УДК 530.12:531.51

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СПИНОРА КИЛЛИНГА НА НЕВЫРОЖДЕННОМ ДЕФОРМИРОВАННОМ КОНИФОЛДЕ

А. Я. Дымарский, В. Ч. Жуковский

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: zhukovsk@phys.msu.ru

Найден явный вид спинора Киллинга (генератора ($\mathcal{N}=1$)-суперсимметрии) для невырожденного деформированного конифолда [3].

1. Геометрия деформированного конифолда [1, 2] с ненулевыми Рамон–Рамон-полем и Невье-Шварц–Невье-Шварц-полем (в дальнейшем: R-R- и NS-NS-поля), заданным формой B_2, является дуальной геометрией для $\mathcal{N}=1$ $SU(M)\times SU(2M)$-теории поля с глобальной симметрией $SU(2)\times SU(2)$. Данное решение обладает симметрией Z_2 (которая меняет $SU(2)$ местами) и суперсимметрично. Суперсимметрия этого решения следует из ненарушенной суперсимметрии в теории поля при низких энергиях. Кроме того, она была проверена явно [6] с помощью построения спинора Киллинга Ψ (генератора суперсимметрии), который удовлетворяет обобщенному уравнению Киллинга

$$\begin{aligned} &N_{\mu_1\mu_2\mu_3}\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi=0,\\ &D_\mu\Psi+\frac{i}{1920}F^{(5)}_{\mu_1\cdots\mu_5}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}\Gamma_\mu\Psi+\\ &\quad+\frac{1}{96}F_{\mu_1\mu_2\mu_3}\left(\Gamma_\mu^{\mu_1\mu_2\mu_3}-9\delta_\mu^{\mu_1}\Gamma^{\mu_2\mu_3}\right)\Psi^*=0,\\ &N_{\mu_1\mu_2\mu_3}=g_s^{-1/2}H_{\mu_1\mu_2\mu_3}+ig_s^{\frac{1}{2}}F^{(3)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}, \end{aligned} \tag{1}$$

(матрица зарядового сопряжения B взята единичной для удобства). Здесь использованы стандартные обозначения (см., напр., [6]).

Изучение семейства вакуумов теории поля позволяет предсказать существование несимметричных относительно Z_2 и суперсимметричных вакуумов, которые объединяются в так называемую барионную ветвь решений и параметризуются значениями барионных полей B и $\tilde{B}$ [2, 3]. Вакуум, симметричный относительно Z_2, таким образом, соответствует случаю $B=\tilde{B}$. Согласно общей гипотезе о дуальности теории поля при малых энергиях супергравитации, было сделано предположение о существовании других Z_2-несимметричных решений уравнений супергравитации, которые также объединяются в единую ветвь. Соответствующие уравнения движения были линеаризованы на фоне Z_2-симметричного деформированного конифолда (ДК) [2] и решены явно [3]. В тех же работах было высказано предположение, что полученное решение соответствует суперсимметричному вакууму с малой асимметрией

$$\epsilon=B^2-\tilde{B}^2 \tag{2}$$

и должно быть суперсимметричным. Заметим, что в [3] решение (точнее, соответствующий анзац) было фактически угадано на основе анализа симметрии Z_2. Вопрос о доказательстве суперсимметричности данного решения в работе не ставился. В настоящей заметке мы изучаем решение [3] и явно находим генератор суперсимметрии, т. е. спинор Киллинга, удовлетворяющий уравнению (1). Наше решение является дедуктивно строгим, и, таким образом, можно утверждать, что найденный спинор Киллинга — единственный ($\mathcal{N}=1$).

Решение [3] было впоследствии обобщено на случай произвольно большой асимметрии (2) [4]. Для нахождения этого решения был успешно использован новый метод $SU(3)$-структуры [5], который гарантирует суперсимметрию. Однако он определяет спинор Киллинга неявным образом. Решение [4] по сути является первым случаем применения $SU(3)$-структуры на практике. Сравнивая наш результат со спинором, который можно сконструировать на основе [4], мы также проверяем правильность результатов (и метода) этой работы. Отдельно заметим, что метод $SU(3)$-структуры не дает информации о количестве суперсимметрий (спиноров Киллинга). Таким образом, настоящая работа является единственным строгим доказательством единственности решения обобщенного уравнения (1).

2. Для начала кратко обсудим случай деформированного конифолда. Десятимерное пространство в этом случае есть произведение плоского четырехмерного (физического) и некомпактного шестимерного пространства Калаби–Яу, которое с технической точки зрения и есть ДК

$$\begin{aligned} ds_{10}^2&=h^{-1/2}\sum_{\alpha=0}^{3}dy_\alpha^2+h^{1/2}ds_6^2,\\ ds_6^2&=e_1^2+e_2^2+e_{\hat 1}^2+e_{\hat 2}^2+e_3^2+e_\tau^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Функция h, которая зависит только от τ, называется деформирующим параметром и связывает шестимерную и четырехмерную геометрии. Кроме метрики ненулевые значения имеют R-R-поля

$$F_5 = (1 - *_{10}) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge d(h^{-1}) \qquad (4)$$

и F_3, а также NS-NS-поле $H_3 = dB_2$. Мы не приводим явный вид этих полей в компонентах из-за чрезвычайной громоздкости выражений и отсылаем читателя к соответствующей литературе [2, 3]. Явный вид 1-форм $e_i, e_{\tilde{i}}, e_\tau$ приводится в работе [6].

В случае $h = 1$, $F_5 = 0$, $N_3 = 0$ геометрия разбивается на прямое произведение $\mathbb{R}^4 \times M^6$, и, таким образом, уравнение (1) сводится к уравнению ковариантно-постоянного спинора (Киллинга)

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \Gamma_{ab} \psi = 0, \quad \mu = 1, 2, \tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tau, \qquad (5)$$

на многообразии типа Калаби–Яу. Соответствующая математическая теорема гарантирует существование шестимерного спинора Киллинга любой киральности. Он был найден явно в работе [6]:

$$\Psi_0 = \psi \otimes \xi, \quad \psi = e^{-\alpha \Gamma_{\tilde{1}1}/2} \eta, \quad \cos\alpha = \tanh(\tau),$$
$$\Gamma_{12}\eta = -\Gamma_{\tilde{1}\tilde{2}}\eta, \quad \Gamma_{12}\eta = \Gamma_{5\tau}\eta. \qquad (6)$$

Здесь ξ — постоянный киральный четырехмерный спинор, а η — постоянный киральный спинор в шестимерном пространстве.

Далее мы «включаем» нетривиальный деформирующий параметр $h(t)$ вместе с полем F_5 (4). Новое решение записывается в виде

$$\Psi_h = h^{-1/8} \Psi_0 \qquad (7)$$

при условии, что постоянный спинор η удовлетворяет дополнительным соотношениям (в частности, фиксирующим его киральность)

$$\begin{aligned} &\Gamma_{12}\eta = i\eta, \quad \Gamma_{\tilde{1}\tilde{2}}\eta = -i\eta, \\ &\Gamma_{5\tau}\eta = i\eta, \quad \Gamma_{12\tilde{1}\tilde{2}5\tau}\eta = i\eta. \end{aligned} \qquad (8)$$

На следующем шаге мы добавляем самодуальную форму $N_{\mu\nu\rho}$ ($F_3 = *_6 H$, где сопряжение Ходжа $*_6$ определено на M^6 с метрикой ds_6^2). Несложно проверить, что

$$N^{(3)}_{\mu_1\mu_2\mu_3} \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_h = 0 \qquad (9)$$

для любого левого (шестимерного кирального) спинора, каковым является Ψ_h при определенном выборе η (8). Кроме того,

$$\frac{1}{3! \cdot 16} N^{(3)}_{\mu_1\mu_2\mu_3} \left(\Gamma_\mu^{\mu_1\mu_2\mu_3} - 9\delta_\mu^{\mu_1} \Gamma^{\mu_2\mu_3} \right) B^{-1} \Psi_h^* = 0. \qquad (10)$$

Ключевым условием для доказательства этого факта является тождество $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_h = 0$, которое может быть проверено напрямую. Данное рассуждение заканчивает рассмотрение Z_2-симметричного ДК. Соответствующий (единственный) спинор Киллинга дается формулой (7).

3. Основная цель настоящей работы — явное нахождение спинора Киллинга для деформированной метрики (3), в которой

$$\begin{aligned} &e_1 \to e_1 + \alpha e_1 + \beta e_{\tilde{1}}, && e_2 \to e_2 + \alpha e_2 + \beta e_{\tilde{2}}, \\ &e_{\tilde{1}} \to e_{\tilde{1}} - \alpha e_{\tilde{1}} + \beta e_1, && e_{\tilde{2}} \to e_{\tilde{2}} - \alpha e_{\tilde{2}} + \beta e_2, \\ &\alpha = \frac{\mathrm{m}(\tau)}{8\cosh(\tau)}, && \beta = \frac{\mathrm{m}(\tau)}{8\sinh(\tau)\cosh(\tau)}, \\ &\mathrm{m}(\tau) = h^{1/2}(\tau\coth\tau - 1), && m = 8^{-1}\mathrm{m}K\epsilon^{4/3}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Соответствующее многообразие не является многообразием типа Калаби–Яу и называется невырожденным (относительно Z_2) деформированным конифолдом. Рамон-рамоновские формы остаются такими же, как и в случае ДК, а новая NS-NS-форма продолжает удовлетворять уравнению $F_3 = *_6 H_3$. Функция m играет роль малого параметра, и все вычисления проводятся в линейном порядке по m. Четырехмерная часть уравнения (1) тривиальна, поэтому будем пользоваться шестимерными спинорами, подразумевая, что их надо умножить на киральный четырехмерный спинор ξ.

Естественно искать решение в виде

$$\psi = h^{-1/8}\psi_0 + h^{-1/8}\delta\psi_1 + h^{3/8}\delta\psi_2, \qquad (12)$$

или

$$\Psi = \Psi_0 + h^{-1/8}\delta\psi_1 \otimes \xi + h^{3/8}\delta\psi_2 \otimes \xi^*, \qquad (13)$$

где ψ_0 — решение задачи при $h = 1$, ψ_1 имеет ту же киральность, что и ψ_0, а ψ_2 — спинор противоположной киральности:

$$\Gamma_{12\tilde{1}\tilde{2}3\tau}\delta\psi_{0,1} = i\delta\psi_{0,1}, \qquad (14)$$

$$\Gamma_{x_0 \ldots x_3}\delta\psi_{0,1} = -i\delta\psi_{0,1}. \qquad (15)$$

Данный анзац является наиболее общим; множители $h^{-1/8}$, $h^{3/8}$ вынесены для удобства и могут быть включены в определение ψ_i. Подставляя данный анзац в первое из уравнений (1), получаем

$$N_{\mu\nu\rho}\Gamma^{\mu\nu\rho}\psi = N_{\mu\nu\rho}\Gamma^{\mu\nu\rho}\delta\psi_2 = 0 \Rightarrow H_{\mu\nu\rho}\Gamma^{\mu\nu\rho}\delta\tilde{\psi}_2 = 0, \qquad (16)$$

где $\delta\tilde{\psi}_2 = B\delta\psi_2^*$, или просто $\delta\psi_2^*$, если выбрать представление, в котором матрица зарядового сопряжения B единична (уравнение (1) записано именно в этом представлении).

Рассмотрим киральную компоненту второго из уравнений (1), для удобства проводя зарядовое сопряжение:

$$\begin{aligned} D_\mu(h^{3/8}\delta\tilde{\psi}_2) &+ \frac{i}{5! \cdot 16} F^{(5)}_{\mu_1 \ldots \mu_5}\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_5} h^{3/8}\delta\tilde{\psi}_2\Gamma_\mu + \\ &+ \frac{1}{3! \cdot 16}\left(N^*_{\alpha\beta\gamma} + \delta N^*_{\alpha\beta\gamma}\right)\left(\Gamma_\mu^{\alpha\beta\gamma} - 9\delta_\mu^\alpha\Gamma^{\beta\gamma}\right) \times \\ &\times \left(h^{-1/8}\psi_0 + h^{-1/8}\delta\psi_1\right) = 0. \end{aligned} \qquad (17)$$

Заметим, что противоположная (по сравнению с ψ_0) киральность приводит к тому, что вклад F_5 удваивает, а не сокращает соответствующий вклад D_μ. Рассматривая уравнение (17) сначала для $\mu = x^0, \ldots, x^3$ $(m_\mu = -1)$, а потом для

$\mu = 1, 2, \tilde{1}, \tilde{2}, 3, \tau$ $(m_\mu = 1)$ и используя (16) и аналогичное уравнение для ψ_0, получаем

$$h^{3/8}\left(\tilde{D}_\mu \delta\tilde{\psi}_2 - \frac{m_\mu}{4}\frac{\dot{h}}{h}\frac{\tilde{e}^a_\mu}{\tilde{e}^\tau_\tau}\Gamma_a\Gamma_\tau\right) - \\ -h^{-1/8}\frac{m_\mu}{3!\cdot 8}\tilde{e}^a_\mu\Gamma_a\left(H_{\alpha\beta\gamma}\Gamma^{\alpha\beta\Gamma}\delta\psi_1 + \delta H_{\alpha\beta\gamma}\Gamma^{\alpha\beta\Gamma}\psi_0\right) = 0. \quad (18)$$

Параметр h удобно рассматривать отдельно. Поэтому мы ввели тетраду $\tilde{e}$, соответствующую метрике (3) без h. Предыдущее рассуждение также относится и к спин-связности $\tilde{\varpi}^{ab}_\mu$ и к ковариантной производной $\tilde{D}_\mu$.

Постоянная матрица Дирака Γ_a не вырождена, а $D_\mu = 0$ для $x^\mu = y^0$. Следовательно, уравнение

$$\tilde{D}_\mu \delta\tilde{\psi}_2 = 0 \quad (19)$$

справедливо для любого μ. Опираясь на факт единственности ковариантно-постоянного спинора на ДК без R-R- и NS-NS-полей (см. разд. 2), находим, что

$$\delta\tilde{\psi}_2 = iA\psi_0, \quad (20)$$

где A — некая константа. Кроме того, уравнение (17) дает (при условии $x^\mu = y_0$)

$$\delta\tilde{\psi}_2 = \dot{h}^{-1}\left[\frac{M\alpha'}{\epsilon^{4/3}K(\tau)\cosh(\tau)}\right] \times \\ \times\left(i\coth(\tau)\chi'\psi_0 + \frac{\tau\cosh(\tau)-\sinh(\tau)}{\sinh^3(\tau)}\times \\ \times\left(\Gamma_{12} - \sinh(\tau)\Gamma_{1\tilde{2}} - i\cosh(\tau)\Gamma_{1\tilde{1}}\right)\delta\psi_1\right). \quad (21)$$

Уравнение (19) помогает упростить второе из уравнений Киллинга (1):

$$\partial_\mu\delta\psi_1 + \frac{1}{4}\tilde{\varpi}^{ab}_\mu\Gamma_{ab}\delta\psi_1 + \frac{1}{4}\delta\tilde{\varpi}^{ab}_\mu\Gamma_{ab}\psi_0 + \\ + \frac{Ah^{1/2}}{4}F_{\mu\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta}\psi_0 = 0. \quad (22)$$

Параметр h сократился так же, как в уравнении для ψ_0. Уравнение (22) для $\mu = \tau$ сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению и может быть решено однозначно:

$$\delta\psi_1 = \tilde{F}\Gamma_{\tilde{1}1}\psi_0, \\ \frac{d}{d\tau}\tilde{F} = \frac{m(\tau)}{8\sinh^2(\tau)} + \\ + A\left[\frac{M\alpha'}{\epsilon^{4/3}K(\tau)}\right]\frac{(\tau\cosh(\tau)-\sinh(\tau))}{\sinh^3(\tau)}. \quad (23)$$

Подставляя это решение обратно в (21), получаем

$$\tilde{F} = \frac{c_1\sinh\tau}{(\sinh(2\tau)-2\tau)^{1/2}} \quad (24)$$

и

$$m(\tau) = -8A\left[\frac{M\alpha'}{\epsilon^{4/3}}\right]\frac{\tau\cosh\tau-\sinh\tau}{K(\tau)\sinh\tau} - \\ - 16c_1\frac{\sinh^2\tau(\tau\cosh\tau-\sinh\tau)}{(\sinh(2\tau)-2\tau)^{3/2}}. \quad (25)$$

Сравнивая (25) с выражением для m из [3], фиксируем A (параметр A играет роль инфинитезимального параметра, пропорционального ϵ из (2)) и получаем, что $c_1 = 0$. Аналогичный результат можно получить, последовательно рассматривая другие компоненты уравнения (1). В результате получаем $\delta\psi_1 = 0$, и спинор Киллинга для разрешенного деформированного конифолда равен

$$\Psi = h^{-1/8}\Psi_0 + iAh^{3/8}\Psi_0^*, \quad (26)$$

что находится в полном согласии с результатом [4].

4. Таким образом, мы нашли явный вид спинора Киллинга для разрешенного деформированного конифолда (26). Это основной результат настоящей работы. Заметим, что рассмотренное решение уравнений супергравитации (разрешенный ДК) является единственным на сегодняшний день примером $\mathcal{N}=1$-суперсимметричного решения, построенного не на основе многообразия типа Калаби–Яу. При этом найденный нами спинор Киллинга (26) не имеет определенной шестимерной киральности (так называемый класс решений B) и не инвариантен относительно операции зарядового сопряжения (класс решений A). Таким образом, спинор (26) — это первый пример спинора «смешанного» типа.

Литература

1. *Papadopoulos G., Tseytlin A.A.* // Class. Quant. Grav. 2001. **18**. P. 1333.
2. *Klebanov I.R., Strassler M.J.* // J. High-Energy Phys. 2000. **0008**. P. 052.
3. *Gubser S.S., Herzog C.P., Klebanov I. R.* // J. High-Energy Phys. 2004. **0409**. P. 036.
4. *Butti A., Grana M., Minasian R.* et al. // J. High-Energy Phys. 2005. **0503**. P. 069.
5. *Grana M., Minasian R., Petrini M., Tomasiello A.* // J. High-Energy Phys. 2004. **0408**. P. 046.
6. *Arean D., Crooks D.E., Ramallo A.V.* // J. High-Energy Phys. 2004. **0411**. P. 035.

Поступила в редакцию
26.02.06