

УДК 517.958:621.372.8

МЕТОД ПРОЕКЦИОННОГО СШИВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА СКАЧКЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

Ю. В. Лазарева, **В. П. Моденов**

(кафедра математики)

E-mail: ylazar@list.ru

Методом проекционного сшивания вычислена матрица рассеяния аксиально-симметричных электромагнитных волн на скачке поперечного сечения круглого волновода с идеально проводящей боковой поверхностью.

Введение

Задача дифракции волны H_{0n} на скачке поперечного сечения круглого волновода относится к классическим задачам теории волноводов [1], ее актуальность обусловлена практической значимостью. Задача является ключевой при математическом моделировании целого ряда волноводных устройств. Ее решение находит применение в проблеме разработки элементов магнитной памяти для современных ЭВМ. Многообразие применений вызвало потребность в дальнейшем развитии различных методов решения этой задачи [1–6], в частности метода проекционного сшивания [7–11].

Цель настоящей работы — на примере решения рассматриваемой задачи проиллюстрировать эффективность вычислительного алгоритма, основанного на методе проекционного сшивания, позволяющего учесть в интегральном смысле условия Мейкснера «на ребре», условия сопряжения и граничные условия на металлической поверхности волновода в общей плоскости поперечного сечения двух полубесконечных волноводов.

1. Математическая постановка задачи

Выберем цилиндрическую систему координат r, φ, z , такую, что ось Oz направлена вдоль волновода, плоскость сочленения двух областей волновода с поперечными сечениями S^I, S^{II} описывается уравнением $z = 0$ (рис. 1).

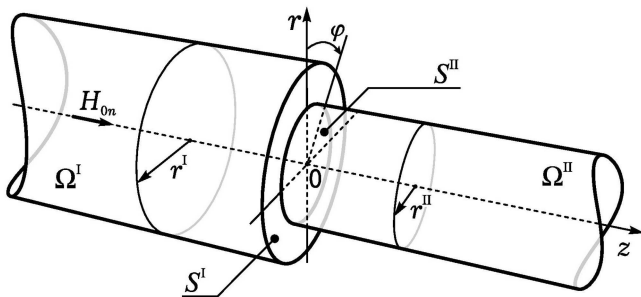


Рис. 1. Схема волновода

Математическая задача состоит в нахождении решения $u(r, z) = E_\varphi$ уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) u = 0 \quad (1)$$

в области $\Omega = \Omega^I \cup \Omega^{II} \cup S^I \cap S^{II}$, где $\Omega^I = \{(r, z) | 0 < r < r^I, -\infty < z < 0\}$, $\Omega^{II} = \{(r, z) | 0 < r < r^{II}, 0 < z < \infty\}$.

Решение должно удовлетворять следующим условиям:

1) граничному условию Дирихле на идеально проводящей металлической поверхности

$$u|_{\partial\Omega} = 0;$$

2) условиям излучения и возбуждения (требованию отсутствия волн, приходящих из $\pm\infty$, кроме заданных падающих волн)

$$u(r, z) = \begin{cases} u^I = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n^I(r) \exp(i\gamma_n^I z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n^I(r) \exp(-i\gamma_n^I z) & \text{при } z < 0, \\ u^{II} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n^{II}(r) \exp(i\gamma_n^{II} z) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \varphi_n^{II}(r) \exp(-i\gamma_n^{II} z) & \text{при } z > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $A_n = \delta_{n1}$ — амплитуды падающих из $-\infty$ нормальных волн в первой области; B_n, C_n — амплитуды отраженных и прошедших волн; D_n — амплитуды волн, падающих из $+\infty$ во второй области; $\{\varphi_n^j(r)\}$, $\lambda_n^j = \left(\frac{\mu_n}{r^j}\right)$ — система собственных функций и собственных значений поперечных сечений S^I и S^{II} , которая имеет вид

$$\varphi_n^j = \frac{J_1(\lambda_n^j \cdot r)}{\|J_1(\lambda_n^j \cdot r)\|},$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка (временная зависимость взята в виде $e^{-i\omega t}$; μ_n — корни уравнения $J_1(\mu_n) = 0$; $\gamma_n^j = \sqrt{k^2 - \lambda_n^{j2}}$ — постоянные распространения; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число падающей волны.

Системы собственных функций полны и ортогональны:

$$\int_0^{r^I} \varphi_n^I(r) \varphi_m^I(r) r dr = \delta_{nm}, \quad \int_0^{r^{II}} \varphi_n^{II}(r) \varphi_m^{II}(r) r dr = \delta_{nm}; \quad (3)$$

3) условию сопряжения (требованию непрерывности u и $\frac{\partial u}{\partial z}$ в области S^{II} при $z = 0$);

4) условию Мейкснера $\int_{\Delta V} (|u|^2 + |\text{grad } u|^2) dV < \infty$ для любой конечной области ΔV , содержащей границу кольца $S^I \setminus S^{II}$ при $z = 0$.

Потребуем, чтобы решение удовлетворяло интегральным условиям проекционного сшивания [8] в плоскости $z = 0$

$$\begin{cases} \int_0^{r^I} u^I|_{z=0} \varphi_m^I(r) r dr = \int_0^{r^{II}} u^{II}|_{z=0} \varphi_m^I(r) r dr, \\ \int_0^{r^{II}} \frac{\partial u^I}{\partial z}|_{z=0} \varphi_m^{II}(r) r dr = \int_0^{r^{II}} \frac{\partial u^{II}}{\partial z}|_{z=0} \varphi_m^{II}(r) r dr. \end{cases} \quad (4)$$

Из выполнения условий (4) (непрерывности потока энергии) следует выполнение условия Мейкснера, условий сопряжения в среднем, а также выполнение в интегральном смысле граничного условия при $z = 0$ в области S^{II} .

2. Численный алгоритм решения

Приближенное решение u^N в каждой из частичных областей Ω^I и Ω^{II} будем искать в виде конечных сумм в выражениях (2). Это приближенное решение удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1) и граничному условию.

Подставляя u^N в проекционные соотношения (4) и учитывая условия ортогональности (3), получим конечную систему линейных алгебраических уравнений для определения приближенных искомых коэффициентов разложения B_n и C_n , которую запишем в матричном виде

$$M \cdot X = K. \quad (5)$$

Здесь M — матрица коэффициентов левой части системы уравнений:

$$M = \begin{pmatrix} W_{11} & -W_{12} \\ (i\gamma_n^I) \cdot W_{21} & (i\gamma_n^{II}) \cdot W_{22} \end{pmatrix},$$

$K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$ — вектор правой части системы уравнений, $X = \begin{pmatrix} B_n \\ C_n \end{pmatrix}$ — искомый вектор.

Матрицы W_{11}, W_{22} состоят из следующих элементов:

$$W_{11}^{mn} = \int_0^{r^I} \varphi_m^I(r) \varphi_n^I(r) r dr, \quad W_{22}^{mn} = \int_0^{r^{II}} \varphi_m^{II}(r) \varphi_n^{II}(r) r dr, \\ n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, N_1;$$

W_{12}, W_{21} в качестве элементов содержат интегралы Ломмеля:

$$W_{21}^{mn} = \int_0^{r^{II}} \varphi_m^{II}(r) \varphi_n^I(r) r dr,$$

$$n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, N_1,$$

причем $W_{12}^{mn} = W_{21}^{nm}$.

Векторы K_1 и K_2 зависят от матриц коэффициентов левой части системы уравнений, и их элементы выражаются следующими равенствами:

$$K_1^m = \sum_{n=1}^N (-W_{11}^{mn} \cdot A_n^n) + \sum_{n=1}^N W_{12}^{mn} \cdot D_n^n,$$

$$K_2^m = \sum_{n=1}^N W_{21}^{mn} \cdot (i\gamma_n^I) A_n^n + \sum_{n=1}^N W_{22}^{mn} \cdot (i\gamma_n^{II}) \cdot D_n^n.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений (5) решается численно. По аналогии с [9–11] можно доказать, что построенное приближенное решение при $N \rightarrow \infty$ сходится в среднем к точному решению рассматриваемой задачи.

3. Некоторые результаты счета

Была рассмотрена задача дифракции электромагнитной волны H_{01} на скачкообразном сужении поперечного сечения круглого волновода (рис. 1). На основе приведенного выше алгоритма была составлена компьютерная программа решения поставленной задачи. Проведены исследования дифракционных характеристик и сравнение с результатами, известными в научной литературе. Были рассмотрены задачи «полного отражения» и «полного прохождения». Проведено сравнение с результатами, полученными методом краевых источников [6] (рис. 2). Как видно из рисунка, при значении $\lambda/r^{II} \sim 1.3$ волна H_{01} целиком трансформируется в собственные волны круглого волновода радиуса $r^{II} = 2r^I/3$, а при значении, большем $\lambda/r^{II} \sim 1.6$, волноведущая система становится полностью запертой. Результаты, полученные методом проекционного сшивания (кривая 1), полностью согласуются с результатами метода краевых источников (кривая 2).

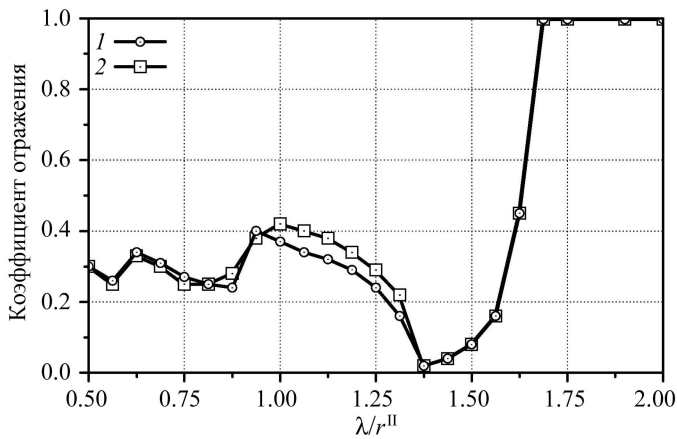


Рис. 2. Коэффициент отражения H_{01} волны, набегающей на стык двух круглых волноводов с различным поперечным сечением

Заключение

Метод проекционного сшивания позволяет построить строгие математические модели электродинамики волноводно-резонансных систем, обладающие высокой эффективностью и дающие возможность получить большой объем информации с гарантированной точностью.

Рассмотренный вычислительный алгоритм, основанный на этом методе, универсален и дает возможность решить целый класс задач: дифракция несимметричных волн на скачке поперечного сечения круглого волновода, дифракция на бесконечно тонких диафрагмах, сужающихся и расширяющихся

диафрагмах и т. д. Построенный алгоритм устойчив, учитывает многомодовость и резонансный характер, например резонансы на «запертых модах».

Литература

1. Кисунько Г.В. // Докл. АН СССР. 1947. **58**, № 8. С. 1653.
2. Paradoroulos V.M. // Quart. J. Mech. Appl. Mathem. 1957. **10**, N 2. P. 191.
3. Зеленский Г.Н. // Тр. учебных институтов связи. 1973. № 62. С. 3.
4. Вайслейб Ю.В. // Известия вузов. Радиофизика. 1976. **19**, № 8. С. 1208.
5. Кириленко А.А., Шестопалов В.П., Яшина Н.П. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. **7**, № 6. С. 1482.
6. Саутбеков С.С., Уразаков Э.Н. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. **54**, № 8. С. 1488.
7. Свешников А.Г., Ильинский А.С. // Вычислит. методы и программирование. 1969. № 13. С. 27.
8. Ильинский А.С., Шичанина Е.Ю. // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и кибернетика. 1986. № 1. С. 16.
9. Ильинский А.С., Фоменко Е.Ю. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. **31**, № 3. С. 339.
10. Асланиди К.Г., Моденов В.П. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. **32**, № 2. С. 277.
11. Асланиди К.Г., Моденов В.П. // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и кибернетика. 1993. № 4. С. 24.

Поступила в редакцию
09.09.05