КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.233.3:519.233.32:519.254

ИНВАРИАНТНЫЙ КРИТЕРИЙ В ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЙ

Д. А. Кольцов

(*кафедра компьютерных методов физики*)

E-mail: damage@cmp.phys.msu.su

Предложен метод проверки адекватности модели измерений в линейной схеме наблюдений с аддитивным стохастическим шумом в случае неизвестной дисперсии шума.

Процесс анализа и интерпретации данных определяется различными факторами: схемой проведения эксперимента, математической моделью формирования данных, априорной и апостериорной информацией об измеряемых величинах. Рассмотрим следующую схему измерений:

$$\xi = Af + \nu, \tag{1}$$

где $f \in \mathcal{R}_m$ — вектор ненаблюдаемых значений параметров, характеризующих измеряемый объект; $A \in L(\mathcal{R}_m \to \mathcal{R}_n)$ — линейный оператор, моделирующий измерительный прибор; $\nu \in \mathcal{R}_n$ — вектор шума, характеризующий неточность измерений при проведении эксперимента. Будем предполагать, что шумовая компонента в (1) является случайным вектором со средним значением $E\nu = 0$ и корреляционным оператором Σ. При этом будем говорить, что задана модель измерений $[A, \Sigma]$ для схемы (1) [1]. В задачах математического моделирования одними из основных направлений исследований являются анализ и интерпретация измерений. Целью задачи анализа, согласно [1], является ответ на вопрос о том, насколько адекватна предложенная модель измерений, а одной из основных целей задачи интерпретации — ответ на вопрос о том, какова точность алгоритмов интерпретации, например точность оценивания вектора ненаблюдаемых параметров f.

Рассмотрим задачу анализа измерений в ситуации, когда исследователь не располагает информацией о том, верна ли выбранная им модель $[A, \Sigma]$. В такой задаче возникает два основных вопроса: во-первых, насколько хорошо согласуется (теоретическая) модель $[A, \Sigma]$ с (практическими) результатами измерений ξ; во-вторых, можно ли использовать принятую модель $[A, \Sigma]$ (возможно, и не являющуюся истинной) для интерпретации измерений, т. е. можно ли утверждать, что принятая модель дает приемлемую погрешность решения задачи интерпретации. Будем рассматривать первое направление исследований. Задача анализа измерений в рамках данного направления может быть поставлена как задача проверки адекватности модели $[A, \Sigma]$ по отношению к наблюдаемым измерениям ξ. В работе [1] рассмотрены и решены задачи проверки адекватности в различных постановках, в том числе в случае, когда считается известным корреляционный оператор шума Σ и предполагается, что вектор ν имеет нормальное распределение. Мы будем предполагать, что координаты вектора ν являются независимыми нормально распределенными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2, т. е. $\Sigma = \sigma^2 I$, где I — единичный оператор, $I \in L(\mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_n)$. При этом будем считать, что σ^2 является неизвестным параметром в задаче проверки адекватности модели.

Если рассматривать σ^2 как «мешающий» параметр, то, предполагая, что $k_A = \dim \mathcal{R}(A) > 1$, задачу проверки адекватности модели измерений $[A, \Sigma]$ можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} &H^1\colon\ \xi \sim \mathbb{N}(a, \Sigma),\ a \in \mathcal{R}(A) \setminus \mathcal{R}(A_0), \\ &H^2\colon\ \xi \sim \mathbb{N}(a, \Sigma),\ a \notin \mathcal{R}(A), \end{aligned} \tag{2}$$

где $A_0 \in L(\mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_n)$ — оператор, элементы матрицы которого совпадают с координатами произвольного фиксированного вектора из $\mathcal{R}(A)$ ($\mathcal{R}(A)$ — пространство значений оператора A; выражение $\mathcal{R}(A) \setminus \mathcal{R}(A_0)$ обозначает теоретико-множественную разность). Если верна гипотеза H^2, то ни при каком f вектор ξ не может быть представлен в виде $\xi = Af + \nu$, и в этом случае мы считаем модель неадекватной. Если верна гипотеза H^1, то вектор измерений ξ представим в виде $\xi = a + \nu$ для некоторого вектора a, принадлежащего $\mathcal{R}(A)$, но не принадлежащего $\mathcal{R}(A_0)$. Из этого, однако, не следует, что модель измерений $[A, \Sigma]$ верна —

это означает лишь то, что модель не противоречит наблюдениям ξ.

Отметим, что если мы имеем в распоряжении $k_A > 1$ «степеней свободы» в пространстве $\mathcal{R}(A)$, то мы можем пожертвовать одной степенью свободы для того, чтобы избавиться от мешающего параметра σ^2. Кроме того, мы предполагаем, что в эксперименте не может наблюдаться значение $\xi = a + \nu$, где $a \in \mathcal{R}(A_0)$, и это обеспечивает выполнение условия взаимного дополнения для H^1, H^2. Заметим, что выбор конкретного оператора A_0 требует определенных дополнительных предположений или аргументов и во многом зависит от особенностей предметной области конкретной решаемой задачи и предпочтений исследователя.

Данная задача проверки гипотез обладает определенным свойством симметрии, связанным с наличием инвариантности суждений в пользу гипотезы H^1 или H^2 относительно преобразований $g \in G$, где G — группа преобразований g пространства $\mathcal{R}_n$, действующих по формуле

$$x \to gx = wZx + z,$$

$w \neq 0$ — число; $\{Z\}$ — группа ортогональных преобразований в $\mathcal{R}_n$, оставляющих неподвижными линейные подпространства $\mathcal{R}_A^{\perp}(A_0) \equiv \mathcal{R}(A) \bigcap \mathcal{R}^{\perp}(A_0)$ и $\mathcal{R}(A_0)$; z — произвольный вектор из подпространства $\mathcal{R}_A^{\perp}(A_0)$. В таких условиях естественно пользоваться принципом инвариантности и строить решение задачи (2) на основании соответствующего инвариантного критерия. Пусть Π, Π_0 — ортогональные проекторы на $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(A_0)$ соответственно. Для них справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Функционал* $j(x) = \|(I - \Pi)x\|^2\|\Pi_0 x\|^{-2}$ *есть максимальный инвариант группы преобразований G. В классе инвариантных критериев существует равномерно наиболее мощный, который отклоняет гипотезу H^1 по наблюдению ξ всякий раз, когда $j(\xi) > j^b(\varepsilon)$, где константа $j^b(\varepsilon)$ выбирается таким образом, чтобы уровень критерия был равен $\varepsilon, \varepsilon \in [0, 1]$.*

В соответствии с данным утверждением если $j(\xi) > j^b(\varepsilon)$, то модель измерений $[A, \Sigma]$ признается неадекватной, в противном случае модель принимается как не противоречащая наблюдаемым измерениям ξ.

По аналогии с методикой, изложенной в [1], на основе понятия надежности гипотезы H^1 при альтернативе H^2 введем следующую величину:

$$\alpha_A(\xi) = \int\limits_{j(\xi)}^{\infty} p\left(\frac{k_\perp}{k_0} z\right) \frac{k_\perp}{k_0}\, dz, \tag{3}$$

где $p(\cdot)$ — плотность распределения Фишера с $k_\perp = \operatorname{rank}(I - \Pi)$, $k_0 = \operatorname{rank}\Pi_0 = 1$ степенями свободы. Статистику $\alpha_A(\xi)$ назовем надежностью модели $[A, \Sigma]$ в случае неизвестного параметра σ^2 корреляционного оператора $\Sigma = \sigma^2 I$. Вероятность больших значений $\alpha_A(\xi)$ при истинной гипотезе H^1 выше, чем в случае, когда гипотеза H^1 неверна. В связи с этим отметим, что если оператор A истинной модели является неизвестным для исследователя оператором из заданного класса $\mathcal{A}$, то на основе введенной величины (3) и метода максимальной надежности модели [1, 2] можно в условиях неизвестного параметра σ^2 оценивать оператор A (проводить «синтез» модели измерений).

Пусть задан класс $\mathcal{M} = \{[A, \Sigma],\ A \in \mathcal{A}, \Sigma = \sigma^2 I\}$ моделей измерений. Тогда результатом синтеза модели, осуществляемого на основе метода максимальной надежности, будем считать такую модель измерений $[A, \Sigma]$, для которой оператор A обеспечивает экстремум $\alpha_*(\xi) = \max\{\alpha_{\widetilde{A}}(\xi) \mid [\widetilde{A}, \Sigma] \in \mathcal{M}\}$.

Изложенные выше алгоритмы проверки адекватности модели и синтеза модели измерений были использованы для распознавания обвалов геологических пород на изображениях, полученных по данным бурения от трех различных датчиков. Геометрическая модель определяет изображение обвала как след в виде вертикальной полосы на поле зрения, образованный пересечением кругового цилиндра (колодца) и слоя, параллельного оси цилиндра. Параметрами обвала $\lambda, \lambda \in \Lambda$ (множество параметров Λ однозначно определяет класс $\mathcal{M}$ моделей измерений), определяющими форму его изображения, являются азимутальный угол плоского слоя и толщина слоя. На основе описанных выше методов была разработана и применена процедура обнаружения и оценивания параметров обвалов по данным бурения, полученным от трех различных датчиков. Эта процедура обладает более высоким качеством (оцениваемым на основе экспертных критериев) по сравнению с аналогичной процедурой, использующей данные от одного датчика [3, 4].

Литература

1. *Пытьев Ю.П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М., 2004.
2. *Пытьев Ю.П.* Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применения. М., 2006.
3. *Кольцов Д.А.* Синтез модели эксперимента в задачах интерпретации данных. Распознавание обвалов по данным бурения скважин // Сб. трудов 1-й Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование». М., 2005. С. 607.
4. *Кольцов Д.А., Пытьев Ю.П., Чуличков А.И.* Способ распознавания обвалов по данным бурения, полученным от трех различных датчиков. Патент, рег. № 2005127312, 30 августа 2005 г.

Поступила в редакцию
15.11.06