

УДК 536.7

ОЦЕНКА ТЕМПЕРАТУРЫ И ПЛОТНОСТИ ЧАСТИЦ В СЛАБОДИССИПАТИВНОЙ ТЕОРИИ КОЛМОГорова–Арнольда–Мозера

В. В. Сухаревский

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

Приведены оценки температуры для модели слабодиссипативного ангармонического осциллятора с дискретным временем «Bogdanov-map». С учетом оценки для кинетической энергии получены плотности потока газа микрочастиц. Экспериментальные данные по электрическому отклику нанопленок, активированных микрокристаллами, на лазерные импульсы хорошо согласуются с результатами расчетов для модели «Bogdanov-map».

Введение

Основным достаточно исследованным примером слабодиссипативной теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ) является на сегодняшний день система «Bogdanov-map» (известная также как отображение Богданова). Рассматривается семейство динамических систем с непрерывным временем на фазовой плоскости, возникающее в бифуркации Богданова–Тakens [1]:

$$\ddot{x} + (\tilde{\mu} \pm x) \dot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\varepsilon} x - \frac{x^3}{3} \right), \quad (1)$$

где $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mu}$ — вещественные параметры.

При $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mu} = 0$ семейство (1) содержит систему, которая является двукратно вырожденной:

а) одно вырождение — слияние локального минимума и максимума потенциальной энергии, имеющих в системе при $\tilde{\varepsilon} > 0$ (при $\tilde{\varepsilon} = 0$ появляется кубическая точка на графике потенциала);

б) другое независимое вырождение — обращение в нуль коэффициента трения, зависящего от фазовой координаты (при $\tilde{\mu} = 0$ коэффициент равен $\pm x$), в точке перегиба потенциала (стационарная точка системы при $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mu} = 0$).

Таким образом, семейство (1) возникает при снятии двукратного вырождения состояния равновесия $x = \dot{x} = 0$ в динамической системе семейства, отвечающей значениям параметров $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mu} = 0$.

Проведя замену переменных, из (1) можно получить следующее (глобальное, $x \in [-0.5, 1]$) семейство

$$\ddot{x} + (\bar{\varepsilon} + \bar{\mu}x) \dot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right), \quad (2)$$

где $\bar{\varepsilon}, \bar{\mu}$ — малые вещественные параметры, $\bar{\varepsilon}, \bar{\mu} \ll 1$.

При малых $\bar{\varepsilon}, \bar{\mu}$ для семейства (2) известно, при каких значениях параметров система имеет единственное периодическое решение.

Дискретизуя уравнение (2) по полуявной схеме Эйлера, после соответствующей перенормировки x и $y = \dot{x}$ получаем отображение, называемое «Bogda-

nov-map» [2]:

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + [y + \varepsilon y + kx(x-1) + \mu xy] \\ y + \varepsilon y + kx(x-1) + \mu xy \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — фазовые координаты, $(\varepsilon, \mu, k) \in \mathbb{R}^3$ — вещественные параметры (k пропорционален квадрату шага дискретизации).

Периодической орбитой периода ν дискретного отображения называется совокупность ν точек $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, \nu\}$ фазового пространства, для которых $g^j(x_i, y_i) = (x_i, y_i)$ и $g^j(x_i, y_i) \neq (x_i, y_i)$ при $j < \nu$. Здесь $g^\nu(x_i, y_i)$ обозначает j -ю степень отображения g относительно композиции $g^j = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_{j \text{ раз}}$.

В работе [2] Эрроусмит с коллегами обнаружили существование периодических орбит у отображения (3) при $\varepsilon, \mu \sim 10^{-2}$. В работах [3, 4] это изучение продолжено независимо при $\varepsilon, \mu \sim 10^{-5}$. Там же отмечено, что в слабодиссипативной дискретной динамике обнаруживаются асимптотически устойчивые (отвечают состояниям «out») и неустойчивые (отвечают состояниям «in») периодические орбиты в количестве порядка 10^3 , а также порядка 10^3 гиперболических (седловых) орбит.

В работах [3, 4] в ходе численного эксперимента обнаружены периодические орбиты со значением периода от 2 до 10^8 . В работе [5] орбиты периода 2 рассчитаны аналитически.

Каждой дискретной (вообще говоря, непериодической или не строго периодической) орбите можно сопоставить набор адиабатически инвариантных величин, часть которых имеет физический смысл. Исходя из системы (2), лежащей в основе (3), адиабатическими инвариантами являются, например, средняя длина пробега частицы, средняя энергия вдоль орбиты. Для периодических орбит эти величины являются инвариантами динамики.

В работе [4] отмечено, что множество периодических орбит разделяется на так называемые «кортежи орбит» в соответствии со значением адиабатических инвариантов. Также показано, что с ростом периода

происходит «насыщение» для некоторых адиабатических инвариантов (кривая зависимости выходит на плато).

Величина такого адиабатического инварианта, как средняя энергия, отвечающая одной группе (кортежу), выходящая на плато, как показано в работе [4], отстоит от другой на расстояние Δ , много большее дисперсии, вычисленной для каждой группы ($\Delta \gg D(E)$, где $\Delta \sim 10^{-2}$, $D(E) \sim 10^{-5}$) (рис. 1).

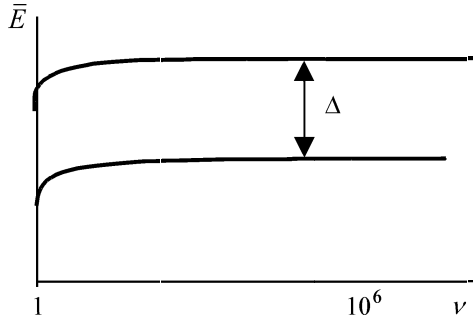


Рис. 1. Зависимость величины инварианта орбиты — средней энергии \bar{E} от периода орбиты ν . Видно, что кривые, соответствующие различным группам параметров, четко разделены

Оценка температуры

В работе [3] приведены оценки площадей областей захвата в фазовом пространстве состояний типа «in» (или «out»), т. е. их статистические веса (рис. 2). Напомним, что областью захвата периодической асимптотически устойчивой (или неустойчивой) орбиты типа «out» (или «in») является множество точек в фазовом пространстве, итерации которых сходятся к периодической орбите при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

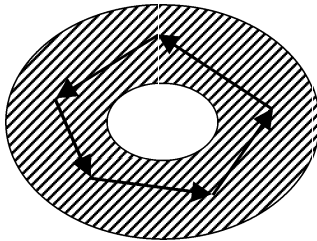


Рис. 2. Схематическое изображение области захвата периодической орбиты периода 5 на фазовой плоскости. Замкнутая ломаная (пятиугольник) обозначает траекторию движения по орбите, состоящей из пяти точек. Площадь Q заштрихованной области захвата можно сопоставить с числом микросостояний Γ

Будем определять абсолютную температуру как параметр канонического распределения Гиббса, считая систему микрочастиц находящейся в квазиравновесном состоянии.

В работе [3] замечено, что в кортеже статистические веса орбит связаны со средней энергией вдоль орбиты классическим распределением Больцмана–Гиббса:

$$Q \approx \exp\left(-\frac{\nu \bar{E}}{kT}\right), \quad (4)$$

где Q — площадь захвата одной точки асимптотически устойчивой (или неустойчивой) периодической орбиты, \bar{E} — среднее значение энергии вдоль периодической орбиты:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} E_i}{\nu},$$

ν — период орбиты в дискретном времени (распределение Больцмана–Гиббса придает смысл частоты этой величине). В силу малости параметров (ϵ и μ) площади захвата разных точек асимптотически устойчивой или неустойчивой орбиты приблизительно равны.

В [6] исследовано поведение абсолютной температуры T , определяемой распределением (4).

При расчете температуры кортеж орбит разделяется на низкопериодическую и высокопериодическую области. Высокопериодическая и низкопериодическая части кривой $\ln Q(\nu)$ аппроксимировались по методу наименьших квадратов, площади захвата были получены в ходе численного эксперимента [4].

В нормировке (2) абсолютные температуры оказались заключены в пределах $10 \div 10^4$. Здесь $10 \div 10^2$ отвечает значениям $\nu \sim 1 \div 10^3$ (низкопериодическая область), $10^3 \div 10^4$ соответствует $\nu \sim 10^4 \div 10^7$ (высокопериодическая область, рис. 3).

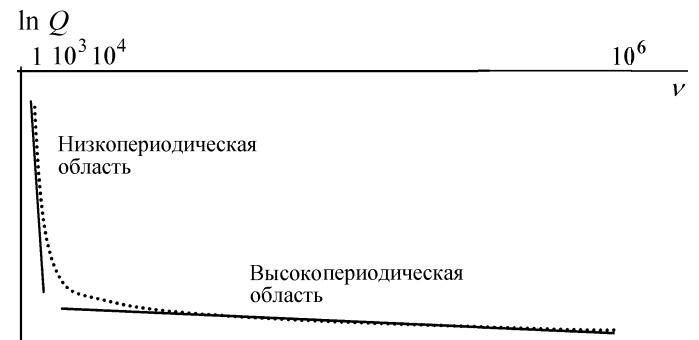


Рис. 3. Кривая зависимости логарифма площади захвата Q от периода орбиты ν , полученная при численном эксперименте на ЭВМ. Отрезки $\nu \sim 1 \div 10^3$ и $\nu \sim 10^4 \div 10^7$ выделены аппроксимирующими прямыми. Для существующей точности численного эксперимента температуры хорошо разделены

Оценка плотности

В работе [7] расчетные данные по «Vogdov-tar» были сопоставлены с экспериментальными в предположении, что x — координата электрона из низкоэнергетического пучка, $y = \dot{x}$ — его скорость.

В эксперименте рассматриваются слоеные плоскостные структуры, где чередуются слои «микрорекристалл — диэлектрическая матрица», например ZnSe/SiO₂, в электрическом ангармоническом потенциале вдоль перпендикуляра к слоям. Непосредственным измерениям подвергается спектр пропускания образца в видимом диапазоне.

В работе [7] объяснено, что можно определить глубину потенциальной ямы ангармонического по-

тенциала как величину энергии зоны проводимости активированного микрокристалла полупроводника, а максимум потенциальной энергии — как величину энергии пробоя диэлектрического слоя (таким образом, высота потенциального кора для указанного выше образца ~ 1.41 эВ [8]).

Энергетические уровни, приведенные в [4], лежат в пределах от 0.15 до 1.2 эВ [7]. Если предположить, что низкотемпературные орбиты (низкопериодический кортеж) находятся при температуре 300 К, то высокотемпературные орбиты (высокопериодический кортеж) соответствуют $10^3 \div 10^4$ К. В предположении разреженного газа кинетическая энергия оценивается как $3kT/2$. В работе [4] отмечено, что средняя энергия \bar{E} с точностью до 10% поровну распределяется между потенциальной и кинетической. Таким образом, ангармонический осциллятор данной модели является слабонелинейным (в гармоническом осцилляторе кинетическая и потенциальная энергии распределяются точно поровну). Значения средней энергии \bar{E} приведены в работе [4].

Таким образом, мы получаем возможность оценить плотность числа электронов с фиксированной средней энергией и периодом $10^4 - 10^7$ (высокопериодический кортеж) как (см. [9])

$$N = \frac{(1/2)\bar{E}}{(3/2)kT} \approx 10^{13} \div 10^{14},$$

что позволяет оценить потоки электронов.

В эксперименте [7] потоки электронов плотностью 10^{19} частиц в секунду соответствуют токам порядка 1 А, поэтому при указанных выше предположениях модель слабодиссипативного осциллятора может сравниваться с экспериментальной динамикой при токах порядка 1–10 мкА.

Заключение

Физической мотивировкой вышеизложенных результатов является вопрос о температуре и плотности микрочастиц, движущихся в возмущенном поле сил ангармонического осциллятора [10] с перерасеянием через фиксированное время свободного пробега.

Возможной мотивировкой модели «Bogdanov-map» может быть углубленное рассмотрение элементарных актов перерасеяния в неравновесной термодинамике. Как отметил В. П. Маслов, в подходе Больцмана к выводу интеграла столкновений

имеется существенный пробел: после элементарного столкновения пучок рассеянных частиц к другому акту столкновения считается распределенным, как и до первого столкновения.

Модель «Bogdanov-map» может представлять собой пример динамики потока частиц с «навязанным» законом перерасеяния. Эта модель показывает совершенно новые свойства динамики по сравнению с классической.

В настоящей работе показано, что асимптотически устойчивые периодические орбиты как связанные состояния ансамбля частиц имеют статистический вес, пропорциональный площади области захвата периодической орбиты, и эти статистические веса согласуются с каноническим распределением Больцмана–Гиббса.

Данные эксперимента хорошо согласуются с модельными и позволяют оценить плотности и температуры микрочастиц, находящихся в связанных состояниях.

Литература

1. Арнольд В.И. // УМН. 1972. **27**, № 5. С. 119.
2. Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M. // Int. J. Bifurc. and Chaos. 1993. **3**, № 4. P. 803.
3. Богданов Р.И. Препринт НИИЯФ МГУ. 1996. № 22/429. С. 136.
4. Богданов Р.И. Нелинейные динамические системы на плоскости и их приложения (с решением проблемы Гильберта). М., 2003.
5. Сухаревский В.В. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Мех. 2003. № 5. С. 3.
6. Сухаревский В.В. // Тез. Междунар. конф. «Ломоносов-99», секция «Физика». 10–17 апреля 1999. Москва, МГУ. 1999. С. 202.
7. Богданов Р.И., Демин А.В., Курилов А.Н. // Сб. научн. тр. МГУ ИЭ. 2003. № 2. С. 40.
8. Генералов М.Б., Богданов Р.И., Сухаревский В.В. // Техника экологически чистых производств в XXI веке: проблемы и перспективы. Матер. VIII Междунар. симпозиума молодых ученых, аспирантов и студентов. 12–13 октября 2004. Москва. 2004. С. 144.
9. Кадомцев Б.Б. Избр. тр. В 2 т. Т. 1. М., 2003. С. 477.
10. Маслов В.П. Асимптотические методы. М., 1967. С. 113.

Поступила в редакцию
11.03.05