АСТРОНОМИЯ

УДК УДК 521.13

ИЗОТРОПНЫЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТНЫЕ УСЛОВИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ–ВРЕМЕНИ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

В. В. Чазов, И. А. Герасимов, О. Д. Соловьева

(*ГАИШ*)

E-mail: zov@sai.msu.ru

Современные численные теории движения планет Солнечной системы построены с использованием изотропных координатных условий. Международный астрономический союз в своих резолюциях о системах отсчета пространства-времени рекомендует использовать гармонические координатные условия. В статье представлен алгоритм, связывающий оба подхода. Алгоритм основан на решении дифференциальных уравнений, полученных с помощью формулы тензорного преобразования координат.

Пространство-время определяется значениями 10 компонентов метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, каждая из компонентов является функцией координатного времени и трех пространственных координат, индексы α и β принимают значения $0, 1, 2, 3$. Квадрат интервала имеет вид $d\tau^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$, по повторяющимся индексам выполняется суммирование, $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, c — скорость света, t — координатное время.

Метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ должны быть найдены в результате решения уравнений поля [1]. Задача имеет малый параметр — отношение скорости пробной частицы к скорости света. Отношение потенциала взаимодействия пробных частиц к квадрату скорости света пропорционально второй степени малого параметра. Решение уравнений поля в постньютоновском приближении со всей необходимой точностью соответствует достаточно медленным движениям небесных тел Солнечной системы и относительно небольшим силам их взаимного притяжения.

Десять компонентов симметричного метрического тензора связаны между собой четырьмя произвольными соотношениями, так называемыми координатными условиями.

Современная теория движения планет, Луны и Солнца [2], построенная в барицентрической системе отсчета, получена численным интегрированием релятивистских уравнений движения, записанных в постньютоновском приближении с помощью изотропных координатных условий [3].

Международный астрономический союз, принимая во внимание факт, что многие работы по теории относительности выполнены при использовании «гармонических» координат, оказавшихся полезными и более простыми для многих типов приложений [4], рекомендует выбор гармонических координатных условий [5].

В настоящей работе показано, как учесть разницу между применяемыми изотропными и рекомендуемыми гармоническими координатными условиями.

Введем обозначения: f — гравитационная постоянная; m_0 — масса Солнца; m_k $(k > 0)$ — массы планет; $\mathbf{r}$ — барицентрический вектор положения произвольной точки в пространстве; $\mathbf{r_k}$ — барицентрический вектор положения объекта с номером k; $\mathbf{v_k}$ — барицентрический вектор скорости объекта с номером k; v_k^2 — квадрат модуля вектора скорости; U — потенциал в произвольной точке пространства, создаваемый системой частиц, взаимодействующих по закону Ньютона; U_k' — потенциал в точке расположения объекта с номером k, создаваемый остальными частицами, взаимодействующими по закону Ньютона; W — скалярная функция; $\mathbf{V}$ — векторная функция с компонентами V_1, V_2, V_3.

Координатные условия гласят:

$$3\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{— изотропный случай,}$$

$$4\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{— гармонический случай.}$$

Изотропная форма представления метрики пространства-времени $N + 1$ взаимодействующих частиц предполагает, что

$$U = \sum_{k=0}^{N} \frac{f m_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_k}|},$$

$$U_k' = \sum_{l=0,\ l\neq k}^{N} \frac{f m_l}{|\mathbf{r_l} - \mathbf{r_k}|},$$

$$W = \sum_{k=0}^{N} \frac{f m_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_k}|} \left(\frac{3}{2} v_k^2 - U_k' \right),$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} \frac{f m_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_k}|} \left(7\mathbf{v_k} + \frac{((\mathbf{r} - \mathbf{r_k}) \cdot \mathbf{v_k})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_k}|} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r_k}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_k}|} \right).$$

Метрика, полученная под гармоническими координатными условиями, отличается от изотропной в выражениях для дополнительных потенциалов

$$W=\sum_{k=0}^{N}\frac{fm_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_k}|}\Bigg(2v_k^2-U_k'-\frac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{r_k})\times$$
$$\times\sum_{l=0,\ l\neq k}^{N}\frac{fm_l}{|\mathbf{r_l}-\mathbf{r_k}|^3}(\mathbf{r_k}-\mathbf{r_l})-\frac{1}{2}\,\frac{((\mathbf{r}-\mathbf{r_k})\cdot\mathbf{v_k})^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_k}|^2}\Bigg),$$
$$\mathbf{V}=4\sum_{k=0}^{N}\frac{fm_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_k}|}\mathbf{v_k}.$$

Запишем квадрат интервала

$$d\tau^2=c^2g_{00}dt^2+2cg_{0i}\,dt\,dx^i+$$
$$+\,g_{11}(dx^1)^2+g_{22}(dx^2)^2+g_{33}(dx^3)^2,$$

где

$$g_{00}=+1-\frac{2U}{c^2}+\frac{2U^2}{c^4}-\frac{2W}{c^4},$$
$$g_{0i}=\frac{1}{c^3}V_i,\quad g_{ii}=-1-\frac{2U}{c^2},\quad i=1,2,3.$$

Потенциал U пропорционален v^2. Выражение W/c^4 имеет порядок v^4/c^4, а $\mathbf{V}/c^3$ пропорционально v^3/c^3. Формулы для метрических коэффициентов g_{ij} совпадают для обоих координатных условий. Отличие в коэффициенте g_{00} возникает только в четвертом порядке, а в g_{0i} — в третьем порядке относительно v/c. Из этого следует, что отличия в координатах x^1, x^2, x^3 будут порядка v^2/c^2, а отличия в кооординатном времени смогут проявиться на уровне v^4/c^4.

С помощью тензорного преобразования

$$g_{\alpha\beta}(x^0,x^1,x^2,x^3)=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\,g'_{\mu\nu}(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)$$

выведем формулы связи между координатами x'^0, x'^1, x'^2, x'^3, удовлетворяющими изотропным координатным условиям, и гармоническими координатами x^0, x^1, x^2, x^3.

Закон преобразования ищем в виде

$$x^0=x'^0+\delta x^0(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3),$$
$$x^1=x'^1+\delta x^1(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3),$$
$$x^2=x'^2+\delta x^2(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3),$$
$$x^3=x'^3+\delta x^3(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3),$$

причем вариация $\delta x^0(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)$ имеет четвертый порядок, а вариация $\delta x^i(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)$ — второй порядок относительно отношения v/c.

Подставим соотношения для координат в формулу преобразования, выполним разложение правой и левой частей равенства в ряд Тейлора и приравняем величины одинакового порядка малости. В результате получим следующие дифференциальные соотношения

$$\frac{\partial\delta x^i}{\partial x'^0}=\frac{1}{c^3}\left(V_i'(x')-V_i(x')\right),$$
$$\frac{\partial\delta x^i}{\partial x'^j}=0,$$
$$\frac{\partial\delta x^0}{\partial x'^0}=\frac{1}{c^4}\left(W'(x')-W(x')\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial U(x')}{\partial x'^i}\cdot\delta x^i\left(x'^0\right),$$
$$\frac{\partial\delta x^0}{\partial x'^j}=0.$$

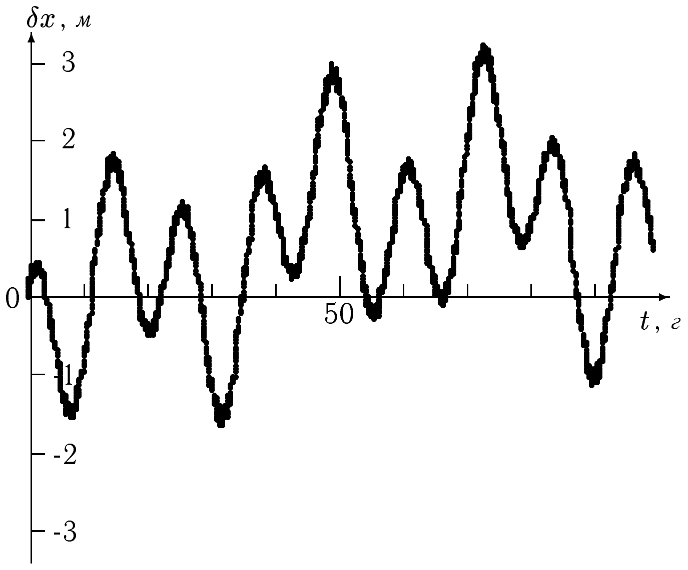
Зависимость функций δx^0 и δx^i от координат исчезает, а интегрирование по переменной x'^0 приводит к определенным интегралам

$$\delta x^i(t')=\frac{1}{c^2}\int_{t_0'}^{t'}\left(V_i'(x')-V_i(x')\right)dt',$$
$$\delta t(t')=\frac{1}{c^4}\int_{t_0'}^{t'}\Big(W'(x')-W(x')-$$
$$-\,c^2\frac{\partial U(x')}{\partial x'^i}\cdot\delta x^i(t')\Big)dt'.$$

Выражения, стоящие под знаком интеграла, суть известные функции координат и времени, вычисляются на основе численной теории движения Солнца, Луны и планет [2].

Существует два способа выполнения расчетов. В первом фиксирована точка с координатами x, y, z, и поправки на каждый следующий момент времени вычисляются именно для этой точки. Второй способ состоит в вычислении вариаций $\delta t(t')$, $\delta x^i(t')$ вдоль траектории движения небесного тела или космического аппарата.

Расчеты показали, что значения вариаций очень малы. Для пространственн-временной траектории Земли, например, они не превосходят 3 м на интервале 100 лет. Рисунок иллюстрирует результаты вычислений. Начальная точка совпадает с эпохой 2000.0, январь, 1.5.



Общий вывод состоит в следующей рекомендации. В прикладных задачах достаточно записать релятивистские уравнения движения пробной частицы на основе «гармонических» координатных условий, а при вычислении возмущающих сил — использовать «изотропные» координаты Солнца, Луны и планет.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М., 1973.
2. *Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G., Folkner W.F.* // JPL Planetary and Lunar Ephemeris, DE405/LE405 / JPL Inter office Memorandum. 1998. N 312.F-98-048. P. 1.
3. *Seidelmann P.K.* Explanatory supplement to the astronomical almanac. Sausalito, California, 1992.
4. *Копейкин С.М.* // Астрон. ж. 1986. **62**, № 5. С. 889.
5. Resolutions of the XXIVth General Assembly / Internat. Astron. Union, Information bulletin. 2001. **88**. P. 28.

Поступила в редакцию
25.02.05