

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 621.372.413

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОБРОТНОСТИ МНОГОСЛОЙНОГО  
СФЕРИЧЕСКОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

В. П. Моденов, Р. А. Гуцин, А. И. Ерохин, Н. Е. Шапкина

(кафедра математики)

E-mail: nshapkina@phys.msu.ru

**Проведено исследование зависимости добротности экранированного слоистого сферического резонатора от его геометрических и электродинамических параметров в случае трехслойного диэлектрического заполнения на основе построенной математической модели.**

**Введение**

Важной характеристикой резонаторов, определяющей технико-экономические показатели устройств и систем, в которых они используются, является добротность. Сферический резонатор обладает более высокой добротностью по сравнению с другими аналогичными резонаторами сравнительно простых конструкций [1]. В работе [2] был предложен и реализован алгоритм вычисления комплексных резонансных волновых чисел собственных колебаний сферического резонатора с заданным поверхностным импедансом, а также получены приближенные аналитические формулы для случая малого по модулю импеданса. Возросшие потребности в увеличении чувствительности различных физических устройств стимулируют исследование все более добротных резонаторов. Этим требованиям удовлетворяют диэлектрические сферические резонаторы. Благодаря развитию современных технологий [3] стало возможно создавать практически идеальные сферические резонаторы малых размеров с любым количеством диэлектрических слоев. Такие резонаторы могут использоваться для создания узкополосных фильтров, прецизионной измерительной аппаратуры, для стабилизации СВЧ-генераторов, а также в качестве чувствительных элементов для измерения различных физических и химических свойств окружающей среды. Таким образом, возникает интерес к исследованию зависимости добротности от количества слоев, их геометрических и электродинамических параметров, от влияния экрана в случае экранированного резонатора. Последняя характеристика играет большую роль в связи с высокой нестабильностью открытых систем. Работа [4] посвящена исследованию собственных колебаний сферически-слоистого резонатора с импедансной поверхностью. Предлагается эффективный алгоритм нахождения волновых чисел собственных колебаний, и частично исследовано влияние раз-

личных параметров резонатора на его добротность. Было показано, что введением диэлектрического слоя и оптимальным выбором его геометрического расположения можно повысить добротность по отношению к полую сферическому резонатору.

Настоящая работа является развитием работы [4], в ней приведено методически более подробное описание алгоритма, детально исследована зависимость добротности от различных параметров экранированного резонатора в случае трехслойного диэлектрического заполнения. В работе рассматриваются колебания электрического типа.

**Постановка задачи**

Рассмотрим резонатор в виде части пространства, ограниченной сферической поверхностью с заданным на ней комплексным импедансом  $Z$  и представляющей собой совокупность  $m$  концентрически расположенных шаровых слоев с заданными значениями диэлектрической проницаемости  $\epsilon_i$ . Магнитную проницаемость полагаем равной единице.

Рассмотрим данную систему в сферической системе координат  $(r, \phi, \theta)$ , совместив при этом начало координат с центром сферы. Будем считать, что значения поверхностного импеданса и постоянных диэлектрических проницаемостей слоев не зависят от частоты электромагнитных колебаний.

Собственными колебаниями резонатора называют нетривиальные решения однородной краевой задачи для системы уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\epsilon(r)\mathbf{E}, \end{cases}$$

с граничными условиями Леонтовича–Щукина

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] + Z[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}]]|_{r=r_m} = 0$$

и условиями сопряжения, заключающимися в требовании непрерывности касательных составляющих

векторов напряженности электрического и магнитного полей на границах диэлектрических слоев. Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к сфере,  $k$  — волновое число.

В результате преобразований, аналогичных проведенным в [4], получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial y_m}{\partial r} - iZK_m\sqrt{\varepsilon_m}y_m|_{r=r_m} = 0, \\ \frac{\partial y_s}{\partial r} - \frac{\partial y_{s+1}}{\partial r}|_{r=r_s} = 0, \quad s = 1, \dots, m-1, \\ \varepsilon_s y_s - \varepsilon_{s+1} y_{s+1}|_{r=r_s} = 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 K_1 r J_n(K_1 r), \\ y_s &= A_s K_s r J_n(K_s r) + B_s K_s r N_n(K_s r), \quad s = 2, \dots, m, \\ K_s^2 &= k^2 \varepsilon_s. \end{aligned}$$

Рассмотрим данную систему как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_1, \dots, A_m, B_2, \dots, B_m$ . Число уравнений и переменных равно  $2m - 1$ , где  $m$  — число слоев.

Из условия существования нетривиального решения для системы линейных алгебраических уравнений получаем характеристическое уравнение для вычисления собственных значений  $k$ :

$$\Delta(k) = 0.$$

### Алгоритм решения характеристического уравнения

Данное характеристическое уравнение решим с помощью бинарного итерационного корректор-процесса [5], основанного на продолжении решения методом дифференцирования по параметру с уточнением решения методом Ньютона.

Заменим диэлектрические постоянные  $\varepsilon_i$  на величины  $1 + t\Delta\varepsilon_i$ , где  $\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i - 1$ ,  $t$  — параметр. При  $t = 0$  получаем задачу, заключающуюся в нахождении волнового числа  $k_1$  для случая полого сферического резонатора с заданным поверхностным комплексным импедансом. Назовем ее задачей I. При  $t = 1$  получаем исходную задачу. Пусть решение задачи I есть волновое число  $k_1$ . Считая простой комплексный корень  $k$  исходной задачи неявно заданной функцией параметра  $k = k(t)$ , получим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = -\frac{\Delta_t}{\Delta_k} \quad (0 < t < 1), \\ k|_{t=0} = k_1. \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом, при известном значении  $k_1$  решение исходной задачи представляет собой решение соответствующей задачи Коши, и мы приходим к более простой задаче I.

Заменим импеданс  $Z$  на величину  $uZ$ , где  $u$  — параметр. При  $u = 0$  (величина  $t$  по-прежнему равна нулю) получаем задачу II для случая полого сфе-

рического резонатора с поверхностным импедансом, равным нулю; при  $u = 1$  получаем задачу I. Пусть  $k_2$  есть решение задачи II.

Считая простой комплексный корень  $k_1$  задачи I неявно заданной функцией параметра  $k_1 = k_1(u)$ , получим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dk_1}{du} = -\frac{\Delta_u}{\Delta_{k_1}} \quad (0 < u < 1), \\ k_1|_{u=0} = k_2. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, как и в предыдущем случае, при известном значении  $k_2$  решение задачи I представляет собой решение задачи Коши. В итоге задача I свелась к еще более простой задаче II, заключающейся в нахождении волнового числа  $k_2$  для случая полого сферического резонатора с нулевым импедансом на границе.

Решим задачу II.

В этом случае решение задачи сводится к решению характеристического уравнения для определения волновых чисел колебания  $\mathbf{E}_{0np}$ :

$$\frac{J_{n+1/2}(k_2 r_m)}{J_{n-1/2}(k_2 r_m)} = \frac{k_2 r_m}{n}.$$

Введем в это уравнение параметр  $g$  и сделаем замену  $x = k_2 r_m$ :

$$\frac{J_{n+1/2}(x)}{J_{n-1/2}(x)} = \frac{x}{n}g.$$

Считая корень этого уравнения  $x$  неявно заданной функцией параметра  $x = x(g)$  и воспользовавшись дифференциально-полиномиальным свойством функции  $F(x) = \frac{J_{n+1/2}(x)}{J_{n-1/2}(x)}$ :

$$\frac{dF(x)}{dx} = 1 - 2n \frac{F(x)}{x} + F^2(x),$$

приходим к задаче Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dg} = \frac{xn}{n^2 + x^2 g^2 - n(2n+1)g} \quad (0 < g < 1), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $x_0 = x_{np}$  —  $p$ -й корень уравнения  $J_{n+1/2}(x) = 0$ .

Используя дифференциально-параметрический метод [6] и считая корни  $x_{np}^0$  уравнения  $J_{n-1/2}(x) = 0$  известными, например  $x_{np}^0 = p\pi$  ( $p = 1, 2, \dots$ ), вычислим значения  $x_{np}$ , решив задачу Коши для дифференциального уравнения с производной по параметру:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{(2n-1)x}{x^2 t^2 + (2n-1)^2 (1-t)} \quad (0 < t < 1), \\ x(0) = x_{np}^0. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, решение исходной задачи редуцировано к решению четырех вышеуказанных задач Коши (1)–(4). Они решались методом Рунге–Кутты

четвертого порядка, при этом для задач I, II уточнение корня на каждом шаге проводилось методом Ньютона по формуле

$$k_{q+1} = k_q - \frac{\Delta(k_q)}{\Delta'_k(k_q)}, \quad q = 1, 2, \dots$$

Физической интерпретацией решения является последовательное введение в идеальный полый сферический резонатор (импеданс равен нулю) потерь (когда импеданс отличен от нуля), затем постепенное заполнение диэлектрическими слоями.

Для вычисления зависимости волнового числа от каких-либо других характеристик резонатора, например от расположения экрана, к ним применяется введение параметра, аналогичное приведенному выше для задач I, II.

### Вычислительные результаты

Важнейшей характеристикой экранированного резонатора является влияние экрана на добротность. Рассмотрим сначала экран с потерями. Было обнаружено, что при определенных геометрических параметрах заполнения сферического однослойного резонатора существует оптимальное расположение экрана, при котором добротность максимальна. При дальнейшем увеличении расстояния от экрана до диэлектрика добротность понижается и впоследствии уже практически не меняется (рис. 1). Таким образом, для увеличения добротности нет необходимости сильного удаления экрана, вследствие чего значительно сокращаются размеры резонаторов, что очень важно в их современном практическом применении.

Пусть теперь размеры резонатора ограничены, т.е. положение импедансного экрана фиксировано. Введем в резонатор концентрический шаровой

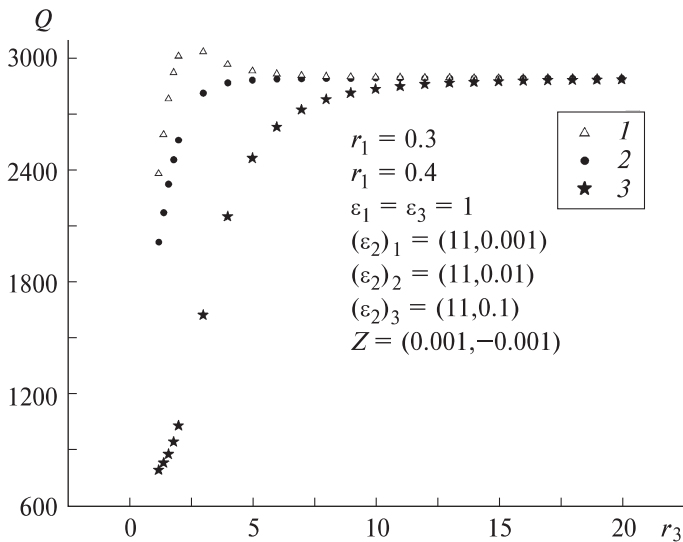


Рис. 1. Добротность резонатора в зависимости от положения экрана для колебания  $E_{011}$ . Здесь  $(\epsilon_2)_{1,2,3}$  — значения диэлектрической проницаемости второго слоя для кривых 1, 2, 3 соответственно

диэлектрик и будем постепенно увеличивать его размеры, пока радиус последнего не приблизится к радиусу экрана. Показано, что в этом случае также существует оптимальное заполнение экрана, при котором добротность максимальна.

Добротность также может быть повышена благодаря использованию колебаний типа шепчущей галереи, так как вычисления показали, что с ростом полярного индекса  $n$  добротность значительно возрастает (рис. 2).

При увеличении радиального индекса  $p$  увеличивается число резонансных положений экрана, причем их число совпадает с номером этого индекса (рис. 3). Добротность также увеличивается. Таким образом, при фиксированных параметрах резонатора с помощью выбора мод с высокими радиальным

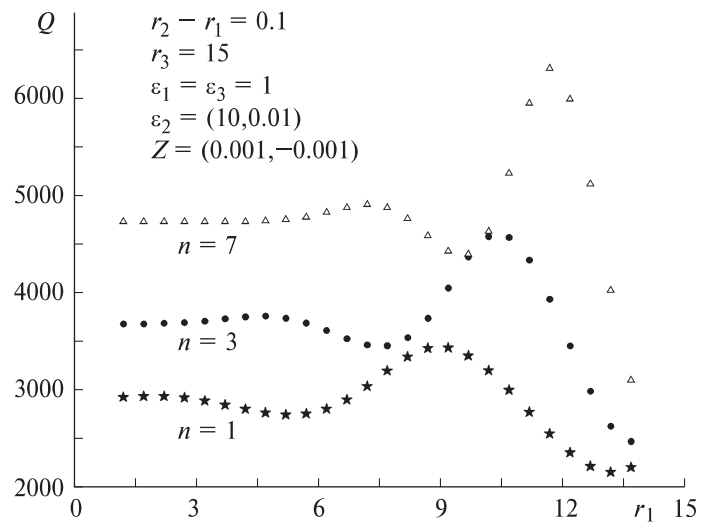


Рис. 2. Добротность резонатора в зависимости от положения второго диэлектрического слоя для колебаний  $E_{0n1}$ ,  $n = 1, 2, 3$

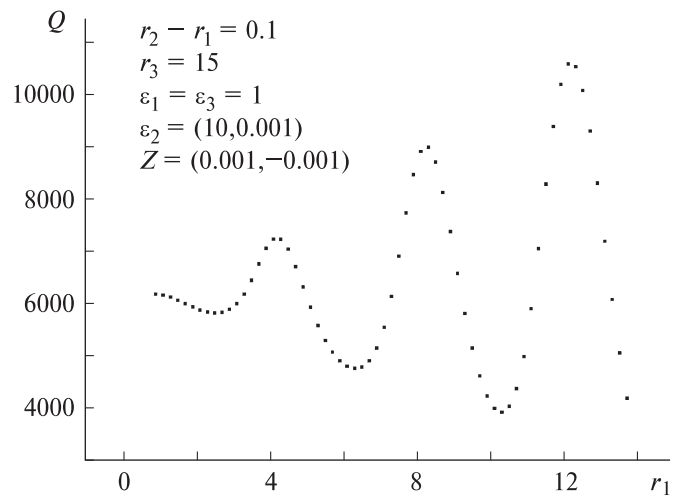


Рис. 3. Добротность резонатора в зависимости от положения второго диэлектрического слоя для колебания  $E_{013}$

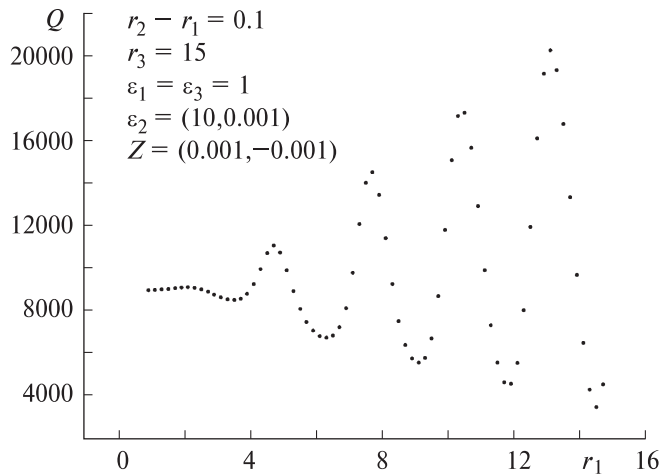


Рис. 4. Добротность резонатора в зависимости от положения второго диэлектрического слоя для колебания  $E_{033}$

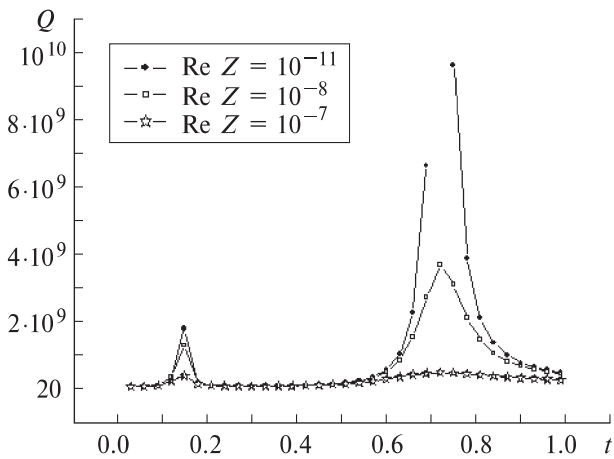


Рис. 5. Добротность резонатора в зависимости от радиуса сферического экрана  $r_3 = 1 + 3t$  для колебания  $E_{011}$

и полярными индексами возможно значительно улучшить добротность резонатора (рис. 4 в сравнении с рис. 3).

В случае резонатора с параметрами  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 > 1$ ,  $\epsilon_3 = 1$  при фиксированном положении экрана существует оптимальное положение диэлектрика (рис. 2). Показано, что использование диэлектриков с малыми потерями приводит к большей добротности.

Уменьшая потери в экране можно добиться добротности, обусловленной в основном фундаментальными потерями в диэлектрике. Так, в случае идеального экрана при  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 10.6$  (YAG),  $\epsilon_3 = 1$  при определенных параметрах резонатора для колебания  $E_{102}$  была получена добротность  $10^{10}$  (рис. 5). Это было достигнуто уменьшением толщины слоя и потерь в нем, что повышает добротность, а также выбором оптимального положения экрана. При удалении экрана было обнаружено два максимума, причем дальний из них по отношению к диэлектрику значительно превосходит ближний по добротности. При введении небольших потерь в экран картина качественно сохраняется.

Были получены результаты, согласующиеся с общими физическими соображениями. К примеру, рассмотрим резонатор с двухслойным сферическим заполнением. Экран и размеры внутреннего диэлектрика фиксированы. Будем увеличивать размеры внешнего диэлектрика. При этом наблюдается уменьшение добротности. Действительно, если рассматривать внешний диэлектрик как некоторый слой, загрязняющий резонатор, то увеличение его размеров будет соответствовать увеличению потерь резонатора.

Результаты расчетов согласуются с данными, полученными другими методами [7].

#### Литература

1. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М., 1983.
2. Моденов В.П. // Радиотехника и электроника. 2000. **45**, № 10. С. 1198.
3. Sadauyuki Ueha. // IEEE Int. Ultrasonics Symposium, Sendai, Miyagi, Japan. October 5–8, 1998. P. 73.
4. Моденов В.П., Чулков Ф.М. // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. 2000. **8**, № 3–4. С. 89.
5. Моденов В.П. // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и киберн. 1985. № 2. С. 63.
6. Моденов В.П. // Докл. АН СССР. 1987. **296**, № 3. С. 536.
7. Krupka J., Tobar M.E., Hartnett J.G. et al. // IEEE Transactions. 2005. **53**, N 2. P. 702.

Поступила в редакцию  
24.03.06