УДК 524.77, 520.80

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕКОНСТРУКЦИИ ПЕКУЛЯРНЫХ СКОРОСТЕЙ ГАЛАКТИК

А. А. Курносов, А. Н. Соболевский

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

E-mail: sobolevski@phys.msu.ru

Предложен вариационный метод массового определения пекулярных скоростей галактик по каталогу их положений и масс. Метод основан на построении приближенной реконструкции динамической истории участка Вселенной, покрываемого каталогом, при помощи оптимизации подходящего интегрального функционала действия и является усовершенствованием метода транспортной задачи Монжа–Канторовича, развитого в [1].

Введение

Крупномасштабная структура Вселенной определяется тремя факторами: барионным и скрытым веществом, а также «темной энергией». На масштабах от единиц до десятков мегапарсек наиболее существенна неоднородность распределения скрытого вещества, которую можно охарактеризовать полем плотности его массы и определяемой им через гравитационное взаимодействие крупномасштабной компонентой поля его пекулярных скоростей. Ни то ни другое поле непосредственно не наблюдается, поэтому актуальны методы их косвенной реконструкции по данным наблюдений.

«Маркерами» распределения скрытого вещества являются галактики, положения и светимости которых в настоящее время сведены в обширные каталоги (NBG, SDSS, 2DF и др.). Для реконструкции по этим данным поля пекулярных скоростей скрытого вещества предлагаются различные подходы, которые можно отнести к одному из трех крупных направлений: а) прямое численное моделирование космологической эволюции с подбором начальных условий; б) поиск минимальных или седловых решений для вариационного принципа (Numerical action method [2], первоначально предложенный Дж. Пиблзом [3]); в) использование потенциального характера крупномасштабной компоненты поля, предложенное У. Фришем, С. Матаррезе, Р. Мохайяи и А. Соболевским в [1] (см. также [4]). В настоящей работе мы предлагаем усовершенствование метода, предложенного в [1, 4].

Реконструкцию пекулярных скоростей полезно рассматривать как часть более сложной задачи реконструкции полной динамической истории того или иного участка Вселенной. В частности, для приближенной реконструкции пекулярных скоростей можно определять их из восстановленной «полной истории» в некоторой подходящей динамической модели. Именно этот подход применяется в [1, 4] и настоящей работе.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель плоской пылевидной Вселенной с преобладанием вещества. Такая модель допускает ньютоновское приближение (см., напр., [5]). Будем считать, что имеем дело с идеальной жидкостью без давления и вязкости.

Пусть $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r},t)$, $\varrho(\boldsymbol{r},t)$ — положение, скорость и плотность бесконечно малой частицы, а $\Phi(\boldsymbol{r},t)$ — объемный потенциал самосогласованного гравитационного поля. Можно записать следующую систему гидродинамических уравнений:

$$\partial_t \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{w}\cdot\nabla)\boldsymbol{w} = -\nabla\Phi, \qquad (1)$$

$$\partial_t \varrho + \nabla\cdot(\varrho\boldsymbol{w}) = 0, \qquad (2)$$

$$\triangle\Phi = 4\pi G\varrho. \qquad (3)$$

Здесь (1) — уравнение Эйлера, (2) — уравнение непрерывности, (3) — уравнение Пуассона. В работе [5] показано, что в случае изотропной однородной Вселенной система сводится к уравнению Фридмана. Кратко изложим основные рассуждения. Подставим

$$\varrho = \overline{\varrho}(t), \quad \Phi = \overline{\Phi}(\boldsymbol{r},t), \quad \boldsymbol{w} = H(t)\boldsymbol{r} \qquad (4)$$

в систему (1)–(3). Выразив множитель Хаббла $H(t)$ через масштабный фактор по формуле $H(t) = \dot a/a$, получим уравнение Фридмана для пылевидной Вселенной:

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi}{3}G\overline{\varrho}_0\frac{1}{a^3}, \qquad (5)$$

где $\overline{\varrho}_0 = \overline{\varrho}(t_0)$, а t_0 — настоящее время. Решением будет

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha}, \quad \overline{\varrho}(t) = \frac{1}{a^3}\overline{\varrho}_0, \quad \overline{\varrho}_0 = \frac{1}{6\pi G t_0^2},$$

где $\alpha = 2/3$.

Очевидно, что в изотропной однородной Вселенной никаких пекулярных скоростей не может быть по определению, так как любая частица покоится в сопутствующей системе координат. Введем более удобный для дальнейшего рассмотрения новый радиус-вектор $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{x}, \quad \nabla = \frac{1}{a}\nabla_x,$$

а также новые функции $\rho, \boldsymbol{u}, \phi$:

$$\varrho(\boldsymbol{r}, t) = \overline{\varrho}(t)\rho(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}, t) = \dot{a}\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t),$$
$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) = \overline{\Phi}(\boldsymbol{r}, t) + a\phi(\boldsymbol{x}, t),$$

описывающие «возмущения» над фоном (4). Уравнение движения будет иметь вид

$$\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\nabla_x)\boldsymbol{u} = -2\frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{u} - \frac{1}{a}\nabla_x\phi. \tag{6}$$

Для того чтобы исключить $a(t)$, перемасштабируем время и введем новые функции $\boldsymbol{v}, \varphi$:

$$\tau(t) \sim t^\alpha, \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \dot{\tau}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau),$$
$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = 4\pi G\overline{\varrho}a\tau\varphi(\boldsymbol{x}, \tau),$$

где $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau)$ — поле пекулярных скоростей. Окончательно получим систему уравнений

$$\partial_\tau \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla_x)\boldsymbol{v} = -\frac{3}{2\tau}(\boldsymbol{v} + \nabla_x\phi), \tag{7}$$

$$\partial_\tau\rho + \nabla_x\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0, \tag{8}$$

$$\nabla_x^2\varphi = \frac{\rho - 1}{\tau}. \tag{9}$$

Эту систему уравнений необходимо дополнить граничными условиями по времени:

$$\rho(\boldsymbol{x}, 0) = 1, \tag{10}$$

$$\rho(\boldsymbol{x}, \tau_0) = \rho_0(\boldsymbol{x}), \tag{11}$$

Условие (11) можно считать известным из экспериментальных данных, так как оно соответствует распределению материи в настоящий момент. Условие (10) означает равномерное распределение материи в начале эволюции и обеспечивает отсутствие особенности в уравнении (9) при $\tau = 0$. Об истинном распределении вещества «в начале» можно было бы судить по анизотропии реликтового излучения, но поскольку она имеет порядок 10^{-4} по отношению к фоновому излучению, то и условие (10) можно считать вполне разумным.

Таким образом, для реконструкции динамической истории в данной модели необходимо найти решение системы (7)–(9) при условиях (10), (11), второе из которых определяется наблюдательными данными.

2. Вариационная формулировка и приближение Зельдовича

Уравнение (7) можно рассматривать как уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала [4, 6]

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_0} d\tau \int d\boldsymbol{x}\,\tau^{3/2}\left(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{3}{2}|\nabla_x\varphi|^2\right), \tag{12}$$

минимизируемого при связях, выраженных равенствами (8)–(11). Таким образом, задача реконструкции может быть сведена к поиску минимума данного функционала.

Функционал J обладает благоприятными свойствами выпуклости и положительной определенности [4, 7]. Тем не менее задача его численной минимизации в полном объеме остается весьма сложной, и в работах [1, 4] был предложен следующий приближенный подход.

Наряду с эйлеровыми координатами, в которых плотность, скорость и потенциал являются функциями пространственных координат и времени, будем пользоваться лагранжевыми координатами, рассматривая радиус-вектор частицы как функцию времени и начального положения:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau), \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{x}|_{\tau=0}.$$

Обозначим полную производную по времени в лагранжевых координатах через $\mathrm{D}_\tau = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)_{\boldsymbol{q}}$. Можно показать, что в лагранжевых координатах уравнение непрерывности обращается в тождество, а плотность в любой момент времени выражается через якобиан перехода:

$$\rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau), \tau) = \rho_{\mathrm{in}}(\det\nabla_q\boldsymbol{x})^{-1}, \quad \rho_{\mathrm{in}} = \rho|_{\tau=0} = 1. \tag{13}$$

Таким образом система (7)–(9) принимает вид

$$\mathrm{D}_\tau^2\boldsymbol{x} = -\frac{3}{2\tau}(\mathrm{D}_\tau\boldsymbol{x} + \nabla_x\varphi), \tag{14}$$

$$\nabla_x^2\varphi = \frac{1}{\tau}((\det\nabla_q\boldsymbol{x})^{-1} - 1). \tag{15}$$

Эта система существенно упрощается в так называемом приближении Зельдовича [8]. Суть его в следующем. Можно показать, что в одномерном случае уравнения (14), (15) совместно с условием конечности ускорения при $\tau \to 0$ обеспечивают равенство $\mathrm{D}_\tau x + \nabla_x\varphi = 0$ тождественно при всех q, τ. В трехмерном случае это равенство уже не выполняется точно, и приближение Зельдовича как раз состоит в том, чтобы приравнять $\mathrm{D}_\tau\boldsymbol{x} + \nabla_x\varphi$ нулю. Тогда уравнение (14) обращается в уравнение свободного движения

$$\mathrm{D}_\tau^2\boldsymbol{x} = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) может быть получено как уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_0} d\tau \int d\boldsymbol{x}\,\rho|\boldsymbol{v}|^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_0} d\tau \int d\boldsymbol{q}\,|\mathrm{D}_\tau\boldsymbol{x}|^2. \tag{17}$$

Интеграл (17) достигает минимума при

$$\mathrm{D}_\tau\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_0) - \boldsymbol{q}}{\tau_0},$$

следовательно,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\tau_0} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, |\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_0) - \boldsymbol{q}|^2. \tag{18}$$

Метод реконструкции, предложенный в [1, 4], основан на минимизации функционала (18) при условии $(\det \nabla_q \boldsymbol{x})^{-1} = \rho_0(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_0))$ (ср. (13)), сформулированной как задача линейного программирования (транспортная задача Монжа–Канторовича).

Насколько обоснованным можно считать метод реконструкции, основанный на такой грубой модели? Проверка метода по прямому численному моделированию эволюции Вселенной [1] показала, что поле смещений $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_0) - \boldsymbol{q}$ восстанавливается достаточно качественно, но естественная оценка пекулярных скоростей на его основе $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_0)) \sim \boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}))$ существенно менее точна.

3. «Импульсное приближение»

Функционал (17) получается из (12), если формально вместо 3/2 поставить 0, что приводит к исключению гравитационного слагаемого и искажает пекулярные скорости. Покажем, как описанный в предыдущем пункте метод может быть модифицирован для более точного восстановления пекулярных скоростей.

Будем считать, что материя движется свободно, но в некоторый момент времени τ_1 $(0 < \tau_1 < \tau_0)$ «на миг» включается гравитационное поле, т. е. $\varphi(\boldsymbol{x}, \tau) = \varphi(\boldsymbol{x})\delta(\tau - \tau_1)$. Тогда функционал (12) распадется на три части:

$$\begin{aligned}\mathrm{J} = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_1} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \tau^{3/2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{3}{4}\tau_1^{3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, |\nabla_x \varphi|^2 +\\ + \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_0} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \tau^{3/2}\rho|\boldsymbol{v}|^2.\end{aligned} \tag{19}$$

Обозначим три интеграла в (19) через $\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, \mathrm{J}_3$. Аналогично переходу от (17) к (18) можно выразить функционалы J_1 и J_3 через $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_1)$ и $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_0)$; значение функционала J_2 также определяется через $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_1)$ при посредстве уравнения Пуассона (15).

Покажем, что $\inf \mathrm{J}_1 = 0$ независимо от вида $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_1)$. Возьмем некоторое ε $(0 < \varepsilon < \tau_1)$ и вычислим J_1 при

$$\boldsymbol{x}^{\varepsilon}(\boldsymbol{q}, \tau) = \begin{cases} \boldsymbol{q} + \dfrac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_1) - \boldsymbol{q}}{\varepsilon}\tau, & \tau \leqslant \varepsilon, \\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_1), & \tau > \varepsilon. \end{cases}$$

Такая зависимость координат от времени означает, что частицы быстро перемещаются в положение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_1)$, а потом до самого включения гравитационного поля стоят на месте. Легко видеть, что

$$\mathrm{J}_1[\boldsymbol{x}^{\varepsilon}] \sim \varepsilon^{1/2} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Заметим, что функционал J_1 (как и другие слагаемые в J) положительно определен. Таким образом, можно положить J_1 в (19) равным нулю и решать задачу минимизации функционала

$$\frac{3}{4}\tau_1^{3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, |\nabla_x \varphi|^2 + \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_0} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \tau^{3/2}\rho|\boldsymbol{v}|^2$$

с фиксированной границей $\rho(\boldsymbol{x}, \tau_0) = \rho_0(\boldsymbol{x})$ и подвижной границей $\rho(\boldsymbol{x}, \tau_1) = \rho_1(\boldsymbol{x})$.

В отличие от минимизации функционала (18) в данном случае формулировка Монжа–Канторовича приводит к задаче не линейного, а квадратичного программирования. Дискретизация поля плотности $\rho_0(\boldsymbol{x})$ сводит ее к задаче комбинаторной оптимизации, для которой удается построить достаточно эффективный алгоритм решения. Детали данного алгоритма и результаты его численного тестирования будут изложены в другой публикации.

В изложенном подходе к реконструкции пекулярных скоростей подразумевалась модель Вселенной со степенной зависимостью масштабного фактора от времени. Как в приближении Зельдовича, так и в предлагаемом импульсном приближении детали этой зависимости несущественны, но тем не менее важно выяснить, к каким изменениям может привести использование другой космологической модели, например экспоненциального расширения (модель де Ситтера).

В этом случае ньютоновский подход неприменим, но в уравнение (6) можно формально подставить $a(t) = e^{\beta(t-t_0)}$. Осуществив замену $\tau(t) = e^{-3\beta(t-t_0)}$, получим уравнение движения

$$\partial_\tau \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla_x)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{3\tau}(\boldsymbol{v} + \nabla_x \varphi).$$

Данному уравнению соответствует функционал

$$\begin{aligned}\mathrm{J}^* = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_1} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \tau^{1/3}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{1}{6}\tau_1^{1/3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, |\nabla_x \varphi|^2 +\\ + \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_0} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \tau^{1/3}\rho|\boldsymbol{v}|^2.\end{aligned}$$

В отличие от (19) при минимизации первый интеграл здесь не исчезает, и соответствующая вариационная задача формулируется как задача с фиксированными границами (10), (11) и неизвестными $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_1)$, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \tau_0)$. Эта задача также может быть сведена к задаче квадратичного программирования.

Авторы благодарны профессору К. А. Постнову за полезные замечания, учтенные при подготовке статьи. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-01-00824 и 05-01-02807-НЦНИЛ_а).

Литература

1. *Frisch U., Matarrese S., Mohayaee R.* et al. // Nature. 2002. **417**. P. 260.
2. *Peebles P.J.E., Phelps S.D., Shaya E.J.* et al. // Astrophys. J. 2001. **554**. P. 104.
3. *Peebles P.J.E.* // Astrophys. J. 1989. **344**. P. L53.
4. *Brenier Y., Frisch U., Hénon M.* et al. // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2003. **346**. P. 501.
5. *Coles P., Lucchin F.* Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure. Chichester, 2002.
6. *Giavalisco M., Mancinelli B., Mancinelli P.J.* et al. // Astrophys. J. 1993. **411**. P. 9.
7. *Loeper G.* // Arch. Ration. Mech. Anal. 2006. **179**. P. 153.
8. *Zel'dovich Ya.B.*. // Astron. Astrophys. 1970. **5**. P. 84.

Поступила в редакцию
31.05.06