

УДК 534

СПИРАЛЬНОСТЬ СОСЕДНИХ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

П. В. Елютин

(кафедра квантовой электроники)

E-mail: pve@shg.phys.msu.su

Спиральность соседних фазовых траекторий в хаотических динамических системах может быть охарактеризована распределением локальных угловых скоростей вращения инфинитезимального вектора смещения, эволюция которого определяется линеаризованными уравнениями движения. Это распределение родственно распределению локальных показателей Ляпунова. Простейшие модели показывают, что скорость закручивания соседних траекторий влияет на скорость перемешивания динамических переменных и на чувствительность фазовых траекторий к возмущениям.

1. В нелинейной динамике систем — потоков с уравнениями движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

где \mathbf{x} — вектор, представляющий состояние системы в K -мерном фазовом пространстве, $\mathbf{x} = \{x_i\}$, $1 \leq i \leq K$, важную роль играют свойства эволюции инфинитезимального вектора смещения $\mathbf{r}(t)$, которые определяются линейной системой уравнений

$$\dot{\mathbf{r}} = \hat{M}\mathbf{r}, \quad (2)$$

где \hat{M} — локальная матрица устойчивости с элементами $M_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$, которые берутся в точках фазовой траектории $\mathbf{x}(t)$ и зависят в общем случае от времени. Существование экспоненциально растущих со временем решений системы (2) определяет хаотичность движения системы (1).

Для почти любых начальных условий вектор смещения $\mathbf{r}(t)$ будет приближаться к собственной моде системы (2), обладающей максимальной скоростью экспоненциального роста, которая определяется первым (максимальным) характеристическим показателем σ_i , часто называемым просто показателем Ляпунова σ . Поэтому поведение $\mathbf{r}(t)$ при больших временах $t \gg \sigma^{-1}$ перестает зависеть от начальных условий и представляет некоторую характеристику хаотического движения в целом. Это свойство лежит в основе стандартного метода численного расчета показателя Ляпунова [1], который определяется скоростью роста величины вектора $\mathbf{r}(t)$. Однако эволюцию ориентации этого вектора обычно оставляют без внимания, и даже в монографиях по хаотической динамике расходящиеся близкие траектории на рисунках принято изображать компланарными (см., напр., [2–8]).

Ограничимся пока рассмотрением движения в пространстве с минимальной размерностью $K = 3$, при которой возможен хаос в системах — потоках (1). Тогда эволюция направления вектора

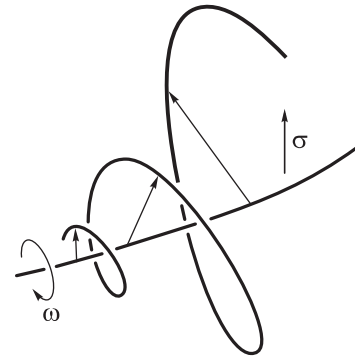


Рис. 1. Качественная схема положения соседних фазовых траекторий хаотического движения в трехмерном фазовом пространстве. Увеличение длины вектора смещения по экспоненциальному закону с показателем σ может сопровождаться его вращением с угловой скоростью ω

смещения $\mathbf{r}(t)$ может быть описана как вращение вокруг направления фазовой траектории: соседние траектории могут обладать спиральностью (рис. 1).

Мгновенная угловая скорость этого вращения $\omega(t)$ определяется выражением

$$\omega(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\mathbf{r}(t + \varepsilon) \times \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{r}(t + \varepsilon)\| \|\mathbf{r}(t)\| \|\mathbf{v}(t)\|}, \quad (3)$$

где $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ — вектор фазовой скорости, касательный к фазовой траектории, а $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ — смешанное произведение трех векторов. Распределение (плотность вероятности) W значений ω не зависит ни от выбора начального момента времени, ни от начальных условий для системы (2), если начальные точки принадлежат данной хаотической компоненте. Оно так же универсально, как и распределение локальных показателей Ляпунова — величин, определяемых соотношением

$$\sigma(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{\|\mathbf{r}(t + \varepsilon)\|}{\|\mathbf{r}(t)\|} \quad (4)$$

и широко используемых для исследования структуры фазового пространства хаотических систем [9–11]. Из сравнения формул (3) и (4) можно заключить, что мгновенная угловая скорость может (в пиквикском смысле) считаться мнимой частью локального показателя Ляпунова и использоваться как зонд для анализа тонких деталей хаотической динамики.

Отметим, что вопрос об эволюции ориентации вектора смещения уже поднимался в литературе [12, 13]. Однако использованное в этих работах описание направления вектора смещения углами по отношению к априорно выбранным осям представляется менее эффективным, так как распределение таких углов, во-первых, зависит от произвола в выборе осей, а во-вторых, не обладает инвариантностью по отношению к замене переменных в исходной динамической системе (1). Распределение $W(\omega)$ является существенно более инвариантным.

2. В качестве примера используем известную модель Лоренца [14] с уравнениями движения

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ \end{aligned} \quad (5)$$

при стандартных значениях параметров $\sigma = 10$, $r = 28$ и $b = 8/3$. Распределение W представлено на рис. 2. Оно имеет форму узкого асимметричного пика с широкими крыльями (расчеты для других хаотических моделей показывают, что такая форма распределения типична). Максимум плотности достигается при положительном значении $\omega_{\max} \approx 0.04$. Средняя величина скорости вращения $\bar{\omega} = 0.158$ существенно меньше величины стандартного отклонения $\Delta\omega = 0.63$. Заметим, что для модели Лоренца при выбранных значениях параметров характеристическая частота движения, оцененная из спектра мощности переменной $Z(t)$, $\Omega \approx 8$, в то время как показатель Ляпунова $\sigma \approx 1.0$. Таким образом, малое значение $\bar{\omega}$ указывает на присутствие в динамике

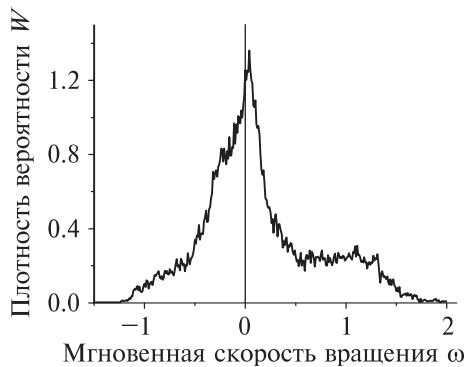


Рис. 2. Распределение W мгновенных скоростей вращения ω для модели Лоренца (5) со стандартными значениями параметров $\sigma = 10$, $r = 28$ и $b = 8/3$

модели Лоренца дополнительного большого масштаба времени.

3. Смысл введения величины ω можно продемонстрировать, выявив связь между ω и стандартными характеристиками хаотического движения. Сходство происхождения величин ω и σ подсказывает, что соотношения, включающие показатель Ляпунова σ , могут подобным образом включать и ω .

В нелинейной динамике широко известно правило: скорость перемешивания (обратное время затухания корреляций) γ примерно равна показателю Ляпунова, т. е.

$$\gamma \approx \sigma. \quad (6)$$

Это соотношение иногда превращается в точное равенство (например, для линейного датчика случайных чисел $x' = \{Qx\}$, где $\{\cdot\}$ — символ дробной части числа, а Q — целочисленный параметр), а иногда формула (6) отражает скейлинг $\gamma \propto \sigma$ (например, такая пропорциональность в точности выполняется для бильярдов). В общем случае соотношение (6) предполагается выполняющимся хотя бы полуколичественно для произвольных систем [15]. Вид спиральных траекторий, показанных на рис. 1, позволяет предположить, что увеличение ω интенсифицирует скорость исследования фазовой траекторией фазового пространства и тем ускоряет перемешивание.

Для проверки этой гипотезы обратимся к классу двумерных отображений, которые можно интерпретировать как отображения Пуанкаре для трехмерного потока. В этом классе легко сконструировать модели, которые допускают контролируемое и независимое изменение параметров ω и σ . Обозначим компоненты нормированного вектора смещения на n -м шаге, $s_n = r_n / \|r_n\|$, как $\{\xi_n, \eta_n\}$. Тогда скорость поворота можно определить как угол вращения за один шаг отображения:

$$\omega_n = \arcsin(\xi_{n+1}\eta_n - \xi_n\eta_{n+1}). \quad (7)$$

Определим скорость затухания корреляций (скорость перемешивания) величины с корреляционной функцией $B(n)$ соотношением

$$\gamma = \ln \left(\frac{S}{S-1} \right), \quad S = \frac{1}{B(0)} \sum_{i=0}^{\infty} |B(i)|. \quad (8)$$

Для экспоненциальной корреляционной функции $B(n) = B(0) \exp(-\alpha n)$ определение (8) приводит к скорости перемешивания, равной показателю экспоненты: $\gamma = \alpha$.

В качестве примера системы, для которой можно менять ω при постоянном σ , рассмотрим кусочно-линейное отображение единичного квадрата на себя, заданное формулами

$$x' = \{ax + by\}, \quad y' = \{-bx + ay\}, \quad (9)$$

в котором параметры отображения связаны с показателем Ляпунова и скоростью вращения соотношениями

$$a = \exp \sigma \cos \omega, \quad b = \exp \sigma \sin \omega. \quad (10)$$

Найденные с помощью численных расчетов значения скоростей перемешивания динамических переменных x и y при различных значениях ω представлены на рис. 3. Эти результаты подтверждают интуитивную гипотезу: при малых значениях угловой скорости ω ее увеличение ведет к увеличению скорости перемешивания γ .

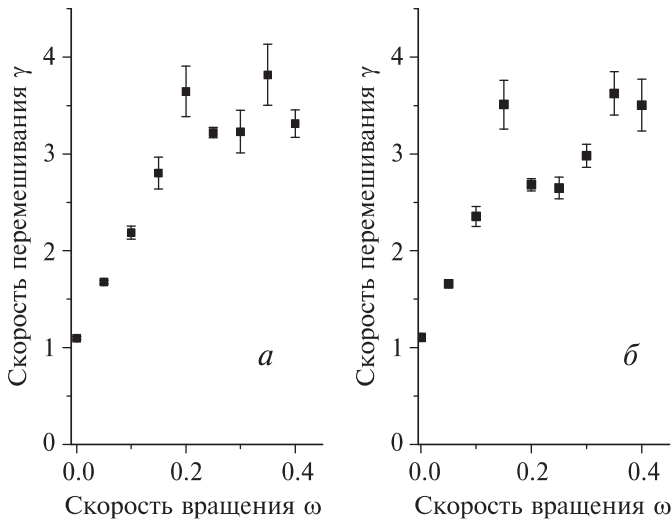


Рис. 3. Зависимость скорости перемешивания γ от скорости вращения ω при постоянном значении показателя Ляпунова σ для двумерного отображения (9): a — для переменной x , b — для переменной y

4. Сравним динамическую систему (1) с ее возмущенным вариантом

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{x}), \quad (11)$$

где $\varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{x})$ — некоторое стационарное возмущение. Пусть зависимости $\mathbf{x}_0(t)$ и $\mathbf{x}_V(t)$ описывают законы движения невозмущенной (1) и возмущенной (11) систем при одинаковых начальных условиях. Обозначим расстояние между положениями фазовых точек в данный момент времени t как $\Delta(t) = |\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}_V(t)|$. Для заданной точки \mathbf{x} в фазовом пространстве введем величину

$$\Delta(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta(t)}{|\varepsilon|} \exp(-\sigma t), \quad (12)$$

$t \rightarrow \infty$

которая определяет амплитуду отклика системы на возмущение заданной формы. Эта величина, усредненная по заданной хаотической компоненте, $D = \langle \Delta(\mathbf{x}) \rangle$, представляет удобную характеристику чувствительности системы (1) к малым возмущениям.

Рассмотрим простейшую модель эволюции отклонений, заданных системой потоков

$$\dot{\xi} - \sigma \xi + \omega \eta = U, \quad \dot{\eta} - \omega \xi - \sigma \eta = V \quad (13)$$

с постоянными параметрами σ , ω , U и V . В отсутствие возмущений ($U = V = 0$) система (13) описывает вращение вектора смещения с постоянной угловой скоростью ω и экспоненциальный рост его величины со скоростью σ . Для $U, V \neq 0$ асимптотика решений этой системы при $\sigma t \gg 1$ имеет вид

$$\xi \approx \frac{e^{\sigma t}}{\sigma^2 + \omega^2} [(\sigma U - \omega V) \cos \omega t + (\omega U + \sigma V) \sin \omega t],$$

$$\eta \approx \frac{e^{\sigma t}}{\sigma^2 + \omega^2} [(\omega U + \sigma V) \cos \omega t + (-\sigma U + \omega V) \sin \omega t]. \quad (14)$$

Из определения (12) для каждого из возмущений получаем для средней величины амплитуды отклика

$$D = \frac{1}{\sqrt{2(\sigma^2 + \omega^2)}}. \quad (15)$$

Следовательно, для схематической модели (13) с увеличением скорости вращения амплитуда отклика будет уменьшаться. Можно предположить, что такая связь является универсальной для хаотических систем.

Вернемся к кусочно-линейной модели (10) и рассмотрим ее возмущение малыми изменениями параметров

$$x' = \{(a + \varepsilon)x + by\}, \quad y' = \{-bx + ay\} \quad (16)$$

и

$$x' = \{ax + (b + \varepsilon)y\}, \quad y' = \{-bx + ay\}. \quad (17)$$

Найденные с помощью численных расчетов значения амплитуды отклика при различных ω представлены на рис. 4. Результаты показывают, что с увеличением скорости углового вращения ω усредненная амплитуда отклика D в целом уменьшается подобно зависимости (15).

В последние годы динамика эволюции траекторий под воздействием малых возмущений привлекла большое внимание в теории хаотических гамильтоновых систем [16–18]. Описанный выше пример показывает, что скорость вращения может влиять на предэкспоненциальные факторы такого отклика.

5. Всюду выше мы ограничивались рассмотрением движения в трехмерном фазовом пространстве. Этот случай и сам по себе достаточно важен, ибо включает основные элементарные модели, причем как диссипативные, так и консервативные (заметим, что именно для случая $K = 3$ эффективна широко распространенная техника представления фазовой траектории ее следом на сечении Пуанкаре). Однако естественно встает вопрос о возможном обобщении определения скорости вращения (3) на пространства бóльших размерностей, которое может быть

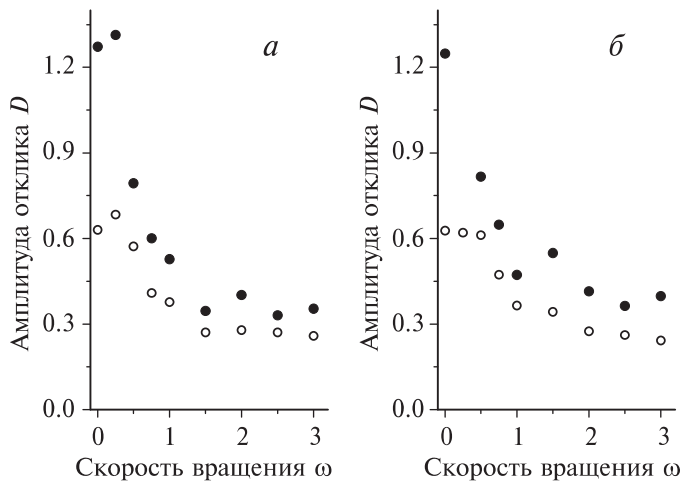


Рис. 4. Зависимость амплитуды отклика D от угловой скорости вращения ω для различных возмущений двумерного отображения (10): a — для возмущенной системы (13), b — для возмущенной системы (14). На графиках темные кружки соответствуют значению $\sigma = 0.25$, а светлые — значению $\sigma = 0.5$

построено с помощью выражения для ориентированного объема V_K в K -мерном пространстве [19]. Объем V_K может быть сконструирован из единичного вектора в направлении фазовой скорости $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)/\|\mathbf{v}(t)\|$ и совокупности $K - 1$ нормированных (единичных) векторов смещения, взятых в последовательные эквидистантные моменты времени, $\mathbf{s}(t+k\varepsilon) = \mathbf{r}(t+k\varepsilon)/\|\mathbf{r}(t+k\varepsilon)\|$, $0 \leq k \leq K - 2$, сверткой \mathbf{u} и \mathbf{s} с антисимметричным тензором K -го ранга $E_{ijk\dots n}$:

$$V_K(t) = E_{ijk\dots n} u_i(t) s_j(t) s_k(t + \varepsilon) \dots s_n(t + (K-2)\varepsilon). \quad (18)$$

При малых ε эта величина пропорциональна ε^N , где $N = (K - 1)(K - 2)/2$, и обобщенная скорость «вращения» может быть определена как

$$\omega_K(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-N} V_K(t). \quad (19)$$

Эта величина при $K > 3$ зависит не только от элементов матрицы устойчивости в данный момент времени, но и от их временных производных до порядка $N - 1$.

Более простым и практичным представляется другой способ использования спиральности в многомерных системах, состоящий в рассмотрении парциальных скоростей вращения вектора смещения в трехмерных подпространствах. Можно предположить, что отмеченные в разд. 3 и 4 качественные свойства — увеличение скорости перемешивания

и устойчивости к возмущениям с ростом скорости вращения — будут свойственны и парциальным скоростям.

Автор благодарит за полезные обсуждения Е. Д. Белегу, Л. В. Келдыша, Г. Н. Медведева, А. А. Никулина и Д. Д. Соколова. Автор выражает особую благодарность А. А. Никулину за художественное исполнение рис. 1. Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке программы «Российские научные школы» (грант НШ 4464.2006.2).

Литература

1. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.B. // Phys. Rev. A. 1976. **14**. P. 2338.
2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М., 1984. С. 295.
3. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М., 1987. С. 228.
4. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М., 1988. С. 101.
5. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М., 1990. С. 132.
6. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М., 2000. С. 171.
7. Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М., 2000. С. 13.
8. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М., 2001. С. 130.
9. Sepulveda M.A., Badii R., Pollak E. // Phys. Rev. Lett. 1989. **63**. P. 1226.
10. Amitrano C., Berry R.S. // Phys. Rev. E. 1993. **47**. P. 3158.
11. Prasad A., Ramaswamy R. // Phys. Rev. E. 1999. **60**. P. 2761.
12. Contopoulos G., Voglis N. // Cel. Mech. Dyn. Astron. 1996. **64**. P. 1.
13. Contopoulos G., Voglis N. // Astron. Astrophys. 1997. **317**. P. 73.
14. Lorenz E.N. // J. Atmos. Sci. 1963. **30**. P. 130.
15. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М., 1984. С. 30, 106.
16. Jalabert R.A., Pastawski H.M. // Phys. Rev. Lett. 2001. **86**. P. 2490.
17. Karkuszewski Z.P., Jarzynski Ch., Zurek W.H. // Phys. Rev. Lett. 2002. **89**. P. 170405.
18. Jacquod Ph., Adagideli I., Beenakker C.W.J. // Phys. Rev. Lett. 2002. **89**. P. 154103.
19. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. Гл. 6. М., 1990.

Поступила в редакцию
20.02.06