbf{P})\phi' \qquad (5)$$

(ниже будем опускать штрихи у ϕ и χ, что не вызовет недоразумений, так как далее пользуемся только преобразованной функцией ψ').

В первом приближении в левой стороне уравнения (5) оставляем лишь член $2m_0c^2\chi$ и получаем

$$\chi = \frac{1}{2m_0c}(\sigma\mathbf{P})\phi. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получаем

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}(\sigma\mathbf{B})\right]\phi = \frac{1}{2m_0}\left[(\sigma\mathbf{P})\right]^2\phi. \qquad (7)$$

Используя соотношение для матриц Паули [8]

$$(\sigma\mathbf{a})(\sigma\mathbf{b}) = \mathbf{ab} + i\sigma(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),$$

где в данном случае $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{p} - e/c\mathbf{A}$, и учитывая, что векторное произведение $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ не обращается в нуль в силу некоммутативности $\mathbf{p}$ и $\mathbf{A}$, получаем

$$[\sigma(\mathbf{p} - e/c\mathbf{A})]^2 = (\mathbf{p} - e/c\mathbf{A})^2 - e\hbar/c(\sigma\mathbf{B}),$$

и при этом для ϕ получается уравнение

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi = \left[\frac{1}{2m_0}(\mathbf{p} - e/c\mathbf{A})^2 - (\boldsymbol{\mu} + e\hbar/2m_0c)(\sigma\mathbf{B})\right]\phi. \qquad (8)$$

Это так называемое уравнение Паули с учетом аномального магнитного момента электрона.

Стационарное состояние для биспинора $\phi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ будем искать в виде

$$\phi(\mathbf{r},t) = e^{-i\varepsilon t}\phi(\mathbf{r}), \qquad (9)$$

где ε — энергия фермиона в нерелятивистском приближении. Подставляя (9) и (1) в (8), получаем следующую систему уравнений (перейдем при этом к системе единиц, где $\hbar = c = 1$):

$$\varepsilon\psi_1(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{2m_0}(-i\nabla - e\mathbf{A})^2 - (\boldsymbol{\mu} + e/2m_0)(b + \frac{a}{r})\right]\psi_1(\mathbf{r}), \qquad (10)$$

$$\varepsilon\psi_2(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{2m_0}(-i\nabla - e\mathbf{A})^2 + (\boldsymbol{\mu} + e/2m_0)(b + \frac{a}{r})\right]\psi_2(\mathbf{r}). \qquad (11)$$

Векторный потенциал внешнего цилиндрически-симметричного магнитного поля в цилиндрической системе координат выберем в виде

$$A_r = A_z = 0, \quad A_\varphi = \frac{br}{2} + a. \qquad (12)$$

1. Нейтральный фермион

Сначала найдем решение уравнения (10) для случая нейтрального фермиона. Это решение в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\psi_{1,2}(r,\varphi,z) = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{L}}e^{ik_3z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{il\varphi}f(r)\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где $k_3 = \frac{2\pi}{L}n_3$ $(n_3, l = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ и $f(r)$ — радиальная функция, которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \left[2m_0(\boldsymbol{\mu}_n b + \varepsilon) - k_3^2 + \frac{2m_0\boldsymbol{\mu}_n a}{r} - \frac{l^2}{r^2}\right]f(r) = 0, \qquad (14)$$

и коэффициенты $C_{1,2}$ зависят только от спина:

$$C_{1,2} = 1 \pm s_n; \quad s_n = \pm1,$$

где параметр s_n характеризует поляризацию спина по полю или против поля.

Найдем асимптотическое поведение дифференциального уравнения (14). При $r\to\infty$ ищем решение уравнения

$$f''_\infty(r) - Af_\infty(r) = 0$$

в виде

$$f(r\to\infty) = e^{-\sqrt{A}r}, \qquad (15)$$

где $A = -2m_0(\boldsymbol{\mu}_n b + \varepsilon) + k_3^2$. В другом предельном случае $(r\to0)$ решение будет иметь вид

$$f(r\to0) = r^l, \qquad (16)$$

удовлетворяющий уравнению

$$rf''_0(r) + f'_0(r) - \frac{l^2}{r}f_0(r) = 0.$$

Тогда с помощью (15) и (16) находим решение (14)

$$f(r) = e^{-\sqrt{A}r}r^lY(r). \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (14), получаем хорошо известное дифференциальное уравнение для вырожденной гипергеометрической функции [10]

$$rY''(r) + (1 + 2l - 2\sqrt{a}r)Y'(r) - \left[\sqrt{A}(2l+1) + B\right]Y(r) = 0,$$

где $B = -2m_0\boldsymbol{\mu}_n a$, с решением

$$Y(r) = F\left(\sqrt{A}(2l+1) + B,\, 2(l+1);\, 2\sqrt{A}r\right). \qquad (18)$$

Вследствие физической необходимости исчезновения волновой функции на бесконечности имеем

$$\sqrt{A}(2l+1) + B = -n, \quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad (19)$$

при этом вырожденная гипергеометрическая функция (18) сводится к полиному Лагерра:

$$Y(r) = F\left(-n,\, 2(l+1);\, 2\sqrt{A}r\right) = \\ = \frac{(2l+1)!n!}{(n+2l+1)!} L_n^{2l+1}(r). \qquad (20)$$

Отсюда находим спектр энергии ε для нейтрального фермиона с учетом АММ в нерелятивистском приближении в цилиндрически-симметричном магнитном поле. Как легко видеть, этот спектр имеет вид

$$\varepsilon_{n,l} = s\boldsymbol{\mu}_n b + \frac{k_3^2}{2m} + \frac{m(\boldsymbol{\mu}_n a)^2}{2(n+l+1/2)^2}, \qquad (21)$$

где параметр $s = \pm 1$.

2. Заряженный фермион

Далее рассмотрим решение уравнения (8) для заряженного фермиона. Так как уравнения (10) и (11) с векторным потенциалом внешнего поля (12) для заряженной частицы аналитически не решаются, используем теорию возмущений. При этом допустим, что внешнее поле является постоянным. Для однородного поля решение было получено в [11], теперь вычислим поправку от возмущающего члена a/r.

Гамильтониан системы заряженного фермиона в цилиндрически-симметричном магнитном поле можно записать в виде

$$H = \mathcal{H}_0 + H',$$

где $\mathcal{H}_0$ — гамильтониан заряженного фермиона в однородном поле с учетом АММ фермиона

$$\mathcal{H}_0 = (\alpha \mathbf{P}) + \rho_3 m_0 - \boldsymbol{\mu}\rho_3(\sigma \mathbf{B}),$$

где, как и ранее, $\mathbf{P} = -i\nabla - e\mathbf{A}$, а ρ_3 — матрица Дирака.

Возмущающий член гамильтониана, H', легко получается в виде

$$H' = \left(a\boldsymbol{\mu} + \frac{ea}{2m_0} - \frac{eal}{m_0}\right)\frac{1}{r} + \frac{e^2ab}{2m_0}r, \qquad (22)$$

где a, b — постоянные внешнего поля.

Теперь вычислим поправки к энергии для состояний $n=0$ и $n=1$ заряженного фермиона (протона):

$$\left(\overline{\frac{1}{r}}\right) = \int \frac{1}{r}\psi^\dagger\psi d^3x, \quad \bar{r} = \int r\psi^\dagger\psi d^3x. \qquad (23)$$

Проинтегрировав (23) и применив соотношения для гамма-функций

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt, \quad n>0,$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx = \frac{1}{\beta^\alpha}\Gamma(\alpha),$$

получим следующий результат:

$$\left(\overline{\frac{1}{r}}\right)_{n=0} = 4\sqrt{\pi\gamma}, \quad \bar{r}_{n=0} = 2\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}, \quad \gamma = \frac{eb}{2}, \qquad (24)$$

где n — главное квантовое число. При этом для случая $n=1$ получим

$$\left(\overline{\frac{1}{r}}\right)_{n=1} = \frac{13}{2}\sqrt{\pi\gamma}, \quad \bar{r}_{n=1} = \frac{47}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}, \qquad (25)$$

где было произведено суммирование по состояниям спиновой поляризации $s = \pm 1$.

С помощью (24) и (25) можно получить поправку, вызываемую возмущающим членом H' в спектре энергии:

$$\langle H'\rangle_{n=0} = 4\left(a\boldsymbol{\mu}_p + \frac{ea}{2m_p}\right)\sqrt{\pi\gamma} + \frac{e^2ab}{m_p}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}, \qquad (26)$$
$$\langle H'\rangle_{n=1} = \frac{13}{2}\left(a\boldsymbol{\mu}_p - \frac{ea}{2m_p}\right)\sqrt{\pi\gamma} + \frac{47e^2ab}{8m_p}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Наконец, для полного спектра энергии заряженного фермиона (протона) в цилиндрически-симметричном магнитном поле в нерелятивистском приближении находим

$$E_{0p} = m_p + s_p\boldsymbol{\mu}_p b + \frac{p_{3p}^2}{2m_p} + \langle H'\rangle_{n=0}\,, \qquad (27)$$

$$E_{1p} = m_p + \frac{2\gamma}{m_p} + s_p\boldsymbol{\mu}_p b + \frac{p_{3p}^2}{2m_p} + \langle H'\rangle_{n=1}\,, \qquad (28)$$

где $\langle H'\rangle_{n=0,1}$ определяется соотношением (26).

3. Пороги распада нуклонов

Для энергетического порога распада нуклонов (например, нейтрона) в рассматриваемом цилиндрически-симметричном магнитном поле можно получить следующие оценки. Предположим, что постоянное поле $b \gg B_{\rm cr}$. Тогда можно считать, что электрон и протон находятся на нижнем уровне Ландау ($n = n' = 0$). Будем исследовать вероятность распада нейтрона в той системе отсчета, где он покоится. В матричный элемент распада (см., напр., [11]) обязательно войдут экспоненты e^{-iE_nt}, e^{-iE_pt}, e^{-iE_et}, $e^{-i\chi_0t}$, поскольку внешнее поле является стационарным и соответствующие экспоненты в любом случае будут входить в волновые функции частиц [12]. После интегрирования по времени эти экспоненты дадут δ-функцию по энергии

$$\delta\left(\Delta' - m_e + 2m_n(\boldsymbol{\mu}_n a)^2 - p_{3p}^2/2m_p - \langle H'\rangle_{n=0}^p - \right. \\ \left. - p_{3e}^2/2m_e - \langle H'\rangle_{n=0}^e - \chi_0\right), \qquad (29)$$

где $\Delta' = \Delta + s_n\boldsymbol{\mu}_n b - s_p\boldsymbol{\mu}_p b$.

Далее, приравнивая нулю аргумент δ-функции и учитывая, что $(p_{3p}^2/2m_p,\ p_{3e}^2/2m_e, \chi_0) > 0$, получаем следующее неравенство:

$$\Delta' - m_e + 2m_n(\boldsymbol{\mu}_n a)^2 - 4a\left(\boldsymbol{\mu}_p + \frac{e}{2m_p}\right)\sqrt{\pi\gamma} -$$

$$- \frac{e^2 ab}{m_p}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} - \frac{2ae}{m_e}\sqrt{\pi\gamma} - \frac{e^2 ab}{m_e}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \geqslant 0, \quad (30)$$

в котором можно пренебречь слагаемым, пропорциональным a^2, вследствие его малости. Учитывая также, что $m_e/m_p \ll 1$, приходим к выводу, что вероятность распада нейтрона будет отличной от нуля лишь при следующем соотношении между параметрами внешнего магнитного поля a и b:

$$a \leqslant \frac{\Delta' - m_e}{2\sqrt{2\pi e}\left(\boldsymbol{\mu}_p + e/m_e\right)\sqrt{b}}. \quad (31)$$

Проведя аналогичные рассуждения для случая обратного β^+ — распада свободного протона, получим, что соотношение между a и b для указанного процесса должно быть следующим:

$$a \leqslant \frac{\Delta' + m_{e+}}{2\sqrt{2\pi e}\left(\boldsymbol{\mu}_p - e/m_{e+}\right)\sqrt{b}}. \quad (32)$$

В заключение авторы выражают благодарность профессору В.Р. Халилову за постановку задачи и ряд полезных замечаний.

Литература

1. *Pauli W.* // Rev. Mod. Phys. 1941. **13**. P. 203.
2. *Тернов И.М., Багров В.Г., Клименко Ю.И.* // Изв. вузов. Физика. 1968. № 2. С. 50.
3. *Клименко Ю.И., Кулиш В.В., Худомясов А.И.* // Изв. вузов. Физика. 1974. № 10. С. 142.
4. *Лавров П.М.* // Изв. вузов. Физика. 1977. № 12. С. 68.
5. *Тернов И.М., Багров В.Г.* // Ядерная физика. 1966. **4**, № 4. С. 797; ДАН СССР. 1966. **168**. С. 1298.
6. *Клименко Ю.И.* // Ядерная физика. 1978. **27**. С. 1677.
7. *Халилов В.Р.* // Теор. и матем. физика. 2001. **126**, № 3. С. 427.
8. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М., 1980.
9. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. М., 1974.
10. *Градштейн И.С. и Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
11. *Гоударзи Х., Мамсуров И.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2006. № 1. С. 11.
12. *Вайнберг С.* Квантовая теория поля. Т. 1. М., 2003.

Поступила в редакцию
02.03.05