УДК 517.958:530.12

РАЗВИТИЕ МЕТОДА АПЕРТУР В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНО-ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОМ ЛИНЗИРОВАНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

П. А. Вшивцева, И. В. Кривченков

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Разработан метод расчета коэффициента микролинзирования, позволяющий учитывать фазовые соотношения электромагнитных волн, пришедших от различных входных апертур. Основные идеи этого метода проиллюстрированы на примере задачи о нелинейно-электродинамическом и гравитационном микролинзировании электромагнитного излучения в пространстве-времени Рейснера–Нордстрема.

В настоящее время осуществляется несколько международных научных программ по наблюдению эффектов гравитационного линзирования и микролинзирования. В общей теории относительности при расчете эффекта гравитационного микролинзирования [1–2] широко используется метод апертур. С физической точки зрения метод апертур соответствует сложению потоков энергии электромагнитных волн от нескольких входных апертур, когда разности их фаз хаотически изменяются с течением времени.

Это означает, что при наблюдении когерентных источников, когда необходимо складывать не потоки энергии, а напряженности электромагнитных волн и учитывать разности фаз электромагнитных волн, распространяющихся по различным лучам, метод апертур неприменим и должен быть заменен более корректным методом.

Разработке такого метода и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим гравитационный центр массы M радиуса R_s, обладающий электрическим зарядом Q. В общей теории относительности гравитационное поле этого центра описывается метрикой Рейснера–Нордстрема [3]:

$$\begin{gathered} g_{00}^{(0)} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{\alpha}{r^2}, \\ g_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{g_{00}}, \quad g_{\theta\theta}^{(0)} = -r^2, \quad g_{\varphi\varphi}^{(0)} = -r^2\sin^2\theta, \end{gathered} \tag{1}$$

где $r_g = 2GM/c^2$ — гравитационный радиус тела, $\alpha = GQ^2/c^4$.

Тензор электромагнитного поля в этом случае будет иметь только две ненулевые компоненты: $F_{0r} = -F_{r0} = Q/r^2$.

Пусть на этот центр падает плоская электромагнитная волна частоты ω, волновой вектор которой направлен вдоль оси z. Согласно параметризованной постмаксвелловской электродинамике вакуума [4] электромагнитная волна в поле заряженного гравитирующего центра будет распространяться по изотропным геодезическим эффективного псевдориманова пространства-времени, метрический тензор которого g_{ik} зависит от поляризации волны:

$$g_{ik}^{(1,2)} = g_{ik}^{(0)} - 4\eta_{1,2}\xi F_{im}F^{m\cdot}_{\cdot k}, \tag{2}$$

где η_1 и η_2 — постмаксвелловские параметры; индексы у тензора F_{mk} поднимаются с помощью метрического тензора $g_{(0)}^{mp}$.

Поэтому при $\eta_1 \neq \eta_2$ любая электромагнитная волна, проходя через внешнее электромагнитное поле, разделяется на две нормальные волны, поляризованные ортогонально друг к другу, первая из которых распространяется по геодезическим эффективного псевдориманова пространства-времени с метрическим тензором $g_{(1)}^{ik}$, а вторая — по геодезическим пространства-времени с метрическим тензором $g_{(2)}^{ik}$.

Движение фотонов в эффективном псевдоримановом пространстве-времени (2) описывается уравнением

$$\frac{dk^m}{d\sigma} + \Gamma^m_{pn}k^pk^n = 0, \quad g_{nm}^{(1,2)}k^nk^m = 0, \tag{3}$$

где $k^m = dx^m/d\sigma$, σ — некоторый аффинный параметр, а Γ^m_{pn} — символы Кристоффеля эффективного псевдориманова пространства-времени с метрическим тензором $g_{nm}^{(1)}$ для нормальных волн первого типа и $g_{nm}^{(2)}$ — для нормальных волн второго типа.

В уравнениях системы (3) удобно перейти от дифференцирования по σ к дифференцированию по координате z в соответствии с равенством $d/d\sigma = (dz/d\sigma)d/dz = k^3 d/dz$ [5]. Комбинируя уравнения системы (3), запишем их в более удобном виде

$$\begin{gathered} \frac{d^2x^0}{dz^2} + \left\{\Gamma^0_{mi} - \frac{dx^0}{dz}\Gamma^3_{mi}\right\}\frac{dx^i}{dz}\frac{dx^m}{dz} = 0, \\ \frac{d^2x}{dz^2} + \left\{\Gamma^1_{mi} - \frac{dx}{dz}\Gamma^3_{mi}\right\}\frac{dx^i}{dz}\frac{dx^m}{dz} = 0, \\ \frac{d^2y}{dz^2} + \left\{\Gamma^2_{mi} - \frac{dy}{dz}\Gamma^3_{mi}\right\}\frac{dx^i}{dz}\frac{dx^m}{dz} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

В качестве начальных условий для системы уравнений (4) потребуем, чтобы луч начинался в точке $x = x_0$, $y = y_0$, $z = -L$, фотон начинал движение в момент времени $t = t_0$ и волновой вектор падающей электромагнитной волны в этой точке был параллелен оси z.

Если разложить уравнения (1) и (4) в ряды по малым параметрам r_g/r и $\xi Q^2/r^4$ с точностью, квадратичной по r_g/r и линейной по $\xi Q^2/r^4$, учесть, что x' и y' являются величинами первого порядка малости, а $ct = 1 + O(r_g/r)$, то получим

$$ct'' + \frac{r_g ct'}{2r^5}\Big\{z\Big[3z^2 + 6z(xx' + yy') - 2r^2(x'^2 + y'^2) + 3(xx' + yy')^2\Big] + r^2\Big[2(xx' + yy') - zc^2t'^2\Big]\Big\} + \frac{r_g^2 z}{2r^6}\left[z^2 + 3r^2\right] - \frac{2\alpha z^3}{r^6} + \frac{12\xi\eta Q^2 z(x^2 + y^2)}{r^8} = 0,$$

$$x'' + \frac{r_g}{2r^5}\Big[(2r^2 - 3z^2 + r^2c^2t'^2)(x - zx') - 6xz(xx' + yy') + x'^3 z(3x^2 - 2r^2) + x'y'^2 z(3y^2 - 2r^2) - x'^2 x(x^2 - 2y^2 - 8z^2) - xy'^2(3y^2 - 2r^2) - 6x'y'y(x^2 - z^2) + 6x'^2 y'xyz\Big] - \frac{r_g^2 x(z^2 + r^2)}{2r^6} - \frac{2\alpha x[r^2 - z^2]}{r^6} + \frac{4\xi\eta Q^2 x(4z^2 + x^2 + y^2)}{r^8} = 0,$$

$$y'' + \frac{r_g}{2r^5}\Big[(2r^2 - 3z^2 + r^2c^2t'^2)(y - zy') - 6yz(xx' + yy') + y'^3 z(3y^2 - 2r^2) + y'x'^2 z(3x^2 - 2r^2) - y'^2 y(y^2 - 2x^2 - 8z^2) - yx'^2(3x^2 - 2r^2) - 6x'y'x(y^2 - z^2) + 6y'^2 x'xyz\Big] - \frac{r_g^2 y(z^2 + r^2)}{2r^6} - \frac{2\alpha y[r^2 - z^2]}{r^6} + \frac{4\xi\eta Q^2 y(4z^2 + x^2 + y^2)}{r^8} = 0. \quad (5)$$

Первый интеграл $g_{nm}^{(1,2)} k^n k^m = 0$ системы уравнений (4) принимает вид

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - 1 - \frac{r_g}{r^3}\Big[z^2 + r^2c^2t'^2 - (xx' + yy')^2 + 2z(xx' + yy')\Big] - \frac{r_g^2 z^2}{r^4} + \frac{\alpha(z^2 + r^2)}{r^4} - \frac{4\xi\eta Q^2(4z^2 + x^2 + y^2)}{r^6} = 0. \quad (6)$$

Решение уравнений (5) и (6) будем искать в виде разложений

$$ct = ct_0 + z + r_g ct_1(z) + r_g^2 ct_2(z) + ct_3(z) + \xi\eta ct_4(z),$$
$$x = x_0 + r_g x_1(z) + r_g^2 x_2(z) + x_3(z) + \xi\eta x_4(z), \quad (7)$$
$$y = y_0 + r_g y_1(z) + r_g^2 y_2(z) + y_3(z) + \xi\eta y_4(z).$$

Подставляя выражения (7) в уравнения (5) и решая их, найдем значение времени и координат в плоскости $z = L$

$$ct = ct_0 + 2L + r_g \ln\frac{\sqrt{L^2 + r_0^2} + L}{\sqrt{L^2 + r_0^2} - L} - \frac{r_g L}{\sqrt{L^2 + r_0^2}} + r_g^2\left[\frac{15}{8r_0}\operatorname{arctg}\frac{L}{r_0} + \frac{L(16L^6 + 31L^4r_0^2 + 4L^2r_0^4 - 9r_0^6)}{8r_0^2(L^2 + r_0^2)^3}\right] + \alpha\left[\frac{L}{2(L^2 + r_0^2)} - \frac{3}{2r_0}\operatorname{arctg}\frac{L}{r_0}\right] + \xi\eta Q^2\left[\frac{3}{2r_0^3}\operatorname{arctg}\frac{L}{r_0} + \frac{L(3L^2 + 5r_0^2)}{2r_0^2(L^2 + r_0^2)^2}\right],$$
$$x = x_0 F, \quad y = y_0 F, \quad (8)$$

где введено обозначение

$$F = 1 - \frac{r_g L^2(2L^2 + 3r_0^2)}{r_0^2\sqrt{(L^2 + r_0^2)^3}} + r_g^2 L\left[\frac{L(L^2 + 15r_0^2)}{8r_0^2(L^2 + r_0^2)^2} - \frac{15}{8r_0^3}\operatorname{arctg}\frac{L}{r_0}\right] + \alpha L\left[\frac{3}{2r_0^3}\operatorname{arctg}\frac{L}{r_0} + \frac{L(3L^2 + 5r_0^2)}{2r_0^2(L^2 + r_0^2)^2}\right] - \xi\eta Q^2 L\left[\frac{9}{2r_0^5}\operatorname{arctg}\frac{L}{r_0} + \frac{L(9L^4 + 24L^2r_0^2 + 7r_0^4)}{2r_0^4(L^2 + r_0^2)^3}\right]. \quad (9)$$

Используя выражения (8) и (9) и учитывая аксиальную симметрию задачи, найдем координаты точки, в которой рассматриваемый луч пересечет плоскость $z = L$. Ограничиваясь асимптотически главными членами по малым параметрам r_0/L и полагая, что $r_0 > R_s$, получим $x = x_0 F_0$, $y = y_0 F_0$, где

$$F_0 = 1 - \frac{2r_g L}{r_0^2} - \frac{15\pi r_g^2 L}{16r_0^3} + \frac{3\pi\alpha L}{4r_0^3} - \frac{9\pi\xi\eta Q^2 L}{4r_0^5}. \quad (10)$$

Фотон, испущенный в момент времени t_0 из точки ($x = x_0$, $y = y_0$, $z = -L$), двигаясь по этому лучу, попадет в детектор в момент времени

$$ct = ct_0 + 2L + 2r_g \ln\frac{2L}{r_0} - r_g + r_g^2\left[\frac{15\pi}{16r_0} + \frac{2L}{r_0^2}\right] - \frac{3\pi\alpha}{4r_0} + \frac{3\pi\xi\eta Q^2}{4r_0^3}. \quad (11)$$

Электрическое и гравитационное поля в метрике (1) представляют собой гравитационную и нелинейно-электродинамическую линзу. Поэтому расчет коэффициента усиления потока электромагнитного излучения в такой линзе можно проводить методом апертур, слегка видоизменив его. Из-за аксиальной симметрии в качестве выходной апертуры удобно рассматривать кольцо радиуса ρ и толщины $d\rho$. Найдем входную апертуру, т. е. сечение плоскостью $z = -L$ всех тех пучков лучей, которые проходят через выходную апертуру. Выражения (8) и (10) дают искомое уравнение лучей

$$x_A = x_0 F_0, \quad y_A = y_0 F_0. \tag{12}$$

Из этой алгебраической системы уравнений нам необходимо определить x_0 и y_0 как функции x_A и y_A. Несложно убедиться, что эта система уравнений сводится к алгебраическому уравнению пятой степени, методов точного решения которого в настоящее время не существует.

Однако у нас имеется возможность решить эти уравнения приближенно, поскольку в уравнения (12) входят малые параметры и, кроме того, при $4\alpha < 5r_g^2$ все слагаемые этих уравнений действуют на лучи как собирающая оптическая линза. Поэтому полагая, что $r_g L < r_A^2$, и решая уравнения (12) методом последовательных приближений, находим, что они имеют по два корня, соответствующих двум типам лучей, начинающимся в двух различных входных апертурах и проходящих через одну и ту же выходную апертуру.

Радиусы $r_0^{(1)}$, $r_0^{(2)}$ первой и второй входных апертур, лучи из которых попадут в выходную апертуру, имеют вид

$$\begin{aligned} r_0^{(1)} &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}+r_A\right] + \\ &+ \frac{3\pi(5r_g^2-3\alpha)L}{4\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}+r_A\right]^2} + \frac{36\pi\xi\eta Q^2 L}{\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}+r_A\right]^4}, \\ r_0^{(2)} &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}-r_A\right] + \\ &+ \frac{3\pi(5r_g^2-3\alpha)L}{4\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}-r_A\right]^2} + \frac{36\pi\xi\eta Q^2 L}{\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}-r_A\right]^4}. \end{aligned} \tag{13}$$

Следует отметить, что должно выполняться условие $r_0^{(2)} > R_s$, иначе соответствующий луч попадет внутрь звезды и излучение поглотится ею. Это условие выполняется, если приемник электромагнитного излучения расположен на расстоянии $0 < r_A < 4r_gL/R_s - R_s$ от оси рассматриваемой оптической системы.

Найдем теперь отношение площадей входных апертур к площади выходной апертуры. Для лучей первого типа отношение площадей входной и выходной апертур принимает вид

$$\xi_1^2 = \frac{2\pi r_0^{(1)}\, dr_0^{(1)}}{2\pi r_A dr_A} = \frac{1}{4r_A\sqrt{r_A^2+8r_gL}} \times$$
$$\times\left[\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}+r_A\right]^2 - \frac{3\pi(5r_g^2-3\alpha)L}{2\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}+r_A\right]} - \right.$$
$$\left. - \frac{216\pi\xi\eta Q^2 L}{\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}+r_A\right]^3}\right].$$

Несложный расчет позволяет найти и отношение ξ_2^2 площадей входной и выходной апертур для лучей второго типа

$$\xi_2^2 = \frac{2\pi |r_0^{(2)}\, dr_0^{(2)}|}{2\pi r_A dr_A} = \frac{1}{4r_A\sqrt{r_A^2+8r_gL}} \times$$
$$\times\left[\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}-r_A\right]^2 - \frac{3\pi(5r_g^2-3\alpha)L}{2\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}-r_A\right]} - \right.$$
$$\left. - \frac{216\pi\xi\eta Q^2 L}{\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}-r_A\right]^3}\right].$$

Найдем разность фаз электромагнитных волн, приходящих к детектору из двух разных входных апертур. Так как плоскость $z = -L$ совпадает с фронтом падающей плоской электромагнитной волны, то электромагнитное излучение в этой плоскости имеет одинаковую фазу во всех ее точках. В дальнейшем электромагнитное излучение из двух входных апертур распространяется к выходной апертуре по различным лучам и фотоны затрачивают на эти пути разное время. Найдем эти промежутки времени. Подставляя выражения (13) в соотношения (11), учитывая, что разность фаз $\Delta\Psi$ электромагнитных волн, распространяющихся по лучам первого и второго типов в плоскости $z = L$, где расположен детектор, связана с частотой излучения ω и разностью времен $\Delta t = t_2 - t_1$ соотношением $\Delta\Psi = \omega\Delta t$, получим

$$\Delta\Psi = \omega\left\{\frac{2r_g}{c}\ln\frac{r_A+\sqrt{r_A^2+8r_gL}}{\sqrt{r_A^2+8r_gL}-r_A} + \right.$$
$$+ \frac{8r_g^2L}{c\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}-r_A\right]^2} - \frac{8r_g^2L}{c\left[r_A+\sqrt{r_A^2+8r_gL}\right]^2} +$$
$$+ \frac{3\pi(5r_g^2-4\alpha)}{8c\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}-r_A\right]} - \frac{3\pi(5r_g^2-4\alpha)}{8c\left[r_A+\sqrt{r_A^2+8r_gL}\right]} +$$
$$+ \frac{6\pi\xi\eta Q^2}{c}\left[\frac{1}{\left[\sqrt{r_A^2+8r_gL}-r_A\right]^3} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{\left[r_A+\sqrt{r_A^2+8r_gL}\right]^3}\right]\right\}.$$

Вклады в амплитуду результирующей волны в детекторе от этих областей пропорциональны ξ_1 и ξ_2 и различаются по фазе на $\Delta\Psi$.

Вычислим теперь коэффициент нелинейно-электродинамического и гравитационного микролинзирования электромагнитного излучения в метрике Рейснера–Нордстрема. Предположим, что детектор S расположен в выходной апертуре радиуса r_A. В этот детектор попадает излучение из двух входных апертур. Из-за нелинейно-электродинамического двулучепреломления вакуума во внешнем электромагнитном поле из каждой входной апертуры в детектор будут попадать две нормальные волны, одна из которых поляризована в плоскости, проходящей через ось z и центр детектора, а вторая — перпендикулярно этой оси. Обозначим амплитуду первой нормальной волны при $z=-L$ через $\mathbf{E}_{\|}$, а второй — через $\mathbf{E}_{\perp}$. Тогда вектор $\mathbf{E}$ первой нормальной волны, регистрируемой детектором при $z=L$, будет иметь вид

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_{\|}[\xi_1\cos(\omega t-kz)+\xi_2\cos(\omega t-kz+\Delta\Psi)]_{\eta=\eta_1},$$

где в выражениях для ξ_1, ξ_2 и η следует положить $\eta=\eta_1$. Поэтому усредненная по времени интенсивность первой нормальной волны I, регистрируемая детектором, будет равна

$$I=\frac{c\mathbf{E}_{\|}{}^2}{8\pi}\left[\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2\cos(\Delta\Psi)\right]_{\eta=\eta_1}.$$

Коэффициент нелинейно-электродинамического и гравитационного микролинзирования первой нормальной волны в метрике Рейснера–Нордстрема равен

$$K_{\|}=\left[\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2\cos(\Delta\Psi)\right]_{\eta=\eta_1}.$$

Для второй нормальной волны получим аналогичное выражение

$$K_{\perp}=\left[\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2\cos(\Delta\Psi)\right]_{\eta=\eta_2},$$

где в выражениях для ξ_1, ξ_2 и η следует положить $\eta=\eta_2$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 04-02-16604).

Литература

1. *Блиох П.В., Минаков А.А.* Гравитационные линзы. Киев, 1989.
2. *Грац Ю.В., Россихин А.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2004. № 6. С. 11 (Moscow University Phys. Bull. 2004. N 6. P. 12).
3. *Чандрасекар С.* Математическая теория черных дыр. М., 1986.
4. *Denisova I.P., Krivchenkov I.V., Vshivtseva P.A., Zubrilo A.A.* // Gen. Relat. Grav. 2004. **36**, N 4. P. 889.
5. *Denisov V.I., Svertilov S.I.* // Phys. Rev. D. 2005. **71**, N 6. P. 063002.

Поступила в редакцию
27.05.05