ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958; 621.372.8

О СПОСОБЕ ПОВЫШЕНИЯ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА В ЗАДАЧАХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ

М. Д. Малых

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Рассмотрена задача о возбуждении установившихся колебаний в волноводе. Показано, что неэквивалентная ей задача, нижняя граница непрерывного спектра которой выше, чем у исходной, может быть использована для доказательства фредгольмовости. Это доказательство не использует ни бесконечных сумм, ни специфических функциональных пространств.

Поскольку локализованный в пространстве волновода ток $je^{i\omega t}$ создает поле в дальней зоне при частотах, больших первой частоты отсечки, это поле заведомо не является элементом пространства L^2, и потому для доказательства фредгольмовой разрешимости задачи о возбуждении установившихся колебаний приходится рассматривать некоторые вспомогательные задачи, тем или иным способом отрезая бесконечную часть области и поднимая нижнюю границу непрерывного спектра [1, 2]. Обычно при этом стремятся к тому, чтобы получить эквивалентную задачу, т. е. чтобы существование решения одной из них влекло существование решения другой, жертвуя простотой задачи. Из-за этого возникают сложные функциональные пространства, в которых применение стандартных методов функционального анализа (теории возмущений, например) представляет отдельную и в общем виде до сих пор не решенную задачу. В настоящей работе пожертвуем как раз эквивалентностью и покажем, что это не мешает доказательству фредгольмовости.

В качестве волноведущий системы рассмотрим следующий достаточно общий случай. Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, состоящая из компактной области X_0 (резонатора) и цилиндра X_1 постоянного сечения S; пусть q — вещественная кусочно-непрерывная функция, характеризующая заполнение волновода, а f — гладкая функция, характеризующая распределение тока внутри волновода. Пусть, далее, носители $\operatorname{supp}(q-1)$ и $\operatorname{supp} f$ лежат в резонаторе. Направим ось Ox по оси цилиндра, а переменные, меняющиеся вдоль сечения цилиндра S, обозначим как y. Пусть X выходит на цилиндр при $x=a_0$. Далее, обозначим как ψ_n и α_n собственные функции и собственные значения задачи Дирихле на сечении S, т. е.

$$\Delta\psi+\alpha^2\psi=0, \quad \psi\in \mathring{W}_2^1(S).$$

Задачу о возбуждении установившихся колебаний возьмем для простоты в скалярной постановке

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda q u=f, & x\in X,\\ u=0, & x\in\partial X,\end{cases} \tag{1}$$

с парциальными условиями излучения. Понятие обобщенного решения введем следующим образом.

Определение. Функция

$$u=v+w,$$

где $v\in \mathring{W}_2^1(X)$, а w — один раз непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям $w|_{\partial X}=0$ и парциальным условиям излучения

$$w=\sum_{n:\ \lambda>\alpha_1^2} K_n e^{i\sqrt{\lambda-\alpha_1^2}\,|x|}\psi_n(y)+\mathring{W}_2^1(X), \quad (x,y)\in X_1,$$

называется обобщенным решением (1), если

$$\int\limits_X d\tau\, u(\Delta+\lambda q)g^*-fg^*=0 \ \ \forall\, g\in C_0^\infty(X), \tag{2}$$

где $d\tau=dx\,dy$ — элемент объема области X.

При $\lambda<\alpha_1^2$ обобщенное решение u является просто элементом $\mathring{W}_2^1(X)$. В этом пространстве в силу теоремы Рисса задача может быть записана как

$$u-\lambda Au=Hf,$$

где A и H — самосопряженные операторы и, как и в случаях, рассмотренных в [3] и в [4],

$$\sigma_{\text{ess}}(A)=[\alpha_1^2,\infty).$$

Поэтому при $\lambda<\alpha_1^2$ задача (1) — фредгольмова в гильбертовом пространстве $\mathring{W}_2^1(X)$, т. е. при данном

λ или существует единственное ее решение из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$, или имеется нетривиальное решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$ однородной задачи. Это решение называется ловушечной модой, отвечающей изолированному собственному значению λ.

Для того чтобы аналогично рассмотреть случай $\lambda \in (\alpha_1^2, \alpha_2^2)$, нужно поднять нижнюю границу непрерывного спектра. С этой целью зададимся произвольным числом $a \geqslant a_0$ и введем вспомогательное пространство $\mathfrak{H}$, образованное всеми функциями $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$, для которых

$$\int\limits_S v(x,y)\psi_1(y)\,dy = 0 \quad \forall\ x \geqslant a.$$

В силу теоремы о следах это условие имеет смысл во всем $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S)$. Рассмотрим теперь в пространстве $\mathfrak{H}$ обобщенную задачу

$$\int\limits_X d\tau(\nabla g, \nabla v) - \lambda q g^* v + g^* f = 0 \quad \forall\ g \in \mathfrak{H}. \qquad (3)$$

В силу теоремы Рисса эта задача может быть записана как

$$v - \lambda A v = Hf,$$

где A и H — самосопряженные операторы и $\sigma_{\text{ess}}(A) = [\alpha_2^2, \infty)$. Поэтому при рассматриваемых λ эта задача фредгольмова. Решение задачи (3) будем для краткости обозначать как $v = v(a)$, указывая лишь на существенную для всего дальнейшего зависимость от a.

Решение этой вспомогательной задачи (3) не является, конечно, решением (1), но при его помощи можно таковое построить.

Теорема. *Если при данном $\lambda \in (\alpha_1^2, \alpha_2^2)$ и при некоторых a_1 и a_2 существуют решения $v(a_1)$ и $v(a_2)$ задачи* (3) *при $a = a_1$ и $a = a_2$ соответственно, то и задача Дирихле* (1) *имеет решение, которое внутри резонатора есть линейная комбинация $v(a_1)$ и $v(a_2)$.*

Доказательство. 1. Пусть $v = v(a)$ и f — вещественная функция. Покажем, что можно подобрать такую элементарную функцию $w(x)$, что функция

$$u = v + \psi_1(y) w(x)$$

будет удовлетворять соотношению

$$\int\limits_X d\tau\,(\nabla g, \nabla v) - \lambda q g^* v + g^* f = 0 \quad \forall\ g \in C_0^\infty(X).$$

В самом деле, поскольку множество гладких функций, носитель которых лежит в области $|x| \leqslant a$, принадлежит $\mathfrak{H}$, функция $v \in \mathfrak{H} \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_X d\tau\,(\nabla g, \nabla v) - \lambda q g^* v + g^* f = 0 \quad \forall\ g \in C_0^\infty(X_0).$$

(Отсюда в силу леммы Вейля видно, что $v(a)$ — классические решения задачи (1) в резонаторе.)

В цилиндре X_1, где $q \equiv 1$, верно и уравнение

$$\int\limits_X d\tau(\nabla g(x)\psi_n, \nabla v) - \lambda g(x)\psi_n v = 0$$

для любой g с компактным носителем и $n > 1$. При $n = 1$ выражение $g(x)\psi_1(y)$ принадлежит $\mathfrak{H}$ лишь в случае, когда $g(x) \equiv 0$ при $x > a$.

Заметим, что функцию

$$v_1(x) = \int\limits_S dy v \psi_1$$

можно найти явно с точностью до множителя, а именно, она удовлетворяет условию

$$v_1'' + (\lambda - \alpha_1^2) v_1 = 0$$

при $a_0 < x < a$, и $v \in \mathfrak{H}$ дает $v_1(x) \equiv 0$ при $x > a$, поэтому

$$v_1(x) = \begin{cases} k \sin\left[\sqrt{\lambda - \alpha_1^2}(x - a)\right], & x \in (a_0, a), \\ 0, & x \geqslant a, \end{cases}$$

где k — некоторая вещественная константа, зависящая от a, λ и f. Положим

$$u = v + w(x)\psi_1(y),$$

где

$$w(x) = h(x - a) k \sin\left[\sqrt{\lambda - \alpha_1^2}(x - a)\right],$$

h — функция Хевисайда, т. е. продолжим $v_1(x)$ симметрично через точку $x = a$. По построению очевидно, что уравнение

$$\int\limits_X d\tau\,(\nabla g(x)\psi_1, \nabla u) - \lambda g(x)\psi_1 u = 0$$

удовлетворяется при всех $g(x)$ с компактным носителем и $g(a) = 0$.

Покажем, что последнее условие излишне. Для этого возьмем произвольную $g(x)$ с носителем в $(a_0, a_0 + 2(a - a_0))$ и, используя то, что в этой области $w(a + t) = -w(a - t)$, получим

$$\int\limits_X d\tau\,(\nabla g(x)\psi_1, \nabla u) - \lambda g(x)\psi_1 u =$$

$$= \int\limits_0^{a-a_0} dt\,[g(a+t) - g(a-t)]' w' -$$

$$- (\lambda - \alpha_1^2)[g(a+t) - g(a-t)] w = 0,$$

поскольку $g(a+t)-g(a-t)$ обращается в нуль при $t=0$, т. е. $x=a$.

В силу ортогональности ψ_n доказанное можно объединить в равенство

$$\int\limits_X d\tau\,(\nabla g(x)\psi_n, \nabla u) - \lambda g(x)\psi_n u = 0$$

$$\forall\ g \in C_0^\infty(a_0, \infty), \quad n = 1, 2\ldots,$$

откуда в силу полноты ψ_n в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S)$ видно, что

$$\int\limits_X d\tau\,(\nabla g, \nabla v) + \lambda q g^* v + g^* f = 0 \quad \forall\ g \in C_0^\infty(X_1).$$

2. Решение $u(a)$, построенное выше, не удовлетворяет парциальным условиям излучения. Вместо них верно условие

$$u = k(a)\sin\left[\sqrt{\lambda - \alpha_1^2}(x-a)\right] + \overset{\circ}{W}{}_2^1(X),$$

где $k(a)$ — некоторая константа, зависящая, вообще говоря, от a. Рассмотрим теперь линейную комбинацию двух таких функций

$$U := c_1 u(x, y; a_1) + c_2 u(x, y; a_2).$$

В силу линейности всех задач U будет решением (1) лишь если

$$c_1 + c_2 = 1.$$

Покажем, как подобрать эти константы так, чтобы U удовлетворяла и парциальным условиям излучения

$$U = Ke^{i\sqrt{\lambda-\alpha_1^2}\,x} + \overset{\circ}{W}{}_2^1(X).$$

Это условие приводит к системе

$$\begin{cases} k(a_1)e^{-i\gamma_1 a_1}c_1 + k(a_2)e^{-i\gamma_1 a_2}c_2 - K = 0, \\ k(a_1)e^{+i\gamma_1 a_1}c_1 + k(a-2)e^{+i\gamma_1 a_2}c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 = 1, \end{cases} \tag{4}$$

определитель которой равен

$$k(a_2)e^{i\gamma_1 a_2} - k(a_1)e^{i\gamma_1 a_1}$$

и может обратиться в нуль при вещественных k лишь при $k(a) = k(b) = 0$. Но если $k(a) = 0$, то $u(x, y; a)$ не терпит разрыва при $x = a$ и само есть решение (1) в X. Теорема доказана.

Заметим теперь, что задача (3) фредгольмова при $\lambda \in (\alpha_1^2, \alpha_2^2)$, поскольку этот участок не вложен в непрерывный спектр. Поэтому при данном значении параметра a и данном значении λ или имеется решение неоднородной задачи (3), или λ — собственное значение, т. е. при этом значении задача

$$\int\limits_X d\tau\,(\nabla g, \nabla v) - \lambda q g^* v = 0 \quad \forall\ g \in \mathfrak{H} \tag{5}$$

имеет нетривиальное решение. В силу теорем регулярной теории возмущений собственное значение этой задачи зависит от a непрерывно, поэтому если при некотором значении $a = a_1$ число λ не является собственным значением, то же верно и для всех достаточно близких к $a = a_1$ значений. Значит, если задача (3) имеет решение при $a = a_1$, то обязательно и при некотором другом значении a. Используя это замечание, доказанную теорему можно сформулировать в виде альтернативы: или задача (3) имеет решение при некотором значении a, и тогда задача (1) тоже имеет решение, или λ является собственным значением (5) при всех значениях a.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00146).

Литература

1. *Делицын А.Л.* // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 4. С. 606.
2. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* // Радиотехника и электроника. 2005. **50**. № 2. С. 218.
3. *Jones D.S.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1954. **49**. P. 668.
4. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 2002. **42**. № 12. С. 1833.
5. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г.* // Докл. РАН. 2002. **385**. № 6. С. 744.

Поступила в редакцию
03.06.05