УДК 514.74

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА СРЕДНЕГО РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СОПРЯЖЕННЫМИ ТОЧКАМИ НА ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СО СЛУЧАЙНОЙ КРИВИЗНОЙ

В. Г. Ламбурт, В. Н. Тутубалин

(*кафедра теории вероятностей* *))

Рассматриваются нижние оценки для расстояния между сопряженными точками на геодезической, кривизна вдоль которой предполагается случайным процессом с обновлением. В асимптотике стремящейся к нулю кривизны задача сводится к изучению пересечения уровня некоторым диффузионным процессом с отражением.

Введение

Еще в 1960-е гг. Я. Б. Зельдович обратил внимание на то, что концентрация вещества во Вселенной в отдельные небесные тела и связанные с этим флуктуации кривизны не только вносят небольшой шум в космологические тесты, но и приводят к некоторому систематическому эффекту. В недавней работе [1] показано, что эффект Зельдовича можно описать как возникновение эффективной кривизны, входящей в описание распространения света во Вселенной. Отличие эффективной кривизны от усредненного значения кривизны космологической модели связано с наличием флуктуаций кривизны. Грубо говоря, оказывается, что Вселенная, плотность которой в среднем равна критической, кажется наблюдателю имеющей слегка отрицательную кривизну пространственного сечения.

Задача об учете влияния неоднородностей кривизны на распространение света во Вселенной исходно является задачей о поведении геодезических в четырехмерном псевдоримановом пространстве. Однако Зельдович показал, что в силу высокой степени однородности и изотропии Вселенной эта задача сводится к изучению сети геодезических на двумерной пленке в пространственном сечении, натянутой на проекции двух близких изотропных геодезических.

Существует еще один эффект, возникающий при распространении света во Вселенной с неоднородностями. Он состоит в том, что на геодезической, вдоль которой кривизна флуктуирует, рано или поздно возникают сопряженные точки, или, говоря физическим языком, гравитационные линзы, связанные с кумулятивным действием небольших неоднородностей кривизны. В настоящей работе мы производим некоторые оценки снизу для среднего расстояния между такими сопряженными точками.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерное риманово многообразие, на котором выделена некоторая геодезическая с фиксированной точкой O. Пусть x — расстояние вдоль этой геодезической, отсчитываемое от точки O. Как известно, разбегание геодезических, близких к данной и проведенных через ту же точку O, описывается уравнением Якоби

$$y'' + k(x)y = 0, \qquad (1)$$

где $k(x)$ — (переменная) кривизна, а начальные условия имеют вид $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Недавно была предложена модель, в которой кривизна $k(x)$ считается случайным процессом [1]. Интуитивно в это понятие вкладывается тот смысл, что значения кривизны в далеко отстоящих друг от друга точках являются статистически независимыми. Именно считается, что существует длина δ, такая, что значения случайного процесса $k(x)$ на интервалах вида $[x_n, x_{n+1}]$, где $x_n = n\delta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, статистически независимы.

Такая форма гипотезы помещает вопрос об асимптотическом исследовании решения уравнения (1) при $x \to \infty$ в рамки известной теории Ферстенберга, относящейся к произведениям независимых случайных матриц [2–4]. Одним из глубоких результатов этой теории (который обычно и называется «теоремой Ферстенберга») является вывод об экспоненциально быстром росте длины вектора $(y(x), y'(x))$ при $x \to \infty$.

Поскольку при $k(x) = \omega^2(x) > 0$ уравнение (1) совпадает с уравнением гармонического осциллятора с переменной случайной упругой силой, то ранее этот вывод интерпретировался как экспоненциально быстрый рост энергии такого осциллятора. Для осциллятора не представляют особого интереса точки $\tilde{x}$, для которых $y(\tilde{x}) = 0$, т. е. осциллятор проходит через положение равновесия. Но для геометрии такие точки интересны: это точки, сопряженные с начальной точкой O; сопряженные точки сопоставляются с гравитационными линзами.

Как это принято в теории Ферстенберга, исследуемый вектор (y, y') сначала переписывается в полярных координатах $y = r\cos\psi$, $y' = r\sin\psi$, так что

---

*) Механико-математический факультет МГУ.

значения полярного угла $\psi(x_n)$ в точках обновления образуют эргодическую марковскую цепь на окружности. Что же касается полярного радиуса $r(x)$, то простое вычисление показывает, что приращение логарифма

$$\Delta \ln r(x_n) = \ln r(x_{n+1}) - \ln r(x_n) \tag{2}$$

является функцией от пары $[\psi(x_n), B(x_n, x_{n+1})]$, где $B(x_n, x_{n+1})$— фундаментальная матрица на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$, статистически не зависящая от $\psi(x_n)$. Предполагая стационарность процесса $k(x)$, т. е. одинаковое распределение всех матриц $B(x_n, x_{n+1})$, получаем, что такие пары тоже образуют эргодическую марковскую цепь. Таким образом, значение $\ln r(x_n)$ является суммой случайных величин (2), функционально зависящих от состояния эргодической цепи Маркова. Известно, что (при широких и естественных условиях) это приводит к асимптотической нормальности $\ln r(x_n)$ при $n \to \infty$ с параметрами вида $(na, \sigma\sqrt{n})$. Теорема Ферстенберга утверждает, что $a > 0$. Таким образом, $r(x_n)$ растет экспоненциально быстро, причем можно доказать, что при $n \to \infty$ величины $r(x_n)$ и $\psi(x_n)$ делаются статистически независимыми.

Сопряженная точка $\tilde{x}$ образуется, если $\psi(\tilde{x}) = \pm\pi/2$. Лишь с вероятностью, равной нулю, такая точка $\tilde{x}$ может совпасть с одной из точек обновления x_n. Но если значения $\psi(x_n)$ и $\psi(x_{n+1})$ марковской цепи устроены так, что $\psi(x_n)$ лежит по одну сторону диаметра, соединяющего точки окружности $\pm\pi/2$, а $\psi(x_{n+1})$ — по другую сторону этого диаметра, то в силу непрерывности решения уравнения (1) на интервале между точками x_n и x_{n+1} обязательно имеется хотя бы одна сопряженная точка.

В настоящей работе мы занимаемся задачей о малых возмущениях изначально нулевой кривизны (т. е. такой асимптотической постановкой, когда $\sup|k(x)| \to 0$).

2. Основные уравнения модели

Уравнение (1) перепишем в виде системы двух уравнений первого порядка относительно вектора-строчки $z = (z_1, z_2)$ и введем безразмерные переменные $z_1 = y$, $z_2 = y'\delta$, $t = x/\delta$, $\nu = k\delta^2$, так что

$$\frac{d}{dt} z(t) = z(t) \begin{pmatrix} 0 & -\nu(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Начальные условия теперь имеют вид $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = \delta$.

Эту систему будем изучать с помощью перехода к полярным координатам $z_1 = \rho\cos\phi$, $z_2 = \rho\sin\phi$. Значения случайного процесса $\nu(t)$ теперь обновляются в целочисленных точках $t = 0, 1, 2, \ldots$; значения $\phi(0), \phi(1), \ldots$ образуют марковскую цепь на окружности. Легко видеть, что если отождествить противоположные точки окружности ϕ и $\phi + \pi$, то марковский характер блуждания сохраняется. Иными словами, можно считать, что $\phi(t)$ блуждает по отрезку $[-\pi/2, \pi/2]$, причем концы этого отрезка отождествлены. В момент $t = 0$ блуждание начинается из точки $\pi/2$ (в силу начальных условий).

Внутри интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ сделаем замену координаты $u = \operatorname{tg}\phi$. В силу (3) $u = z_2(t)/z_1(t)$, и используя это соотношение, нетрудно вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $u(t)$ на прямой $-\infty < u(t) < \infty$ (т. е. при условии $-\pi/2 < \phi(t) < \pi/2$). Для этого нужно заметить, что при малом Δt справедливо соотношение

$$z(t + \Delta t) = z(t)[E + \begin{pmatrix} 0 & -\nu(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta t + o(\Delta t)]. \tag{4}$$

Из уравнения (4) нужно выразить разность

$$z_2(t + \Delta t)/z_1(t + \Delta t) - z_2(t)/z_1(t) = u(t + \Delta t) - u(t),$$

разделить ее на Δt и перейти к пределу при $\Delta t \to 0$. В результате получается уравнение следующего вида:

$$du/dt = -\left(\nu(t) + u^2\right). \tag{5}$$

Будем условно называть безразмерную переменную t «временем», тогда (5) естественно называть «динамической системой».

Мы предлагаем следующую асимптотическую постановку задачи исследования этой системы. Пусть дано, что безразмерная кривизна $\nu(t)$ ограничена, $|\nu(t)| \leqslant \epsilon$, где в дальнейшем будет $\epsilon \to 0$. Пусть $\nu(t)$ является стационарным случайным процессом с обновлением в точках $t = 0, 1, \ldots$, причем среднее $\boldsymbol{E}\nu(t) = 0$, а дисперсия интеграла $\int_0^1 \nu(t)\,dt$ имеет вид $b\epsilon^2$, где $b > 0$ и не меняется при $\epsilon \to 0$. Пусть также длина δ промежутка между точками обновления не меняется при $\epsilon \to 0$. В начальный момент $\phi(0) = \pi/2$. В этой точке координата $u = \operatorname{tg}\phi$ не существует, но через сколь угодно малое время Δt оказывается, что $\phi(\Delta t) < \pi/2$, и из уравнения (5) видно, что при $u > \sqrt{\epsilon}$ скорость du/dt отрицательна. Если бы нулевая кривизна не возмущалась случайной кривизной $\nu(t)$ (т. е. кривизна равнялась бы нулю тождественно), то $u(t)$ приближалось бы к нулю сверху, никогда его не достигая. Однако случайные неоднородности $\nu(t)$, которые в силу условий $\boldsymbol{E}\nu(t) = 0$, $b > 0$, бывают как положительными, так и отрицательными, как оказывается, неизбежно перебрасывают $u(t)$ через нулевой уровень, причем достигается и уровень $u(t) = -\sqrt{\epsilon}$. После этого начинается монотонное движение $u(t)$ к $-\infty$, и за конечное время соответствующая точка $\phi(t)$ достигает точки $-\pi/2$ (которая отождествлена с $\pi/2$). В этот момент и появляется сопряженная точка.

Мы занимаемся оценкой среднего времени перехода полярного угла $\phi(t)$ от точки $\pi/2$ до точки $-\pi/2$ (что после умножения на расстояние между точками обновления δ дает среднее расстояние между сопряженными точками). Несмотря на простоту уравнения (5), задающего динамическую систему, исследование этой системы затруднительно потому, что система является цепью Маркова лишь в моменты обновления $t = 0, 1, \ldots$. Хотелось бы свести задачу в асимптотической постановке (т. е. при $\epsilon \to 0$) к диффузионному процессу, как это обычно делается в математической физике. Такое сведение наталкивается на некоторые трудности, и в результате мы получаем не точное (в диффузионном приближении) выражение для среднего времени перехода, а лишь его оценку снизу. Нетрудно показать, что среднее время перехода от значения $\phi(0) = \pi/2$ к такому значению ϕ', что $u' = \operatorname{tg}\phi' = \sqrt{\epsilon}$, имеет порядок величины $C_1/\sqrt{\epsilon}$, где C_1 — некоторая константа. Аналогично после достижения системой (5) состояния $u = u'' = -\sqrt{\epsilon}$ сопряженная точка появляется через среднее время порядка $C_2/\sqrt{\epsilon}$. В настоящей работе мы выводим нижнюю оценку среднего времени перехода системой (5) от точки $\sqrt{\epsilon}$ до точки $-\sqrt{\epsilon}$, и эта оценка оказывается величиной порядка $\epsilon^{-2/3} \gg C/\sqrt{\epsilon}$. Следовательно, основная часть времени перехода от одной сопряженной точки до другой определяется временем пересечения системой (5) интервала $[-\sqrt{\epsilon}, \sqrt{\epsilon}]$. Далее мы будем рассматривать движение системы (5) лишь на этом интервале (и только внутри этого интервала строить различные диффузионные приближения).

3. Нижняя оценка

Проведем доказательство высказанного выше утверждения о нижней оценке. Рассмотрим некоторое число α, удовлетворяющее неравенствам $1/2 < \alpha < 1$, и среднее время перехода от уровня ϵ^α до уровня $-\epsilon^\alpha$ для несколько измененной в сравнении с (5) динамической системы $u_1(t)$. А именно положим

$$du_1/dt = -(\nu(t) + \epsilon^{2\alpha}), \tag{6}$$

причем наложим дополнительное условие, что система $u_1(t)$ при пересечении снизу уровня ϵ^α испытывает отражение траектории от этого уровня. Поскольку скорость системы (6) в любой точке интервала $[-\epsilon^\alpha, \epsilon^\alpha]$ ограничена сверху скоростью системы (5), да еще и добавлено условие отражения, которого нет для системы (5), то ясно, что траектория системы (6), исходящая из точки ϵ^α, достигает уровня $-\epsilon^\alpha$ быстрее, чем траектория системы (5). Оценим это среднее время для системы (6) с помощью аппроксимации диффузионным процессом.

Поскольку в силу условий $|\nu(t)| \leqslant \epsilon, 2\alpha > 1$ система (6) за единицу времени сдвигается на величину порядка ϵ, а нужно пройти путь $2\epsilon^\alpha$, речь идет о числе шагов не менее $2\epsilon^{\alpha-1} \to \infty$ при $\epsilon \to 0$. В целочисленные моменты времени t положение системы $u_1(t)$ отличается от ее начального положения на сумму случайных величин $\xi_k = \int_k^{k+1} \nu(t)\, dt$ плюс сумма такого же числа постоянных слагаемых, равных $\epsilon^{2\alpha}$. Поскольку число временных шагов стремится к бесконечности, применима центральная предельная теорема, которую мы сформулируем как возможность приближенной замены уравнения (6) следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$du_2 = \sqrt{\boldsymbol{D}\xi_k}\, dw_t - \epsilon^{2\alpha} dt, \tag{7}$$

где w_t — стандартный винеровский процесс.

Мы приняли, что $\boldsymbol{D}\xi_k = b\epsilon^2$, а следовательно, система (7), аппроксимирующая систему (6), является диффузионным процессом с коэффициентом диффузии $\sigma^2 = b\epsilon^2$ и коэффициентом сноса $a = -\epsilon^{2\alpha}$. Обозначим через $g(x)$ среднее время достижения границы $-\epsilon^\alpha$ таким процессом, начинающимся в точке $x \in [-\epsilon^\alpha, \epsilon^\alpha]$. Хорошо известно, что функция $g(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Ag = -1, \tag{8}$$

где оператор $A = (\sigma^2/2)(d^2/dx^2) + a(d/dx)$ является инфинитезимальным оператором диффузионного процесса, причем условие отражения от правой границы ϵ^α состоит в том, что $g'(x) = 0$ при $x = \epsilon^\alpha$, а на левой границе, очевидно, $g(-\epsilon^\alpha) = 0$. Решая уравнение (8), получаем

$$g(x) = C_1 + C_2 \exp[(-2a/\sigma^2)x] - x/a.$$

После подстановки указанных значений сноса a и диффузии σ^2 и определения констант из граничных условий получаем формулу

$$g(\epsilon^\alpha) = 2\epsilon^{-\alpha} - (b/2)\epsilon^{2-4\alpha}\left[1 - \exp\left(-(4/b)\epsilon^{-2+3\alpha}\right)\right]. \tag{9}$$

Для любого α из интервала $(1/2, 1)$ выражение (9) представляет собой нижнюю оценку. Выберем теперь α так, чтобы выражение (9) имело (как функция ϵ) наибольший возможный порядок величины. Нетрудно видеть, что это достигается при $\alpha = 2/3$, причем получается, что

$$\begin{aligned} g(\epsilon^{2/3}) = [2 - (b/2)(1 - \exp(-4/b))]\epsilon^{-2/3} \approx \\ \approx (2 - b/2)\epsilon^{-2/3}. \end{aligned} \tag{10}$$

(Напомним, что $b \leqslant 1$ в силу условия $\nu(t) \leqslant \epsilon$.) Таким образом, среднее время перехода системы (5) от уровня $\sqrt{\epsilon} > \epsilon^{2/3}$ до уровня $-\sqrt{\epsilon} < -\epsilon^{2/3}$ во всяком случае не менее $C\epsilon^{-2/3}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00297).

Литература

1. *Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* // Матем. заметки. 2003. **74**. С. 416.
2. *Furstenberg H.* // Ann. Math. 1963. **77**. P. 335.
3. *Furstenberg H.* // Trans. Am. Math. Soc. 1963. **108**. P. 377.
4. *Сазонов В.В., Тутубалин В.Н.* // Теория вероятн. и ее примен. 1966. **11**. С. 3.

Поступила в редакцию
15.03.06