УДК 517.958; 621.372.8

ПРИНЦИП ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ ДЛЯ ВОЛНОВОДА

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, А. А. Панин

(*кафедра математики*)

E-mail: a-panin@yandex.ru

Для трехмерного регулярного волновода обоснован принцип предельной амплитуды при частотах, не равных частоте отсечки. Для таких частот и при совпадении с частотой отсечки (когда есть резонанс) найдена асимптотика решения задачи о возбуждении колебаний током $fe^{-i\omega t}$ при больших t.

1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим в регулярном волноводе $\Omega = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in S\}$ постоянного (одно- или двумерного, тогда $y \equiv (y^{(1)}, y^{(2)})$) сечения S начально-краевую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = fe^{-i\omega t}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Это скалярная модель задачи о возбуждении в волноводе Ω колебаний током $fe^{-i\omega t}$ частоты $\omega > 0$. Будем считать, что f — бесконечно гладкая функция, носитель которой $\operatorname{supp} f$ — компакт в Ω. Тогда для любых натуральных k и L существует $C_{kL}^2 \equiv \sup_x \int_S \left| \left(\frac{\partial^2}{\partial (y^{(1)})^2} + \frac{\partial^2}{\partial (y^{(2)})^2} \right) \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right|^2 dy^{(1)} dy^{(2)}$, что использовано далее. Назовем *принципом предельной амплитуды* (ППА) утверждение о том, что решение задачи (1) представимо в виде

$$u(x, y, t) = v(x, y)e^{-i\omega t} + o(1) \quad \text{при } t \to \infty, \tag{2}$$

где функция v удовлетворяет условиям

$$\Delta v + \omega^2 v = -f, \quad (x, y) \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

а также, если $\omega \neq \alpha_n$ ни для какого из n, и парциальным условиям излучения (см., напр., [1, с. 188, формулы (2.2) и (2.3)]).

Резонансным множеством волновода назовем множество тех частот ω, для которых сформулированный принцип не выполняется.

Вопросами установления стационарного режима в волноводе занимался Р. В. Хохлов. В его работе [2] дано точное решение задачи (относительно потенциалов скоростей) о возбуждении акустического волновода пластиной и на основе этого решения приводится подробное обсуждение физической стороны процесса, в частности появления пика, затем вестника и затем уже стационарного сигнала.

ППА был введен в работе [3] как способ выделения единственного решения уравнения $\Delta v + k^2 v = -F(M)$ в неограниченной области. Затем была обоснована возможность выбрать единственное решение с помощью ППА в задачах дифракции на конечном теле [4–6]. В работе [7] было показано, что и для слоя между двумя параллельными плоскостями ППА позволяет выделить единственное решение задачи Дирихле для этого уравнения. При этом для некоторых частот может и не существовать ни одного решения, удовлетворяющего ППА [8]. Эти частоты (*частоты отсечки*) суть квадратные корни из собственных значений α_n^2 спектральной задачи для оператора Лапласа на сечении S. Применительно к задаче (1) для слоя в работе [9] было показано, что ППА в смысле (2)–(3) верен для всех частот, отличных от частот отсечки. Предмет настоящей работы — перенесение этого результата на волновод в $\mathbb{R}^3$ $(y \equiv (y^{(1)}, y^{(2)}))$. Для прямоугольного сечения это было сделано в [10]. Теперь же мы предполагаем, что граница ∂S задается в локальных координатах функцией из $C^{(2,\mu)}$, $\mu > 0$, тогда для собственных функций задачи

$$\begin{cases} \Delta\psi_n(y) + \alpha_n^2 \psi_n(y) = 0, \quad y \in S, \\ \psi_n|_{\partial S} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

нормированных на единицу по норме $L^2(S)$, верно неравенство [11]

$$\left\| \frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial (y^{(1)})^{m_1} \partial (y^{(2)})^{m_2}} \psi_n(y) \right\|_{C(S)} \leqslant C(|m|)\alpha_n^{1+|m|}, \tag{5}$$
$$|m| \equiv m_1 + m_2 = 0, 1, 2,$$

что используется ниже. (Всюду в формулах — равномерные нормы.) Те же оценки (значит, и результат настоящей работы) годятся и для прямоугольника. Здесь и далее α_n^2 упорядочены по возрастанию с учетом кратности. Отметим, что ряд Фурье функции из $C^{(2)}(S)$, равной нулю на границе S, сходится к ней в данных условиях абсолютно и равномерно.

2. Построение решения

Если существует решение $u(x, y, t)$ ограниченной степени роста задачи (1), то его преобразование Лапласа $\tilde u(x,y,p)=\int_0^\infty u(x,y,t)e^{-pt}\,dt$ удовлетворяет задаче

$$p^2\tilde u-\Delta\tilde u=\frac{f}{p+i\omega},\quad (x,y)\in\Omega;\quad \tilde u|_{\partial\Omega}=0. \tag{6}$$

Вне зависимости от существования решения (1) решение (6) с помощью разделения переменных можно представить как

$$\tilde u=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x,p)\psi_n(y), \tag{7}$$

где (введем обозначение $f_n(x)\equiv\int_S f(x,y)\psi_n(y)\,dy$)

$$v_n(x,p)=\frac{1}{p+i\omega}\int\limits_{-a}^{a}f_n(x')\frac{e^{-\sqrt{p^2+\alpha_n^2}|x-x'|}}{2\sqrt{p^2+\alpha_n^2}}\,dx' \tag{8}$$

и либо $\sqrt{p^2+\alpha_n^2}>0$, либо $\operatorname{Im}\sqrt{p^2+\alpha_n^2}<0$ (с тем чтобы в конечном итоге получить при $\omega\neq\alpha_n$ ни для каких n функцию v, удовлетворяющую парциальным условиям излучения, т. е. представляющую собой сумму комплексных амплитуд волн, уходящих на бесконечность, и нераспространяющегося поля). Здесь $[-a;a]\times S\supset\operatorname{supp}f(x,y)$. Очевидно, v_n аналитична по p в $B_n=\{p\mid \operatorname{Re}p\geqslant 0,\ p\neq -i\omega,\ p\neq\pm i\alpha_n\}$.

В силу (4) $\psi_n=\frac{-\Delta\psi_n}{\alpha_n^2}$, поэтому, применив L раз формулу Грина для S, получаем $\left\|\frac{d^kf_n}{dx^k}\right\|\equiv\sup\limits_{s\in[-a;a]}\left|\frac{d^kf_n}{dx^k}\right|\leqslant C_{kL}/\alpha_n^{2L}$, откуда, дифференцируя k раз по частям в (8), имеем

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}v_n(x,p)\right\|\leqslant\frac{a\cdot C_{kL}}{\alpha_n^{2L}|p+i\omega|\cdot\sqrt{|p^2+\alpha_n^2|}}. \tag{9}$$

Согласно [12, с. 205], α_n^2 растут как n, откуда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^{2+\varepsilon}}<\infty$ при $\varepsilon>0$, тогда в силу (9) и (5) ряд (7) для $\tilde u$ и любой ряд, получаемый из него почленным дифференцированием порядка не более 2 по x,y, равномерно сходится в $\overline{\Omega}\times K$, где K — замкнутое подмножество $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\{p\mid\operatorname{Re}p\geqslant 0,\ p\neq -i\omega,\ p\neq\pm i\alpha_n,\ n\in\mathbb{N}\}$. Поэтому ряд (7) дает функцию $\tilde u(x,y,p)\in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ для любого $p\in B$, удовлетворяющую задаче (6).

Так как $|p^2+\alpha_n^2|>c|p|$ при $\operatorname{Re}p>c$, из (5), (9) имеем ($|m|\leqslant 2$)

$$\left|\frac{\partial^{k+m}}{\partial x^k\partial y^m}\tilde u(x,y,p)\right|\leqslant\frac{a}{\sqrt{c}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C(|m|)}{\alpha_n^{2N}}\,\frac{C_{k,N+\left[\frac{|m|+2}{2}\right]}}{|p+i\omega|\cdot|p|^{1/2}},$$
$$(x,y)\in\overline{\Omega},\quad \operatorname{Re}p\geqslant c>0. \tag{10}$$

Здесь $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^{2N}}<\infty$, а дифференцирование по y проводится по любой его координате. Отсюда следует, что интеграл Меллина $u(x,y,t)=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\tilde u(x,y,p)e^{pt}\,dp$ ($c>0$ — любое, пределы $c\mp i\infty$ далее опускаем) и все интегралы, полученные из него дифференцированием по x,y один или два раза, сходятся равномерно, поэтому $u\in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ при $t\geqslant 0$. По построению ряда (7) верно $u|_{\partial\Omega}=0$. В силу оценки (10) $\tilde u(x,y,p)=O(|p|^{-3/2})$ при $|p|\to\infty$ ($\operatorname{Re}p\geqslant c$), откуда, меняя контур интегрирования с помощью теоремы Коши об обращении в нуль интеграла от аналитической функции, имеем $u(x,y,0)=0$. Из (6) и (10) следует $\tilde u=O\left(\frac{1}{|p|^{2+3/2}}\right)+O\left(\frac{1}{|p|^3}\right)=O\left(\frac{1}{|p|^3}\right)$ при $|p|\to\infty$ равномерно для $(x,y)\in\overline{\Omega}$ и $\operatorname{Re}p\geqslant c$. Тогда $u(x,y,t)\in C^1[0;+\infty)$ по t, и u_t можно вычислять дифференцированием под интегралом, причем $u_t(x,y,0)=0$. Заметим, интегрируя по частям, что интеграл $\int\frac{e^{pt}}{p+i\omega}\,dp=2\pi ie^{-i\omega t}$ сходится равномерно на любом конечном отрезке $[t_1;t_2]$, $t_1>0$. Отсюда и из последней оценки следует: интеграл $\int p^2\tilde u(x,y,p)e^{pt}\,dp$ сходится равномерно в $\overline{\Omega}\times[t_1,t_2]$. Поэтому $u(x,y,t)\in C^{(2)}(0;+\infty)$ по t и для любых $(x,y)\in\overline{\Omega}$ и $t>0$ верно $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int p^2\tilde ue^{pt}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int\Delta\tilde ue^{pt}\,dp+ fe^{-i\omega t}=\Delta u(x,y,t)+fe^{-i\omega t}$ (использованы (6) и равномерная сходимость соответствующих интегралов). Итак, u — классическое решение (1).

3. Асимптотическое поведение, нерезонансный случай

Как и в двумерном случае [9], построение асимптотики функции

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{1}{p+i\omega}g(x,y,p)e^{pt}\,dp, \tag{11}$$

где

$$g(x,y,p)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(y)\int\limits_{-a}^{a}f_n(x')\frac{e^{-\sqrt{p^2+\alpha_n^2}|x-x'|}}{2\sqrt{p^2+\alpha_n^2}}\,dx', \tag{12}$$

при $\omega\neq\alpha_n$ ни для одного из n опирается на следующую лемму.

Лемма (A. G. Ramm, P. Werner [9]). *Пусть ω — действительное число, h — функция $p\in\mathbb{C}$ и верно: 1) h голоморфна при $\operatorname{Re}p>0$ и непрерывна в $\{p\mid\operatorname{Re}p\geqslant 0\}\backslash D$, D — дискретное подмножество мнимой оси и $-i\omega\notin D$; 2) $|h(p)-h(-i\omega)|=O(|p+i\omega|^{\alpha})$, $\alpha>0$, при $p\to -i\omega$; 3) $|h(p)|=O(|p-q|^{-1+\beta})$, $\beta>0$, при $p\to q\in D$ ($\operatorname{Re}p\geqslant 0$); 4) существуют такие $c>0$ и последовательность $\{d_k\}$ ($d_k>0$, $d_k\to\infty$, $\pm id_k\notin D$), что $\int_{\pm id_k}^{c\pm id_k}\frac{|h(p)|}{|p|}\,dp\to 0$, $k\to\infty$; 5) несобственный интеграл $\int\frac{h(p)}{p+i\omega}e^{pt}\,dp$ сходится для любого $t>0$; 6) несобственные интегралы $\int_{-i\infty}^{-i\omega-i\delta}\frac{h(p)}{p+i\omega}e^{pt}\,dp$ и $\int_{-i\omega+i\delta}^{i\infty}\frac{h(p)}{p+i\omega}e^{pt}\,dp$ сходятся равномерно в $[t_0;\infty)$*

для любого $t_0>0$ *и для любого* $\delta>0$. *Тогда* $v(t):=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{1}{p+i\omega}h(p)e^{pt}dp=e^{-i\omega t}h(-i\omega)+o(1)$ *при* $t\to\infty$.

Функция g удовлетворяет условиям леммы как функция p, причем условия 1–3 и 5 легко вывести из предыдущего аналогично сделанному в [9], а 4 и 6 будут доказаны здесь далее, поскольку доказательство этих свойств существенно отличается от случая, рассмотренного в [9]. Тогда можно будет утверждать, что для u при $\omega\neq\alpha_n$ верно (2), где $v=g|_{p=-i\omega}$ удовлетворяет условиям (3), т.е. выполнен ППА по нашему определению. Также легко убедиться, что в этом случае в силу установленного нами правила выбора ветвей многозначных функций для $v=g|_{p=-i\omega}$ будут выполнены парциальные условия излучения. Все оценки были заведомо равномерны по (x,y) в любом ограниченном подмножестве Ω, поэтому в любом таком подмножестве (2) выполняется равномерно.

Условия 4 и 6

Из (12), оценки $\left\|\frac{d^kf_n}{dx^k}\right\|\leqslant C_{kL}/\alpha_n^{2L}$ и правила выбора ветвей многозначных функций следует равномерная по (x,y) оценка

$$|g(x,y,p)|\leqslant C_{0,N}C(0)\cdot 2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^{2N-1}}\,\frac{1}{2\sqrt{|p^2+\alpha_n^2|}}. \tag{13}$$

Поскольку α_n растет как n, для некоторой константы $C>0$ при каждом n_0 найдется $n>n_0$, для которого $\alpha_{n+1}-\alpha_n>\frac{C}{\alpha_n^{2+\varepsilon}}$, $\varepsilon>0$, поэтому можно построить последовательность $\{\alpha_{n_k}\}$, для которой $\alpha_{n_k+1}-\alpha_{n_k}>\frac{C}{\alpha_{n_k}^{2+\varepsilon}}$. Пусть $d_k=\frac{\alpha_{n_k+1}+\alpha_{n_k}}{2}$. С учетом того что $\min\limits_n|d_k-\alpha_n|=|d_k-\alpha_{n_k}|=|\alpha_{n_k+1}-\alpha_{n_k}|/2$, при $\theta\in[0;1]$ имеем $\sqrt{|(\theta c\pm id_k)^2+\alpha_n^2|}>\sqrt{C\alpha_{n_k}/(2\alpha_{n_k}^{2+\varepsilon})}=\frac{C'}{\sqrt{\alpha_{n_k}^{1+\varepsilon}}}$. Тогда из (13) получим $|g(x,y,p)|\leqslant C''\alpha_{n_k}^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$, откуда очевиден требуемый предельный переход (C',C'' — константы, не зависящие от k,n_k,n).

Для доказательства условия 6 следует заметить, что

$$\frac{|g(x,y,p)|}{|p+i\omega|}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}C(0)\times$$
$$\times\,\alpha_n\cdot 2a\cdot 1\cdot\|f_n\|_C\,\frac{1}{2|\sqrt{p^2+\alpha_n^2}|}\,\frac{1}{|p+i\omega|}, \tag{14}$$

где $C(0)$ определяется из (5). Поэтому сходимость интегралов из условия 6 можно доказать, если сначала показать, что интегралы I_n от функции $b_n(p):=\frac{\|f_n\|}{\left|\sqrt{p^2+\alpha_n^2}\right|}\frac{1}{|p+i\omega|}$ по отрезку мнимой оси $i\mathbb{R}\backslash(-i\omega-i\delta;-i\omega+i\delta)$ удовлетворяют неравенству $I_n<\frac{c(N)}{\alpha^{2N}}$ для любого N и, значит, $\sum_{n=1}^{\infty}I_n<\infty$, а затем отсюда вывести, что $\int_{i\mathbb{R}\backslash(-i\omega-i\delta;-i\omega+i\delta)}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,d|p|<\infty$.

Обратимся к вычислению интеграла $\int\tilde b_n\,d|p|\equiv\int\frac{b_n}{\|f_n\|_C}\,d|p|$. В силу справедливости неравенства $\left\|d^kf_n/dx^k\right\|\leqslant C_{kL}/\alpha_n^{2L}$ достаточно показать, что он растет не быстрее некоторой степени α_n. Имеем

$$\int\limits_{i\mathbb{R}\backslash(-i\omega-i\delta;-i\omega+i\delta)}\frac{1}{\left|\sqrt{p^2+\alpha_n^2}\right|}\,\frac{1}{|p+i\omega|}\,d|p|=$$
$$=\int\limits_{(-\infty;-\omega-\delta)\cup(-\omega+\delta;+\infty)}\frac{1}{|q+\omega|}\frac{1}{\left|\sqrt{q^2-\alpha_n^2}\right|}\,dq=$$
$$=\{t=q+\omega,\ q=t-\omega\}=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}\backslash(-\delta;\delta)}\frac{1}{\sqrt{|t^2-2t\omega+\omega^2-\alpha_n^2|}}\cdot\frac{1}{|t|}\,dt.$$

Для вычисления интеграла надо воспользоваться табличной формулой для $\int\frac{dx}{xX^{1/2}}$, где $X=ax^2+bx+c$. Достаточно рассмотреть четыре отрезка $(\delta;\alpha_n+\omega)$, $(-\alpha_n+\omega;-\delta)$, $(\alpha_n+\omega;+\infty)$ и $(-\infty;-\alpha_n+\omega)$ и учесть на каждом знаки t и подкоренного выражения. (Сразу отбросили конечное число α_n, меньших ω.) Если провести интегрирование, становится ясно, что все четыре слагаемых убывают с ростом α_n. Используя теперь неравенства $I_n<\frac{c(N)}{\alpha_n^{2N}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}I_n<\infty$, покажем, что $\int_{-i\infty}^{i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(p)\,d|p|<\infty$. (Здесь и везде в этом пункте интегрирование ведется, как и прежде, вне главной особенности, связанной с ω; позволим себе не указывать это в пределах интегрирования.) Для этого заметим, что на каждом *конечном* промежутке $p\in[-iA;iB]\backslash(-i\omega-i\delta;-i\omega+i\delta)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(p)$ сходится равномерно. Тогда с учетом почленного интегрирования суммы первых n_1-1 членов $\int_{-iA}^{iB}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|f_n\|}{\left|\sqrt{p^2+\alpha_n^2}\right|}\frac{1}{|p+i\omega|}\,d|p|=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-iA}^{iB}\frac{\|f_n\|}{\left|\sqrt{p^2+\alpha_n^2}\right|}\frac{1}{|p+i\omega|}\,d|p|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}I_n\equiv I$.

Это означает не что иное, как равномерную ограниченность $\int_{-iA}^{iB}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|f_n\|}{\left|\sqrt{p^2+\alpha_n^2}\right|}\frac{1}{|p+i\omega|}\,d|p|$ при $A,B\to\infty$, т.е. (в силу монотонности, ведь подынтегральные функции положительны) сходимость требуемого несобственного интеграла первого рода.

Поскольку $|e^{pt}|=1$ на мнимой оси и все экспоненты в g тоже по модулю не превосходят единицы, получаем согласно признаку Вейерштрасса требуемую равномерную сходимость.

4. Построение асимптотики в случае резонанса

Пусть $\omega=\alpha_{n_0}=\ldots=\alpha_{n_l}$, т.е. ω совпадает с корнем из собственного значения, кратность которого в общем случае любая (но в силу общих свойств задачи (4) конечная). Напомним, что собственные значения занумерованы с учетом кратности. Заметим, что $\sqrt{p^2+\omega^2}=\sqrt{p+i\omega}\sqrt{p-i\omega}$ $(\operatorname{Re} p>0)$ и что из формулы Маклорена $e^x=1+x+O(x^2)$ следует, что $\frac{e^{-\sqrt{p^2+\omega^2}\,z}}{\sqrt{p-i\omega}}=\frac{e^{-\sqrt{p-i\omega}\sqrt{p+i\omega}\,z}}{\sqrt{p-i\omega}}=\frac{1}{\sqrt{-2i\omega}}-\sqrt{p+i\omega}z+ + O(|p+i\omega|)$ при $p\to -i\omega$ равномерно в любом ограниченном подмножестве точек z, поэтому для всех $j=0,\dots,l$

$$v_{n_j}(x,p)=\frac{1}{(p+i\omega)^{3/2}}\int\limits_{-a}^{a} f_{n_j}(x')\frac{e^{-\sqrt{p^2+\omega^2}|x-x'|}}{2\sqrt{p-i\omega}}\,dx'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-2i\omega}}\int\limits_{-a}^{a} f_{n_j}(x')\,dx'\,\frac{1}{(p+i\omega)^{3/2}}+ \tag{15}$$

$$+\frac{1}{p+i\omega}\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}\left(-f_{n_j}(x')|x-x'|+O\left(\sqrt{|p+i\omega|}\right)\right)dx'$$

равномерно для любого ограниченного подмножества оси x.

Преобразование Меллина первого слагаемого можно найти явно, поскольку $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{pt}}{(p+i\omega)^{3/2}}\,dp= =\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{1/2}e^{-i\omega t}$. Далее, $\int_{-a}^{a} f_{n_j}(x')\,dx'=\int_\Omega f(x',y')\times \times\psi_{n_j}(y')\,dx'\,dy'$ и $\frac{1}{\sqrt{-2i\omega}}=\frac{1}{\sqrt{\omega(1-i)}}=\frac{1+i}{2\sqrt{\omega}}$ в силу соглашения о выборе ветвей многозначных функций.

Обозначим последнее слагаемое в (15), взятое без множителя $\frac{1}{p+i\omega}$, как $h_j(x,p)$. Эти функции удовлетворяют условиям леммы, что легко получить из их вида

$$h_j(x,p)=(p+i\omega)\left(v_{n_j}(x,p)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\sqrt{-2i\omega}}\left[\int\limits_{-a}^{a} f_{n_j}(x')\,dx'\right]\frac{1}{(p+i\omega)^{3/2}}\right),$$

$$j=0,\dots,l, \tag{16}$$

и оценки $|h_j(x,p)-h_j(x,-i\omega)|=O(|p+i\omega|^{1/2})$ (см. (15)). При этом все оценки равномерны по x в любом ограниченном множестве на оси. Тогда, строя по лемме асимптотику для этой части $v_{n_j}(x,p)$, имеем при $t\to\infty$ для преобразования Меллина с $c>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int v_{n_j}e^{pt}\,dp=\frac{1+i}{4\sqrt{\omega}}\int\limits_\Omega f\psi_{n_j}\,dx'\,dy'\frac{2t^{1/2}e^{-i\omega t}}{\sqrt{\pi}}-$$

$$-\frac{e^{-i\omega t}}{2}\int\limits_{-a}^{a} f_{n_j}(x')|x-x'|\,dx'+o(1), \tag{17}$$

где первое слагаемое есть явно полученый выше резонанс с нужным коэффициентом (см. формулу (15) и формулу в тексте после нее).

Записав функцию u как $u(x,y,t)= =\frac{1}{2\pi i}\int\left[\sum_{j=0}^{l} v_{n_j}(x,p)\psi_{n_j}(y)+\frac{1}{p+i\omega}g'(x,y,p)\right]e^{pt}\,dp$, видим, что функция g', отличающаяся от (12) отсутствием слагаемых, где $\alpha_n=\omega$, удовлетворяет лемме в силу тех же причин, что и $g(x,y,p)$ в нерезонансном случае (п. 3). Тогда в силу леммы и соотношений (17) после сложения имеем при $t\to\infty$

$$u(x,y,t)=\frac{1+i}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\omega}}t^{1/2}e^{-i\omega t}\sum_{j=0}^{l}\psi_{n_j}(y)\times$$

$$\times\int\limits_\Omega f(x',y')\psi_{n_j}(y')\,dx'\,dy'+we^{-i\omega t}+o(1), \tag{18}$$

где

$$w(x,y)=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{l}\psi_{n_j}(y)\int\limits_{-a}^{a} f_{n_j}(x')|x-x'|\,dx'+g'(x,y,-i\omega).$$

Легко видеть, что

$$\left(\Delta+\omega^2\right)\left[-\frac{1}{2}\psi_{n_j}(y)\int_{-a}^{a} f_{n_j}(x')|x-x'|\,dx'\right]=$$
$$=-\psi_{n_j}(y)f_{n_j}(x),$$

откуда $(\Delta+\omega^2)w=-\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\psi_n(y)=-f$, т. е. w удовлетворяет (3) $(\Delta v+\omega^2 v=-f)$. Граничные условия тоже выполнены — это очевидно из способа построения w.

Заключение

В итоге доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция f в задаче* (1) *бесконечно дифференцируема и имеет компактный носитель в Ω. Тогда при любой частоте $\omega>0$ существует решение и этой задачи, имеющее ограниченную (даже нулевую) степень роста. При этом принцип предельной амплитуды для и верен в двух случаях: 1) $\omega\neq\alpha_n$ для любого n; 2) $\omega=\alpha_{n_0}=\ldots=\alpha_{n_l}$, $\sum_{j=0}^{l}\psi_{n_j}(y)\int_\Omega f(x',y')\psi_{n_j}(y')\,dx'\,dy'=0$. Если же $\sum_{j=0}^{l}\psi_{n_j}(y)\int_\Omega f(x',y')\psi_{n_j}(y')\,dx'\,dy'\neq 0$, то верно асимптотическое соотношение* (18)*, причем $w(x,y)$ удовлетворяет условиям* (3)*, однако, аналогично показанному в* [9] *для полосы, не обязательно удовлетворяет парциальным условиям излучения.*

Для выполнения принципа предельной амплитуды не требуется равномерного предельного перехода, но поскольку все оценки равномерны по (x,y) в любом ограниченном подмножестве Ω, можно утверждать, что то же верно для (2) в случае, когда принцип предельной амплитуды действует и для (18) в резонансном случае.

Итак, для волновода в трехмерном пространстве с сечением указанного в п. 1 вида полностью обоснован ППА при частотах, отличных от частот отсечки. Отсюда следует, что решение исходной задачи выходит на режим установившихся колебаний с постоянной амплитудой, причем равномерно в любой ограниченной подобласти волновода. Принцип нарушается при частотах отсечки. Тогда имеет место явление резонанса. Резонансный член выписан в (18) явно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 03-01-00166).

Литература

1. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1991.
2. *Хохлов Р.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1948. № 8. С. 49.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* // ЖЭТФ. 1948. **18**, № 2. С. 243.
4. *Лакс П.* Теория рассеяния. М., 1979.
5. *Morawetz C.S.* // CPAM. 1962. **15**. P. 349.
6. *Morawetz C.S.* // CPAM. 1965. **18**. P. 183.
7. *Свешников А.Г.* // ДАН СССР. 1950. **73**, № 5. С. 917.
8. *Werner P.* // Math. Meth. Appl. Sci. 1984. **6**. P. 104.
9. *Ramm A.G., Werner P.* // J. Reine. Angew. Math. 1985. **360**. P. 19.
10. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Панин А.А.* // ЖВМ и МФ. 2005. **45**, № 12. С. 2219.
11. *Ильин В.А., Шишмарев И.А.* // Изв. АН СССР, сер. матем. 1960. **24**, № 6. С. 883.
12. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М., 1961.

Поступила в редакцию
07.11.05