УДК 519.95

# ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ И НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ МОДЕЛИ ПРИ МИНИМАКСНОМ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРОВ ФОРМЫ СИГНАЛА

**А. А. Захарченко, А. И. Чуличков**

(*кафедра компьютерных методов физики*)

E-mail: alexey_zakharchenko@srisa.ru; ach@cmp.phys.msu.su

**Предложен метод минимаксного оценивания параметров объекта по форме сигналов, полученных от объекта в условиях существенной неопределенности. Метод позволяет контролировать адекватность используемой математической модели. Эффективность метода иллюстрируется решением задачи минимаксного оценивания профиля поверхности микрообъектов по набору их изображений, полученных оптическим микроскопом с различным положением фокуса.**

## Введение

Морфологический подход к анализу сигналов был предложен Ю. П. Пытьевым более тридцати лет назад. Под морфологическим анализом понимаются методы решения задач узнавания, классификации объектов, выделения отличий в сценах по их изображениям, оценивания параметров объекта по его изображению и другие, основанные на понятии формы изображения. Зрительный анализатор человека решает эти задачи вне зависимости от условий формирования изображения, следовательно, указанные задачи можно решать с помощью инвариантов, сохраняющихся при изменении этих условий. В ряде случаев можно указать множество изображений, порожденное данной сценой при всех возможных значениях условий формирования изображений. Это множество изображений называется его формой. Если это множество выпукло и замкнуто в пространстве всех изображений, то с формой изображения сцены можно однозначно связать проектор на это множество. В терминах этих проекторов конструктивно решаются названные выше задачи анализа изображений [1–3].

В настоящей работе морфологический подход используется для анализа параметров сигналов произвольной природы. Под сигналом будем понимать вектор евклидова пространства $R_n$; в частности, если $f \in R_n$ — изображение некоторой сцены, координата $f_i$ вектора $f \in R_n$ является яркостью $i$-го узла сетки поля зрения $X$.

## Понятие формы сигнала

Будем считать, что вектор $f \in R_n$ задан своими координатами в некотором ортонормированном базисе, и для любой числовой функции $F(\cdot)\colon R_1 \to R_1$, заданной и принимающей значения на числовой прямой $R_1$, обозначим $F^*f \in R_n$ вектор, координаты $(F^*f)_i$ которого в заданном базисе равны $(F^*f)_i = F(f_i)$, $i = 1, \dots, n$. Введем понятие формы сигнала как множества сигналов, полученных при всевозможных условиях регистрации.

Определение. Пусть $\boldsymbol{F}$ — класс функций, определенных и принимающих значения на действительной прямой. Формой изображения $f \in R_n$ назовем множество $\tilde{V}_f = \{F^*f,\ F(\cdot) \in \boldsymbol{F}\}$.

Понятие формы сигнала полезно, например, в следующих ситуациях. Пусть $f \in R_n$ — изображение некоторой сцены на поле зрения $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, полученное при неконтролируемых условиях, однако таких, что области с одинаковыми оптическими свойствами сцены отображаются в точки поля зрения с равной яркостью. Тогда множество всех изображений является множеством кусочно-постоянных изображений вида $f = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_j \in R_n$, где $c_j \in (-\infty, \infty)$, а $\chi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_j, \\ 0, & x \notin A_j, \end{cases}$ — индикаторы подмножеств поля зрения $X$ равной яркости $c_j$, $j = 1, \dots, m < n$. Множество всех изображений данной сцены можно записать в виде $\tilde{V}_f = \{F^*f,\ F(\cdot) \in \boldsymbol{F}\}$, где $\boldsymbol{F}$ — класс всех числовых функций. Инвариантом преобразований яркости изображения в данном случае является набор индикаторных функций, задающий разбиение поля зрения на множества равной яркости, — это разбиение передает особенности сцены, присутствующие в любом ее изображении.

В другом примере форма сигнала определяется положением его максимума. Пусть для координат $f_i$ сигнала $f \in R_n$ выполнены неравенства: $f_{i-1} < f_i$ для $i = 2, \dots, m$ и $f_i > f_{i+1}$ для $i = i, \dots, n-1$. Значение индекса $m$, разделяющего указанные множества индексов (т. е. положение «максимума» координат вектора $f$), является параметром формы. Изменение условий наблюдения сигнала не изменяет заданной упорядоченности координат сигнала, в крайнем случае неравенство может превратиться в равенство.

Как и в предыдущем примере, зададим форму сигнала в виде множества $\tilde{V}_f = \{F^*f, \ F(\cdot) \in \boldsymbol{F}\}$, однако теперь в качестве $\boldsymbol{F}$ выберем класс монотонно неубывающих функций, в результате для координат сигнала $F^*f$ выполняются неравенства: $(F^*f)_{i-1} \leqslant (F^*f)_i$ для $i = 2, \ldots, m$ и $(F^*f)_i > (F^*f)_{i+1}$ для $i = i, \ldots, n-1$. Форма в этом случае является множеством сигналов, первые $m$ координат которых не убывают, а последующие $(n-m)$ не возрастают. Такие сигналы будем называть унимодальными.

Далее класс $\boldsymbol{F}$ выбирается так, чтобы $\tilde{V}_f$ было выпукло и замкнуто в $R_n$. Тогда эквивалентным является определение формы изображения как проектора $P_f$ в $R_n$ на $\tilde{V}_f$, т. е. решение задачи наилучшего в $R_n$ приближения элемента $g \in R_n$ элементами формы $\tilde{V}_f$:

$$\|P_f g - g\|^2 = \inf\{\|g - q\|^2 \mid q \in \tilde{V}_f\}. \tag{1}$$

В первом примере таким проектором является линейный оператор $P_f g = \sum_{j=1}^{m} \frac{(g,\chi_j)}{\|\chi_j\|^2}\chi_j$ [1–3]. Во втором рассмотренном примере проектор нелинеен, для его вычисления следует решить задачу выпуклого программирования [4].

### Оценка параметра формы сигнала

Пусть форма изображения объекта задана с точностью до некоторого параметра $\lambda \in \Lambda$ ($\Lambda \subset R_m$ — множество допустимых значений параметра). Для каждого значения параметра $\lambda$ определим форму его изображения в виде множества $V_\lambda \subset R_n$ его возможных изображений и проектор на это множество $P_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. По предъявленному сигналу $g \in R_n$ требуется оценить его параметр $\lambda \in \Lambda$.

Выберем оценку $\tilde{\lambda}$ параметра $\lambda$ из условия минимума погрешности оценки. Уточним модель формирования предъявляемого сигнала, считая, что наблюдение сигнала $f \in V_\lambda$ производится по схеме

$$\xi = f + \nu, \tag{2}$$

в которой погрешность $\nu \in N$, где $N \subset R_n$ — заданное множество. Задачу оценивания параметра $\lambda$ поставим как задачу на минимакс:

$$\|\lambda - \tilde{\lambda}\| = \inf_{\lambda' \in \Lambda} \sup\{\|\lambda - \lambda'\| \mid \lambda': \ \xi = f + \nu, \ f \in V_{\lambda'}, \ \nu \in N\}. \tag{3}$$

Оценка $\tilde{\lambda}$ минимизирует максимально возможную погрешность оценивания параметров. Для решения задачи (3) построим множество $\Lambda_\xi \subset \Lambda$ значений параметра $\lambda$, при которых равенство (2) возможно при некоторых $\nu \in N$ и $f \in V_\lambda$. Это множество содержит те и только те значения параметра $\lambda$, для которых отличие результата измерения $\xi$ от множества $V_\lambda$ может быть объяснено погрешностью $\nu \in N$. Решением задачи (3) в этом случае является центр шара минимального радиуса, содержащий множество $\Lambda_\xi$, а радиус этого шара является погрешностью оценки $\tilde{\lambda}$ [5].

Заметим, что в случае, когда $\lambda$ — числовой параметр, его минимаксной оценкой по наблюдению $\xi$ будет середина отрезка минимальной длины, содержащего множество $\Lambda_\xi$, а оценкой погрешности — половина длины этого отрезка.

### Оценка адекватности модели

Если множество $\Lambda_\xi$ не пусто, то, очевидно, нет причин отвергать используемую математическую модель измерения (2). Если же $\Lambda_\xi$ не содержит ни одного элемента, то модель противоречива и должна быть отвергнута. Формально можно ввести числовую характеристику адекватности модели: $\alpha(\xi) = \begin{cases} 1, & \Lambda_\xi \neq \varnothing, \\ 0, & \Lambda_\xi = \varnothing. \end{cases}$ Функцию $\alpha(\cdot)$, следуя теории измерительно-вычислительных систем, назовем надежностью модели.

### Оценка профиля поверхности объекта по набору его изображений с различным положением фокуса

Рассмотрим подробнее ситуацию, когда форма сигнала представляет собой множество

$$V_\lambda = \{f \in R_n\colon f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \leqslant f_\lambda \geqslant f_{\lambda+1} \geqslant \ldots \geqslant f_n\}, \tag{4}$$

где $\lambda$ — параметр формы, $\lambda \in \Lambda_n = \{1, \ldots, n\}$. Задача оценки параметра $\lambda \in \Lambda_n$ формы (4) возникает при оценке профиля поверхности трехмерного объекта по набору его изображений, полученных оптическим микроскопом с различным положением фокуса [6]. Как показано в [6], для достаточно широкого класса поверхностей дисперсия яркости изображения в окрестности точки $x$ поля зрения тем больше, чем ближе поверхность объекта в окрестности точки $x$ к положению фокуса. Изменяя дисперсию $\xi_i$ яркости окрестности точки $x$ на изображениях с различным положением фокуса $z_i$, $i = 1, \ldots, n$, получим случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, измеренный по схеме $\xi = f + \nu$, где $\nu \in N$ — погрешность измерения, а $f \in V_\lambda$. Оценка высоты поверхности объекта может быть получена как оценка параметра $\lambda$ формы $V_\lambda$ сигнала $f \in V_\lambda \subset R_n$, определенной в (4). Решив задачу оценки параметра $\lambda$ по данным измерений $\xi$ в каждой точке поля зрения, можно решить задачу реконструкции трехмерного рельефа поверхности наблюдаемого объекта.

Для оценки параметра $\lambda$ в заданной точке $x$ поля зрения построим множество $\Lambda_\xi$ тех $\lambda \in \Lambda_n$, для которых $\xi - P_{V_\lambda}\xi \in N$, где $P_{V_\lambda}\xi$ — проекция $\xi$ на множество $V_\lambda$. Если $N = \{z \in R_n, \ \|z\| \leqslant \delta\}$, то множество $\Lambda_\xi$ содержит те и только те значения параметра $\lambda \in \Lambda_n$, для которых $\|\xi - P_{V_\lambda}\xi\| \leqslant \delta$.

Если множество $\Lambda_\xi$ не пусто, то модель адекватна, в противном случае поверхность объекта и (или)

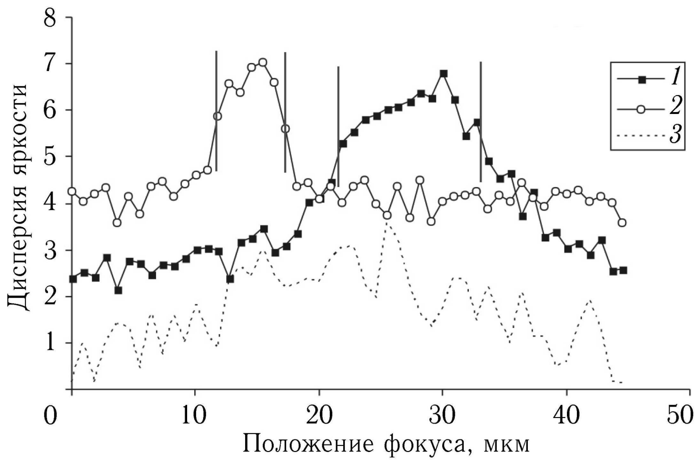


*Рис. 1.* Зависимость дисперсии яркости в окрестности фиксированной точки поля зрения от положения фокуса. Вертикальными линиями отмечены границы множеств $\Lambda_\xi$ на каждом сигнале. Шаг положения фокуса 0.9 мкм

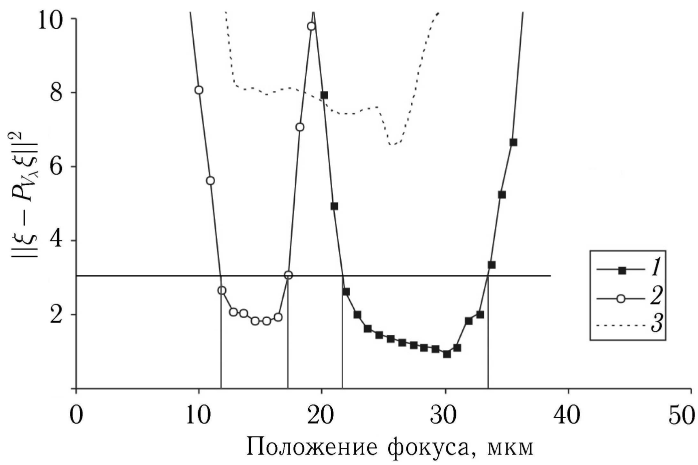


*Рис. 2.* Зависимость функционала невязки $\|\xi - - P_{V_\lambda}\xi\|^2$ от $\lambda \in \Lambda_n$ для сигналов 1, 2 и 3, изображенных на рис. 1. Горизонтальной линией отмечен уровень шума $\delta^2$

система регистрации не удовлетворяют требованиям, сформулированным в [6]. При $\Lambda_\xi \neq \varnothing$ середина отрезка наименьшей длины, содержащего $\Lambda_\xi$, является минимаксной оценкой высоты поверхности объекта в точке $x$, а половина его длины — погрешностью измерения.

На рис. 1 приведены примеры сигналов $\xi$, представляющих собой различные унимодальные сигналы, искаженные шумом. Вертикальными линиями показаны границы интервала $\Lambda_\xi$, в точках которого выполнено неравенство $\|\xi - P_{V_\lambda}\xi\| \leqslant \delta$. На рис. 2 приведено значение функционала $\|\xi - P_{V_\lambda}\xi\|$ в зависимости от $\lambda \in \Lambda_n$. Для сигнала 1 минимаксная оценка параметра $\lambda$ равна $27.0 \pm 6.0$; для сигнала 2 — $14.6 \pm 2.7$. Большая погрешность оценки параметра $\lambda$ по сигналу 1 объясняется попаданием на сильнонаклонную область. Для сигнала 3 модель

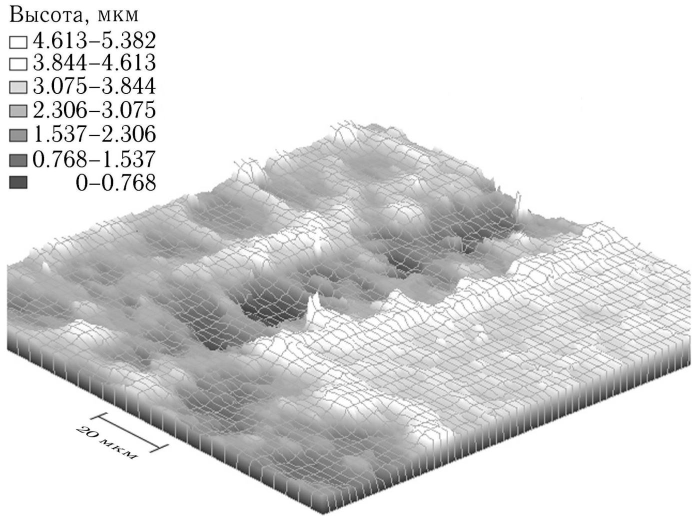


*Рис. 3.* Результаты оценки профиля поверхности микрообъекта — края выжженной лазером цифры на золотом корпусе микросхемы. Видны впадины, нанесенные лучом лазера на поверхности корпуса. Размеры поля зрения $\sim 80 \times 80$ мкм

является неадекватной. Это объясняется тем, что область не содержит четкой текстуры и дисперсия не зависит от положения фокуса.

На рис. 3 представлены результаты оценки профиля поверхности микрообъекта в точках прямоугольной сетки на поле зрения $X$, полученную описанным выше методом.

## Заключение

На основе подходов, известных как морфологический анализ, получен метод оптимальной оценки параметров формы сигналов, полученных от объекта в условиях существенной неопределенности, минимизирующий максимальную ошибку, а также метод контроля адекватности используемой математической модели.

## Литература


1. *Пытьев Ю.П.* // ДАН. 1983. **269**, № 5. С. 1061.
2. *Pyt'ev Yu.P.* // Pattern Recognition and Image Analysis. 1993. **3**, N 1. P. 19.
3. *Пытьев Ю.П.* Задачи морфологического анализа изображений // Математические методы анализа природных ресурсов Земли из Космоса. М., 1984.
4. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980.
5. *Пытьев Ю.П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М., 2002.
6. *Захарченко А.А.* // Сб. докл. 12-й Всеросс. конф. «Математические методы распознавания образов». М., 2005. С. 335.


Поступила в редакцию
16.12.05