УДК 530.12:550.831

О ФИЗИЧЕСКОЙ НЕРЕАЛИЗУЕМОСТИ «ЧЕРНЫХ ДЫР» И ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ СПЕЦИФИЧЕСКИХ СВЕРХКОМПАКТНЫХ ОБЪЕКТОВ

Ю. М. Лоскутов

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Доказано, что физически реализуются лишь такие тела, у которых удвоенная масса $2M$ материи, заключенной под сферой радиуса Z (в стандартных координатах), не превышает этот радиус ($2M \leqslant Z$). Физической причиной этого является гравитационный дефект массы. При «стягивании» вещества в сколь угодно малую область масса тела тоже становится сколь угодно малой. Не исключается, однако, существование сверхкомпактных объектов с $Z_0 = 2M_0$ на поверхности. Исследованы физические характеристики таких объектов. Они могут вносить основной вклад в темную массу Вселенной и должны проявляться в эффекте гравитационного микролинзирования. При определенных условиях они могут создавать источники мощного рентгеновского излучения. Рассмотрена динамика пробных тел, падающих на подобные объекты.

Покажем, что в случае статических сферически симметричных тел полная система уравнений гравитации не содержит решений, соответствующих «черным дырам». При доказательстве будут использованы две формы основных гравитационных уравнений.

Одна из них — это *геометризованная* форма уравнений Гильберта–Эйнштейна*)

$$\tilde{R}^{\varepsilon\lambda} - \frac{1}{2} g^{\varepsilon\lambda} \tilde{R} = 8\pi T^{\varepsilon\lambda}, \tag{1}$$

дополненная условием гармоничности

$$\partial_\varepsilon \tilde{g}^{\varepsilon\lambda} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\tilde{R}^{\varepsilon\lambda} \equiv \sqrt{-g} R^{\varepsilon\lambda}$ — плотность тензора Риччи, $\tilde{R} \equiv g_{\varepsilon\lambda} \tilde{R}^{\varepsilon\lambda}$, $g_{\varepsilon\lambda}$ — метрический тензор риманова пространства, $\tilde{g}^{\varepsilon\lambda} \equiv \sqrt{-g}\, g^{\varepsilon\lambda}$, $g \equiv \det ||g_{\varepsilon\lambda}|| = \det ||\tilde{g}^{\varepsilon\lambda}||$, а $T^{\varepsilon\lambda}$ — плотность тензора энергии-импульса материи, формирующей тело.

Пусть в (1), (2) координаты x^α являются галилеевыми: $x^0 = t$, $\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^3 = r^2$. Тогда другая, *полевая*, форма тех же уравнений в тех же координатах запишется в виде [1, 2]

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{\Phi}^{\varepsilon\lambda} = 16\pi (T^{\varepsilon\lambda} + \tau^{\varepsilon\lambda}), \tag{3}$$

$$\partial_\varepsilon \tilde{\Phi}^{\varepsilon\lambda} = 0. \tag{4}$$

Здесь $\tilde{\Phi}^{\varepsilon\lambda} \equiv \sqrt{-\gamma} \Phi^{\varepsilon\lambda} \equiv \tilde{g}^{\varepsilon\lambda} - \tilde{\gamma}^{\varepsilon\lambda}$, $\tilde{\gamma}^{\varepsilon\lambda} \equiv \sqrt{-\gamma} \gamma^{\varepsilon\lambda}$, $\gamma \equiv \det ||\gamma_{\varepsilon\lambda}||$, $\gamma_{\varepsilon\lambda}$ — метрический тензор пространства Минковского, а плотность $\tau^{\varepsilon\lambda}$ энергии-импульса гравитационного поля определяется выражением

$$\begin{aligned} 16\pi\sqrt{-g}\tau^{\varepsilon\lambda} \equiv {} & \frac{1}{2}\left(g^{\varepsilon\alpha} g^{\lambda\beta} - \frac{1}{2} g^{\varepsilon\lambda} g^{\alpha\beta}\right) \times \\ & \times \left(g_{\nu\sigma} g_{\tau\kappa} - \frac{1}{2} g_{\tau\sigma} g_{\nu\kappa}\right) \cdot \partial_\alpha \tilde{\Phi}^{\tau\sigma} \partial_\beta \tilde{\Phi}^{\nu\kappa} + \\ & + g^{\alpha\beta} g_{\tau\sigma} \partial_\alpha \tilde{\Phi}^{\varepsilon\tau} \partial_\beta \tilde{\Phi}^{\lambda\sigma} - g^{\varepsilon\beta} g_{\tau\sigma} \partial_\alpha \tilde{\Phi}^{\lambda\sigma} \partial_\beta \tilde{\Phi}^{\alpha\tau} - \\ & - g^{\lambda\alpha} g_{\tau\sigma} \partial_\alpha \tilde{\Phi}^{\beta\sigma} \partial_\beta \tilde{\Phi}^{\varepsilon\tau} + \frac{1}{2} g^{\varepsilon\lambda} g_{\tau\sigma} \partial_\alpha \tilde{\Phi}^{\sigma\beta} \partial_\beta \tilde{\Phi}^{\alpha\tau} + \\ & + \partial_\alpha \tilde{\Phi}^{\varepsilon\beta} \partial_\beta \tilde{\Phi}^{\lambda\alpha}. \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение (3) легко преобразуется к стандартному для физических потенциалов виду

$$\Box \tilde{\Phi}^{\varepsilon\lambda} = 16\pi t^{\varepsilon\lambda}, \tag{6}$$

где

$$t^{\varepsilon\lambda} \equiv \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \left(T^{\varepsilon\lambda} + \tau^{\varepsilon\lambda}\right) - \frac{1}{16\pi} \partial_\alpha \left(\Phi^{\alpha\beta} \partial_\beta \tilde{\Phi}^{\varepsilon\lambda}\right).$$

Очевидно, что плотность $t^{\varepsilon\lambda}$ имеет здесь смысл плотности тензора энергии-импульса всей материи, т. е. вещества и гравитационного поля вместе взятых в пространстве Минковского.

Уравнения (1)–(6) примут ковариантный вид, если в них от частных производных ∂_α по галилеевым координатам перейти к ковариантным производным D_α в метрике Минковского $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ с произвольным выбором координат x^α и все входящие в уравнения величины преобразовать к этим координатам. Идентичность уравнений, представленных в геометризованной и полевой формах, при этом сохранится полностью. Указанная идентичность говорит о том, что динамика тел в римановом пространстве должна быть эквивалентной динамике тел в пространстве Минковского под действием гравитационного поля, формирующего риманову метрику. По сути это можно назвать уточненным принципом эквивалентности. В задачах о динамике тел в *заданном* поле источника, т. е. в задачах, когда движущееся тело можно считать пробным, удобнее пользоваться геометризованной формой уравнений Гильберта–Эйнштейна. В задачах же об излучении гравитационных волн естественнее использовать их полевую форму.

В ковариантной записи все фигурирующие в уравнениях величины приобретут истинно тензорный

---

*) Выбрана система единиц, в которой $c = \hbar = G = 1$.

характер. В частности, символы Кристоффеля образуют тензор третьего ранга

$$G^{\alpha}_{\varepsilon\lambda} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(D_{\varepsilon} g_{\beta\lambda} + D_{\lambda} g_{\beta\varepsilon} - D_{\beta} g_{\varepsilon\lambda}).$$

Тензорная плотность $t^{\varepsilon\lambda}$, подчиняющаяся уравнению $D_{\varepsilon} t^{\varepsilon\lambda} = 0$, позволяет ковариантным образом определить инертную массу M тела (или системы тел) и импульс P^k:

$$P^0 \equiv M \equiv \int t^{00}\, d^3x, \quad P^k \equiv \int t^{0k}\, d^3x, \tag{7}$$

где интегрирование ведется по пространству Минковского. Импульс P^{α} будет обладать всеми свойствами 4-вектора.

Из вида уравнений (6) можно заключить, что в случае нестационарного источника $T^{\varepsilon\lambda}$ решения этих уравнений должны содержать наряду с прочим и запаздывающие потенциалы. Следовательно, в системе должны генерироваться гравитационные волны. Так как в силу (4), (6) всегда имеет место равенство

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V t^{00}\, d^3x + \int\limits_V \frac{\partial t^{0k}}{\partial x^k}\, d^3x = 0,$$

то поток I гравитационного излучения через удаленную поверхность S, окружающую источник, будет определяться выражением

$$I = \oint\limits_S t^{0k}\, dS_k.$$

В плотности потока t^{0k} достаточно будет ограничиться удержанием асимптотики потенциалов, соответствующих расходящимся волнам (см. [1, 3], устремив там массу гравитона к нулю).

В случае статического сферически симметричного источника с плотностью

$$T^{\varepsilon\lambda} \equiv \sqrt{-g}\left[(\rho + p) u^{\varepsilon} u^{\lambda} - p g^{\varepsilon\lambda}\right],$$

где $p(r)$ и $\rho(r)$ определяют давление и плотность энергии источника в точке $\mathbf{r}$, $u^0 \equiv dx^0/ds$, $u^k \equiv dx^k/ds = 0$, квадрат интервала риманова пространства можно искать в виде

$$ds^2 = B\, dt^2 - A^{-1} \cdot Z'^2\, dr^2 - Z^2(r)\left(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\varphi^2\right),$$

где $Z' \equiv dZ/dr$.

Решение уравнений (1) или (3) при граничных условиях

$$B|_{r\to\infty} \to 1, \quad A|_{r\to\infty} \to 1,$$
$$\left.\frac{Z}{r}\right|_{r\to\infty} \to 1, \quad \left.\frac{rZ'}{Z}\right|_{r\to 0} \to 1$$

дает

$$\begin{aligned} &A = 1 - 2y, \\ &B = Ae^{-2\varepsilon} = \exp\left\{-2\int\limits_r^{\infty} \frac{y + 4\pi p Z^2}{1 - 2y}\,\frac{Z'}{Z}\, dr\right\}, \\ &\varepsilon \equiv 4\pi \int\limits_r^{\infty} \frac{(\rho + p) Z Z'}{1 - 2y}\, dr, \\ &y \equiv \frac{M}{Z}, \quad M \equiv 4\pi \int\limits_0^r \rho Z^2 Z'\, dr. \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнение (2) определяет $Z(r)$:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{BAZ^4}{Z'^2}\right) = 4BZ^2 r, \tag{9}$$

а уравнение $\nabla_{\varepsilon} T^{\varepsilon\lambda} = 0$, являющееся условием равновесия системы, связывает давление p с плотностью ρ:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2}(\rho + p)\,\frac{d}{dr}\ln B = -(\rho + p)\frac{y + 4\pi p Z^2}{1 - 2y}\,\frac{Z'}{Z}. \tag{10}$$

При $r \to \infty$ из (9) следует связь $Z \simeq r + M$. Асимптотическое значение $\tilde{\Phi}^{00} \equiv \tilde{g}^{00} - \tilde{\gamma}^{00}$, даваемое решениями (8), окажется равным $\tilde{\Phi}^{00} \simeq 4M/r$. Масса M здесь имеет смысл гравитационной массы. Как видно, полная гравитационная масса тела будет определяться выражением

$$M = \lim_{r\to\infty}\left(r\tilde{\Phi}^{00}/4\right).$$

С другой стороны, согласно (6) потенциал $\tilde{\Phi}^{00}$ можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}^{00} = 4\int \frac{t^{00}(\mathbf{r}')\, d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Отсюда следует, что полная инертная масса (7) тела связана с $\tilde{\Phi}^{00}$ тем же предельным соотношением

$$\int t^{00}\, d^3x = \lim_{r\to\infty}\left(r\tilde{\Phi}^{00}/4\right).$$

Это доказывает справедливость не только утверждения о равенстве полных гравитационной и инертной масс тела, но и справедливость определения инертной массы, данной в (7).

Проинтегрируем (9) по *внутренней* области $0 \leqslant r \leqslant r_0 \leqslant a$ тела, где a — радиус его сферической поверхности. Учитывая при этом (8), получим

$$\left(1 - \frac{2M_0}{Z_0}\right) = \frac{4Z_0'^2}{Z_0^4} \int\limits_0^{r_0} \lambda^2 Z^2 r\, dr. \tag{11}$$

Здесь $M_0 \equiv M(r_0)$, $Z_0 \equiv Z(r_0)$, $Z_0' \equiv Z'(r_0)$,

$$\lambda \equiv \exp\left\{-\int\limits_r^{r_0} \frac{y + 4\pi p Z^2}{1 - 2y}\,\frac{Z'}{Z}\, dr\right\} = \exp\left\{\int\limits_r^{r_0} \frac{dp}{\rho + p}\right\}.$$

Правая часть (11) ни при каких $r_0 \leqslant a$ не может быть отрицательной. Это значит, что всюду внутри тела и на его поверхности должно выполняться неравенство

$$2M_0 \leqslant Z_0. \tag{12}$$

По существу оно эквивалентно физическому условию монотонного спада внутреннего давления тела по мере удаления от центра к периферии (см. (10)). В сколь бы малой области ни было сосредоточено *все* вещество, неравенство (12) должно выполняться. При «стягивании» вещества в точку масса M_0 материи, формирующей тело, будет стремиться к нулю*). Таким образом, никакой сингулярности, соответствующей «черной дыре», здесь не возникает. Вместе с тем уравнение (11) не запрещает существование сверхкомпактных объектов, на поверхности которых реализуется равенство $2M_0 = Z_0$. На такой поверхности производная dZ/dr будет обращаться в нуль (заметим, что это будет иметь место и в теории с ненулевой массой гравитона). Из всего сказанного выше следует, что первоначально покоившееся вещество, заполнявшее какой-то сферический объем и обладавшее начальной энергией E, может собраться под действием собственного гравитационного поля в область с поверхностью $Z_0 = 2M_0$, где M_0 будет обусловлена значением E (см. ниже). Покажем, что физической причиной перечисленных результатов является гравитационный дефект массы, рассмотренный в работах [2, 5].

В работах [2, 5] было доказано, что плотность ρ в $T^{\varepsilon\lambda}$ формируется не только за счет всех видов энергии «голого» (без гравитационной «шубы») вещества, но и за счет *связанного* гравитационного поля, рожденного этим веществом:

$$\rho \equiv \rho\big|_{G=0} + \left(\rho - \rho\big|_{G=0}\right) \equiv \rho_s + \rho_{\text{gm}}, \tag{13}$$

где ρ_s — плотность «голого» вещества, а скаляр ρ_{gm} определяется согласно (5) выражением

$$\rho_{\text{gm}} \equiv \tau^{\varepsilon\lambda}\tilde{g}_{\varepsilon\lambda} \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{32\pi} g^{\alpha\beta}\left(\tilde{g}_{\varepsilon\sigma}\tilde{g}_{\lambda\tau} + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\varepsilon\lambda}\right) D_\alpha\tilde{\Phi}^{\tau\sigma} D_\beta\tilde{\Phi}^{\varepsilon\lambda} +$$
$$+ \frac{1}{16\pi\sqrt{-g}}\tilde{g}_{\varepsilon\lambda} D_\alpha\tilde{\Phi}^{\varepsilon\beta} D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\alpha}.$$

Если $\rho_s = 0$, то и $\rho_{\text{gm}} = 0$. Так как ρ отлична от нуля и внутри и вне тела, то в общем случае уравнение $\nabla_\varepsilon T^{\varepsilon\lambda} = 0$ будет описывать динамику не только внутренних элементов тела, но и внешних элементов материи, образуемой связанным гравитационным полем:

$$(\rho + p)\left(\frac{du^\alpha}{ds} + G^\alpha_{\varepsilon\lambda}u^\varepsilon u^\lambda\right) + \left(u^\alpha u^\varepsilon - g^{\alpha\varepsilon}\right) D_\varepsilon p = 0. \tag{14}$$

*) На такую возможность еще в 1962 г. указывал Я. Б. Зельдович [4].

Например, при поступательном движении уединенного тела из (14) последует, что и внешнее поле тела будет перемещаться так же, как само тело. В случае неподвижного статического сферически симметричного тела уравнение (14) трансформируется в уравнение равновесия (10). Его выполнение вне тела обеспечивает равновесие внешнего связанного гравитационного поля. С физической точки зрения это вполне понятно: если вне тела есть материя, обладающая ненулевой плотностью энергии, и она, материя, находится в состоянии равновесия, то должно существовать и уравнение, обеспечивающее это равновесие.

Чтобы построить гравидинамику *тел*, надо от плотностей энергии перейти к энергиям, т. е. взять интегралы по *всему* пространству Минковского от соответствующих выражений. Только после этого, как и в классической электродинамике заряженных распределенных сред (в форме разбросанных островков) и полей, возникнут члены гравитационных взаимодействий (ньютоновских и постньютоновских) [5], что даст возможность вводить лагранжианы систем. Простейший способ построения гравидинамики замкнутой системы тел — это вычисление ее сохраняющейся инертной массы в соответствии с выражениями (7) и с учетом (13), (6). Такой подход может оказаться эффективнее других в задачах о двойных звездах.

В силу того что плотность ρ зависит от потенциалов гравитационного поля, а тем самым и от M, выражение гравитационной массы в формулах (8) будет представлять собой интегральное уравнение для M. От него удобнее перейти к соответствующему дифференциальному уравнению для $y \equiv M/Z$

$$r\frac{dy}{dr} = \left\{3\alpha x^2\Theta(1-x) - y + 4\pi\rho_{\text{gm}}Z^2\right\} q =$$
$$= \left\{3\alpha x^2\Theta(1-x) - y - \left[\frac{7q^2 - 6qf + 2f^2}{1-2y} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 4 - 4q + 2f + \left(3 - \frac{4}{q} + \frac{4}{q^2}\right)(1-2y)\right]\right\} q. \tag{15}$$

Здесь $x \equiv Z/Z_0$, Z_0 — значение Z на границе тела $r = r_0 = a$, $\Theta(1-x) = 1$ при $x \leqslant 1$ и $\Theta(1-x) = 0$ при $x > 1$, и введены обозначения $\alpha \equiv 4\pi\rho_s Z_0^2/3$, $q \equiv rZ'/Z$, $f \equiv y + \tilde{p}x^2 + (1-2y)$, $\tilde{p} \equiv 4\pi p Z_0^2$. Явный вид $4\pi\rho_{\text{gm}}Z^2$ в (15) получен с помощью (8) и (9). Функции q и f согласно (9), (10) подчиняются уравнениям

$$(1-2y)r\frac{dq}{dr} + \left(r\frac{dy}{dr} - qf + 2q^2\right) q - (1-2y)q = 0. \tag{16}$$

$$(1-2y)r\frac{df}{dr} + fr\frac{dy}{dr} +$$
$$+ \left[f^2 - 4(1-2y)f + (1-2y) + 2(1-2y)^2\right] q = 0. \tag{17}$$

Проанализируем систему уравнений (15)–(17) в предположении $\alpha = \mathrm{const}$. Хотя такое условие не вполне реалистично, все же его принятие позволит получить некоторые принципиальные выводы о свойствах реально существующих объектов. Предположение о постоянстве α скажется на конкретном виде решений, но не на общих рассуждениях и выводах.

Решение этих уравнений в случае слабого поля ($\alpha \ll 1$) было найдено в работе [2]. Рассмотрим здесь случай сильного поля ($\alpha \gg 1$).

Из уравнения (15) видно, что в сколь бы малой области ни было сосредоточено все вещество, значение y на границе тела не сможет превысить величины $y_0 = 1/2$. Это обусловлено наличием в (15) полевого вклада $4\pi\rho_{\mathrm{gm}}Z^2$, обеспечивающего гравитационный дефект массы. Именно благодаря ему физическая реализация «черных дыр» становится невозможной: при «стягивании» вещества в точку связанное гравитационное поле «съедает» всю энергию «голого» вещества. Поэтому схлопывающееся под действием собственного гравитационного поля вещество, обладавшее перед началом схлопывания полной энергией E, в силу закона сохранения энергии не сможет сосредоточиться в сколь угодно малой области. Значение $Z \equiv Z_0$ на поверхности образовавшегося в результате схлопывания тела будет диктоваться значением полной энергии E, если пренебречь потерями на излучение. Так как

$$E = 4\pi \int\limits_0^{r_0} \rho Z^2 Z'\, dr + 4\pi \int\limits_{r_0}^{\infty} \rho_{\mathrm{gm}} Z^2 Z'\, dr \equiv M_0 + \Delta M_g,$$

то значение $Z_0 \geqslant 2M_0$ из-за отрицательного вклада ΔM_g должно будет заметно превышать значение $2E$. Если потери на излучения учесть, то $Z_0 = 2M_0 = 2E + 2|\Delta M_g| - 2\Delta E_{\mathrm{rad}}$.

В общем случае уравнения (15)–(17) не поддаются аналитическому решению. Удается найти лишь приближенные решения в примыкающей к поверхности тела малой окрестности $|\xi| \ll 1/\alpha$, где $\xi \equiv \ln(r/r_0)$. В основном порядке по ξ и степени α и с численными коэффициентами, взятыми с точностью до десятых долей единицы включительно, они имеют вид

$$f \simeq 2\alpha^{1/2}(1-2y)^{1/2}, \quad q \simeq (\alpha/2)^{1/2}(1-2y)^{1/2},$$
$$(1-2y)_{\mathrm{in}} \simeq \xi^4/k^2\alpha^2, \quad (1-2y)_{\mathrm{ext}} \simeq 9\alpha^3\xi^2/2, \quad (18)$$

где величина k должна определяться решением y во внутренней области тела, примыкающей к взятой окрестности*). Плотность ρ, давление p и величина $Z(r)$ будут определяться согласно (18) значениями

$$4\pi\rho Z^2\big|_{\mathrm{in}} \simeq \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}\xi}{k\alpha\sqrt{\alpha}}, \quad 4\pi p Z^2\big|_{\mathrm{in}} \simeq -\frac{1}{2} + \frac{2\xi^2}{k\sqrt{\alpha}},$$
$$4\pi\rho Z^2\big|_{\mathrm{ext}} \simeq -3\alpha + \frac{1}{2}, \quad 4\pi p Z^2\big|_{\mathrm{ext}} \simeq -\frac{1}{2} + 3\sqrt{2}\alpha^2\xi,$$
$$\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^2_{\mathrm{in}} \simeq 1 + \frac{\sqrt{2}\xi^3}{3k\sqrt{\alpha}}, \quad \left(\frac{Z}{Z_0}\right)^2_{\mathrm{ext}} \simeq 1 + \frac{3}{2}\alpha^2\xi^2, \quad (19)$$

где $Z_0 = 2M_0$.

Из полученных решений следует, что исходная полная система гравитационных уравнений допускает существование сверхкомпактных объектов (СКО) с $Z_0 = 2M_0(r_0)$ на границе. Они обладают следующими характерными свойствами.

1. На границе тела производная $dZ/dr \equiv Z_0'$ обращается в нуль. Это обстоятельство необходимо учитывать в динамике падающих на СКО частиц, если их удаление от центра СКО задавать посредством $Z(r)$. Действительно, так как производные по времени (dt или $d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt$) $\dot{Z}$ и $\dot{r}$ связаны соотношением $\dot{Z} = Z'\dot{r}$, то обращение в нуль $\dot{Z}$ на поверхности СКО не будет означать остановки частицы: значение $\dot{r}$ может оказаться при этом отличным от нуля.

2. В приповерхностной внутренней области r (при больших r_0 она может быть достаточно обширной) давление p и плотность ρ оказываются связанными условием $p \simeq -\rho$, выполняющимся с высокой точностью (тем большей, чем больше величина α); более того, с той же точностью их можно считать в данной области постоянными.

3. Вне тела в очень узкой области r давление связанного гравитационного поля быстро растет (от $p_0 = -1/8\pi Z_0^2$), приближаясь к нулю, а потенциал y из-за включения в массу энергии внешнего гравитационного поля тела быстро падает. Это позволяет оценить значение массы M_0 (т. е. и Z_0) в объеме тела, если известна его полная энергия E. Учитывая, что вне указанной узкой области справедливы соотношения

$$q \simeq 1 - y - 3y^2 - \frac{12}{35}\frac{Z_0}{Z}y^2, \quad 4\pi p Z^2 \sim y^3,$$

величину $4\pi\rho_{\mathrm{gm}}Z^2$ можно аппроксимировать вне тела выражением

$$4\pi\rho_{\mathrm{gm}}Z^2 \simeq -3y^2/(1-2y).$$

Тогда во внешней области уравнение (15) примет вид

$$Z\frac{dy}{dZ} \simeq -\frac{y(1+y)}{1-2y}. \quad (20)$$

Его интегрирование даст

$$M(Z) \simeq E \cdot (1+y)^3. \quad (21)$$

*) В решениях (18) в функциях f и q опущены множители вида $(1+\lambda_i\alpha\xi)$, где $\lambda_{1,2}$ являются числами. Более пристальный анализ уравнений (15)–(17) позволяет высказать предположение, что во внутренней области решения (18) справедливы в более широком интервале, нежели следует из условия $\alpha|\xi| \ll 1$. Поскольку, однако, доказать это строго не удалось, ограничение $\alpha|\xi| \ll 1$ пришлось сохранить.

Отсюда имеем*) $Z_0 = 2M_0 \simeq (27/4)E$. В случае схлопнувшегося тела роль E в (21) и в Z_0 играет разность исходной полной энергии E_0 тела и потерь ΔE_{rad} на излучения: $E = E_0 - \Delta E_{\mathrm{rad}} > 0$.

4. Метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ индуцируемого телом риманова пространства во всей области $0 \leqslant r \leqslant \infty$ остаются конечными. В приповерхностной области СКО коэффициент g_{rr} оказывается в силу (18) равным

$$g_{rr} = -\frac{Z'^2}{A} \simeq -\frac{\alpha Z^2}{2r^2}. \tag{22}$$

Метрический коэффициент $g_{00} \equiv B$ вне СКО примет согласно (8), (20) вид

$$B_{\mathrm{ext}} \simeq (1+y)^{-2}. \tag{23}$$

На границе тела $B_0 \simeq 4/9$. В приграничной внутренней области из (8), (18), (20) находим

$$B_{\mathrm{in}} \simeq \frac{4}{9}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\sqrt{2}\alpha}, \tag{24}$$

т. е. внутри СКО значение g_{00} может оказаться (при $\alpha \gg 1$) очень малым. Это значит, что излучения из внутренних областей СКО будут энергетически чрезвычайно ослабленными. Массивные частицы с физической скоростью v_p и с энергией $E = m\sqrt{B}\left(1 - v_p^2\right)^{-1/2}$, не превышающей $(2/3)m$, не смогут покинуть внутреннюю область СКО, даже если на их пути к поверхности СКО не произойдет потерь на столкновения. Другая ситуация имеет место во внешней области СКО. Если в ней по тем или иным причинам образовалась захваченная сильным гравитационным полем плазма, то средние квадратичные скорости ее компонент вполне могут достигать (в равновесии) значений $v^2 \sim 0.1$. Следовательно, из приповерхностной внешней области СКО может испускаться мощное рентгеновское излучение. Гравитационный сдвиг частот будет составлять при этом менее $1/3$. Если вне СКО плазма отсутствует, то такой объект окажется практически невидимым; проявляться будет лишь его гравитационный потенциал. Такие тела («реликтовые звезды»?) могли образоваться в ранней Вселенной и большей частью сосредоточиться в центральных областях галактик. Не исключено, что именно они дают основной вклад в темную массу Вселенной. Возможно, сердцевины обычных звезд также представляют собой образования, подобные СКО.

Остановимся в заключение на вопросе о динамике пробных частиц, падающих на СКО. Для этого, пользуясь уравнением $g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = m^2$, введем гамильтониан $p_0 \equiv H$ частицы

$$H = \left[g_{00}m^2 - g_{00}g^{kn}p_k p_n\right]^{1/2}.$$

*) Значение M_0 должно определяться внутренним решением уравнения (15). Из (21) по значению E можно лишь оценить M_0, если E определять по энергии взаимодействия с СКО удаленного от него тела. Вычислить M_0 и E точно, пользуясь (7) и (8), в случае сильного поля не удается.

Так как $\partial H/\partial t = 0$, то величина H будет сохраняющейся энергией E частицы: $H = E = \mathrm{const}$. Ограничимся далее частным случаем движения, когда $\dot{\Theta} = \dot{\varphi} = 0$ и

$$H = \left[Bm^2 + \frac{BA}{Z'^2}p_r^2\right]^{1/2}. \tag{25}$$

Отсюда имеем

$$v_r \equiv \frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{BA}{EZ'^2}p_r \equiv (\tilde{m})^{-1}p_r. \tag{26}$$

Значение $\tilde{m} \equiv EZ'^2\big/BA$ играет роль эффективной массы частицы, так как $p_r = \tilde{m}v_r$. Пусть частица, находившаяся в точке $r = r_1$, имела нулевую скорость. Тогда из (25) получим $E^2\big/m^2 = B_1$, а из закона сохранения энергии последует связь

$$p_r^2 = \frac{E^2 Z'^2}{BA}\left(1 - \frac{B}{B_1}\right). \tag{27}$$

Учитывая (27) в (26), найдем

$$\dot{r} = -\frac{\sqrt{BA}}{Z'}\left(1 - \frac{B}{B_1}\right)^{1/2}. \tag{28}$$

На поверхности СКО в силу (22), (23) имеем

$$\dot{r}\big|_{r_0} \simeq -\frac{2\sqrt{2}r_0}{3Z_0\sqrt{\alpha}}\left(1 - \frac{4}{9B_1}\right)^{1/2}. \tag{29}$$

Стало быть, частица продолжит свое движение внутрь СКО. Если вместо динамики r (т. е. динамики положений частицы) рассмотреть динамику Z, то выражение (28) заменится уравнением

$$\dot{Z} = -\sqrt{BA}\left(1 - \frac{B}{B_1}\right)^{1/2}. \tag{30}$$

Отсюда видно, что на границе СКО $\dot{Z}|_{r_0} = 0$, т. е. уменьшение Z на границе прекращается. Однако это не означает остановки частицы. Различие в поведении $\dot{r}$ и $\dot{Z}$ возникает из-за наличия в величине Z вклада от гравитационного поля, что хорошо видно из полевой интерпретации гравитационных уравнений. Например, в случае слабых полей (см. [2])

$$\left.\frac{Z}{r}\right|_{\mathrm{ext}} \simeq 1 + \frac{M}{r}, \quad M \neq \mathrm{const}.$$

Чтобы найти ускорение $\ddot{r} \equiv d^2r/dt^2$ падающей частицы, воспользуемся уравнением Гамильтона

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{EZ'^2}{2BA}\left[\frac{BA}{B_1 Z'^2}\frac{dB}{dr} + \dot{r}^2\frac{d}{dr}\ln\frac{BA}{Z'^2}\right]. \tag{31}$$

Подставляя сюда p_r из (26), приведем (31) с учетом (28), (8) и (9) к виду

$$\tilde{m}\left[\ddot{r}+\dot{r}^2\frac{d}{dr}\ln\tilde{m}\right]=-\tilde{m}\frac{B}{ZZ'}\times$$
$$\times\left[\frac{B}{B_1}\left(y+4\pi pZ^2\right)+2\frac{rZ'}{Z}\left(1-\frac{B}{B_1}\right)\left(1-\frac{ZA}{rZ'}\right)\right]. \tag{32}$$

Выражения, стоящие в (31), (32) справа, являются силой притяжения, действующей на частицу со стороны СКО; во всей области r эта сила направлена в сторону центра СКО. Вместе с тем из-за наличия в уравнении слагаемого

$$\tilde{m}\dot{r}^2\frac{d}{dr}\ln\tilde{m}=-\tilde{m}\frac{4Br}{Z^2}\left(1-\frac{B}{B_1}\right)\left(1-\frac{A}{q}\right) \tag{33}$$

движущаяся (но не покоящаяся!) частица будет испытывать эффективное торможение в силу зависимости $\tilde{m}$ от r. Учитывая (33) в (32), для ускорения $\ddot{r}$ получим выражение

$$\ddot{r}=\frac{2Br}{Z^2}\left[-\frac{B}{B_1}\frac{y+4\pi pZ^2}{2q}+\left(1-\frac{B}{B_1}\right)\left(1-\frac{A}{q}\right)\right]. \tag{34}$$

Вдали от СКО это дает известный результат: $\ddot{r}\simeq -M/r^2$. Вблизи поверхности СКО из (34) с учетом (18) имеем

$$\ddot{r}\big|_{r\geqslant r_0}\simeq -\frac{8r_0}{9Z_0^2}\left[\frac{4(1+\sqrt{2})}{9B_1}-1\right]<0. \tag{35}$$

Пользуясь (30), найдем вторую производную $\ddot{Z}$:

$$\ddot{Z}=\frac{B}{Z}\left[\left(y-4\pi\rho Z^2\right)\left(1-\frac{B}{B_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(y+4\pi pZ^2\right)\left(1-2\frac{B}{B_1}\right)\right]. \tag{36}$$

При больших r (а значит, и Z) отсюда следует известный результат: $\ddot{Z}\simeq -M/Z^2$. Во внешней приповерхностной области СКО согласно (19) из (36) получим

$$\ddot{Z}\big|_{\rm ext}\simeq\frac{4\alpha}{3Z_0}\left(1-\frac{4}{9B_1}\right)>0. \tag{37}$$

Во внутренней, примыкающей к поверхности СКО, области

$$\ddot{Z}\big|_{\rm in}\simeq\frac{8\sqrt{2}\xi}{9kZ_0\alpha^{3/2}}\left(1-\frac{4}{9B_1}\right)\leqslant 0. \tag{38}$$

Переход в расчетах от производных по dt к производным по собственному времени $d\tau=\sqrt{B}\,dt$ или по инварианту $ds=(m/E)B\,dt$ не вносит принципиальных изменений в полученные результаты.

В рассмотренной динамической задаче начальное положение r_1 пробной частицы с нулевой начальной скоростью выбиралось произвольно. Если его совместить с r_0, т. е. если отпустить частицу с поверхности СКО, то, положив в (29), (30), (35) и (37), (38) $B_1=B_0\simeq 4/9$, найдем

$$\dot{r}\big|_{r_0}=\dot{Z}\big|_{r_0}=0,\quad \ddot{Z}\big|_{r_0}=0,\quad \ddot{r}\big|_{r_0}\simeq-\frac{8\sqrt{2}r_0}{9Z_0^2}<0. \tag{39}$$

Из сравнения (39) с (37) видно, что результат (37) возникает только тогда, когда физическая скорость частицы $v_p=-\left[1-B(m/E)^2\right]^{1/2}=-[1-B/B_1]^{1/2}$ на поверхности СКО отлична от нуля. Обращение же на этой поверхности значения $\dot{Z}$ из (30) в нуль обязано коэффициенту A, входящему в метрический коэффициент g_{rr}, но не в g_{00}! Стало быть, эффективное торможение падающей частицы обязано наличию у нее ненулевой физической скорости, играющей главную роль в слагаемом (33), *ведущем к торможению*, и наличию связи между $\dot{Z}$ и g_{rr}. Эффективное торможение органически присуще релятивистской динамике частиц. Обусловлено это нелинейностью функциональной связи координатной скорости частицы с ее каноническим ковариантным импульсом. Последствия эффективного торможения будут зависеть, естественно, от свойств полей, в которых движется частица. В гравитационном поле статического сферически симметричного источника эти последствия были описаны выше. К ним можно лишь добавить, что в таком поле физическая скорость $v_p\equiv dl/d\tau$ и физическое ускорение $w_p\equiv d^2l/d\tau^2$ частицы, где dl и $d\tau$ являются элементами физической длины и собственного времени, имеют значения

$$v_p=-\left(1-\frac{B}{B_1}\right)^{1/2},$$
$$w_p=-\frac{B\sqrt{A}}{2B_1}\frac{\partial}{\partial Z}\ln B=-\frac{B}{B_1}\frac{y+4\pi pZ^2}{Z\sqrt{1-2y}}.$$

Они всюду отрицательны, а на границе СКО равны

$$v_p\big|_{r_0}\simeq-\left(1-\frac{4}{9B_1}\right)^{1/2},\quad w_p\big|_{r_0}\simeq-\frac{8\sqrt{\alpha}}{9B_1Z_0},$$

т. е. остановка частицы и ее отскок от тела невозможны. После проникновения частицы внутрь СКО значение ρ_s, а значит, и α в (15) очень незначительно изменится. Это приведет к столь же незначительному изменению решений уравнения (15), опять обеспечивающему выполнение условия $2M\leqslant Z$.

Литература

1. *Лоскутов Ю.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. № 4. С. 49 (Moscow University Phys. Bull. 1991. N 4. P. 46).
2. *Лоскутов Ю.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 4. С. 29 (Moscow University Phys. Bull. 2001. N 4. P. 33).
3. *Лоскутов Ю.М.* // ТМФ. 1996. **107**, № 4. С. 329; *Loskutov Yu.M.* // Proc. VI Marcel Grossman Meeting on Gen. Rel. Part B. Kyoto, Japan, 1991. P. 1658.
4. *Зельдович Я.Б.* // ЖЭТФ. 1962. **42**, № 2. С. 641.
5. *Лоскутов Ю.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2003. № 4. С. 19 (Moscow University Phys. Bull. 2003. N 4. P. 26).

Поступила в редакцию
22.06.05