

УДК 519.95

ОЦЕНКИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ СИГНАЛОВ, ОСНОВАННЫЕ НА АНАЛИЗЕ ИХ ФОРМЫ

А. И. Чуличков, С. Н. Куличков^{*)}, Д. С. Демин

(кафедра компьютерных методов физики)

E-mail: ach@cmp.phys.msu.ru

На основе сравнения по форме [1] фрагментов сигналов неизвестного источника, регистрируемых пространственно разнесенными датчиками в неизвестных и различных для разных датчиков условиях, получены оценки их относительной временной задержки. Оценки минимизируют максимальную погрешность определения временной задержки сигналов датчиков при гарантированной надежности оценивания [2, 3]. Форма сигнала определена как инвариант класса его преобразований, моделирующих возможные изменения условий его регистрации.

Введение

В настоящей работе решена задача оценивания относительного времени задержки сигналов, распространяющихся от некоторого неизвестного источника до пространственно разнесенных датчиков. Условия регистрации сигнала в разных точках пространства неодинаковы, в результате измеряемые сигналы различаются не только временным сдвигом, но и нелинейными искажениями, сохраняющими лишь общую форму сигнала. Кроме того, измерения сопровождаются аддитивным шумом неизвестной дисперсии.

Форма сигнала. Сравнение сигналов по форме

Сигналы рассматриваются как векторы евклидова пространства R^n , заданные своими координатами. Значение i -й координаты вектора $f \in R^n$ интерпретируется как амплитуда сигнала в i -й момент времени $t_i = t_0 + i\delta$, $i = 1, \dots, n$, и шаг по времени много меньше времени характерных изменений сигнала.

Будем считать, что изменение условий регистрации приводит к преобразованию сигнала, сохраняющему упорядоченность его координат. Такие преобразования даются монотонно возрастающими функциями координат: если $g_i = F(f_i)$ для каждого $i = 1, \dots, n$, а $F(\cdot)$ — монотонно возрастающая функция, то неравенства, выполненные для любой пары координат вектора $f \in R^n$, выполняются и для той же пары координат вектора $g \in R^n$. При этом, в частности, сохраняются интервалы монотонности и локальные экстремумы зависимостей координат от их номера. Форма сигнала $f \in R^n$ определяется как замыкание \bar{V}_f в R^n множества векторов, полученного из f всеми монотонно возрастающими

преобразованиями его координат:

$$\bar{V}_f = \{g = F \cdot f, F \in \bar{\mathbf{F}}\},$$

где $g = F \cdot f$ означает, что координаты g_1, \dots, g_n вектора g подчинены равенствам $g_i = F(f_i)$, $i = 1, \dots, n$, а $\bar{\mathbf{F}}$ — класс монотонно неубывающих функций. Множество \bar{V}_f является выпуклым замкнутым конусом в R^n и конструктивно может быть задано оператором P_f проецирования на это множество [1]. Оператор P_f определяет проекцию $P_f g$ сигнала $g \in R^n$ на \bar{V}_f как решение задачи наилучшего приближения g элементами из \bar{V}_f :

$$\|g - P_f g\|^2 = \inf\{\|g - h\|^2 \mid h \in \bar{V}_f\}. \quad (1)$$

Замыкание множества \bar{V}_f приводит к замене монотонно возрастающих преобразований координат на монотонно неубывающие, при этом может случиться так, что неравенство $f_i > f_j$ после преобразования $F(\cdot)$ координат вектора f превратится в равенство $F(f_i) = F(f_j)$, чего не случилось бы при строго монотонных преобразованиях. Преобразования $F \in \bar{\mathbf{F}}$, таким образом, могут «упростить» форму сигнала f . Следуя [1], будем говорить, что сигнал g не сложнее по форме, чем f , если $g = F \cdot f$ для некоторого $F \in \bar{\mathbf{F}}$.

Постановка задачи

Рассмотрим сигналы, регистрируемые двумя датчиками. Пусть измерения проводятся в моменты времени t_k , $k = -M, -M+1, \dots, n+M$, с шагом δ , много большим временного сдвига. Будем считать, что результаты измерения ξ_1 и ξ_2 этих сигналов первым и вторым датчиками соответственно можно записать в виде

$$\begin{aligned} \xi_{1,i} &= f_i, & \xi_{2,i} &= F(f_{i+m_0}) + \nu_i, \\ i &= -M, -M+1, \dots, n+M, \end{aligned} \quad (2)$$

^{*)} Институт физики атмосферы РАН.

где $|m_0| \leq M$ — неизвестный временной сдвиг второго сигнала относительно первого, а $F(\cdot)$ — некоторая неизвестная монотонно неубывающая функция, описывающая отличие условий регистрации сигнала вторым датчиком от эталонных, принятых для первого. Моделирующие погрешность измерений случайные величины ν_i , $i = -M, -M+1, \dots, n+M$, некоррелированы и контролируются нормальным распределением $N(0, \sigma^2)$ с неизвестной дисперсией $\sigma^2 > 0$. По результатам измерений (2) требуется оценить значение параметра сдвига $m_0 \in \{-M, \dots, M\}$.

Для решения этой задачи выберем фрагменты $f = (f_1, \dots, f_n) \in R^n$ и $\xi_m = (\xi_{2,m+1}, \dots, \xi_{2,m+n}) \in R^n$ и сравним по форме математическое ожидание $g_m \in R^n$ второго фрагмента с первым для каждого $m \in \{-M, \dots, M\}$. Выберем множество тех значений m , для которых достаточно вероятно включение $g_m \in \bar{V}_f \equiv \{F \cdot f, F \in \bar{\mathbf{F}}\}$, и будем использовать его в качестве множества, оценивающего значение m_0 в (2).

Близость сигналов по форме

Фиксируем некоторое значение $m \in \{-M, \dots, M\}$ и сравним вектор ξ_m по форме с f . В отсутствие погрешности измерений (2) форма ξ_m не сложнее, чем форма f , если

$$\xi_m = F \cdot f \quad (3)$$

при некотором $F \in \bar{\mathbf{F}}$, что эквивалентно равенству $P_f \xi_m = \xi_m$. При наличии погрешности измерения (2) равенство (3) может нарушаться даже при истинном значении сдвига $m = m_0$. Естественно считать, что чем больше квадрат расстояния $\|\xi_m - P_f \xi_m\|^2$ от ξ_m до \bar{V}_f , тем меньше сходство по форме сигнала ξ_m с f .

Однако распределение статистики $\|\xi_m - P_f \xi_m\|^2$ зависит от неизвестной дисперсии σ^2 шума ν в (2) и поэтому не может служить для количественной характеристики схождения по форме сигнала ξ_m с f . Для этой цели лучше подходит статистика [1]

$$\tau(\xi_m) = \frac{\|\xi_m - P_f \xi_m\|^2}{\|P_f \xi_m - P_0 \xi_m\|^2}, \quad (4)$$

где P_0 — проектор на множество $\bar{V}_0 = \{\mu \in R^n: \mu_i = c, i = 1, \dots, n, c \in (-\infty, \infty)\}$ сигналов, все координаты которых равны одной и той же константе. Распределение статистики (4) в меньшей степени зависит от неизвестных параметров распределения случайного вектора ξ_m , в частности не изменяется при умножении ξ_m на любое число, отличное от нуля, и при сложении ξ_m с любым вектором $\mu \in \bar{V}_0$, координаты которого $\mu_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, n$. Знаменатель дроби (4) дает отличие сигнала $P_f \xi_m$ по форме от сигнала, равного константе (т.е. от вектора, все координаты которого равны одной и той же величине). Сигнал $P_0 \xi_m$, равный константе, хотя

и принадлежит \bar{V}_f , но не несет никакой информации о форме сигнала f , в то время как разность $\|P_f \xi_m - P_0 \xi_m\|$ дает «существенную часть» сигнала ξ_m , сравнимую по форме с f , и дробь (4) тем меньше, чем меньше «часть» сигнала $\xi_m - P_f \xi_m$, отличающая ξ_m по форме от f , по сравнению с «существенной частью» $P_f \xi_m - P_0 \xi_m$ сигнала ξ_m , сравнимой по форме с f . Иными словами, значение дроби (4) тем больше, чем ближе сигнал ξ_m к константе по сравнению с близостью ξ_m к \bar{V}_f . Таким образом, формально речь идет о проверке гипотезы

$$H: \xi_m \sim N(a, \sigma^2 I), \quad a \in \bar{V}_f \setminus \bar{V}_0 \quad (5)$$

при альтернативе

$$K: \xi_m \sim N(a, \sigma^2 I), \quad a \in \bar{V}_0. \quad (6)$$

Морфологический критерий проверки гипотезы (5) при альтернативе (6) определяется критическим множеством [1]

$$S = \{z \in R^n: \tau(z) \geq \delta\}. \quad (7)$$

Если $\xi_m \notin S$, то гипотеза (5) принимается и можно считать, что сигнал ξ_m достаточно близок по форме к сигналу f . Степень согласия гипотезы (5) с результатом наблюдения ξ_m , следуя [1, 2], охарактеризуем надежностью гипотезы, равной минимальному уровню критерия, при котором по наблюдению ξ_m (5) отвергается в пользу (6). Надежность в данном случае равна

$$\alpha_H(\xi_m) = \sup \left\{ \int_{\tau(x) \geq \tau(\xi_m)} p_{N(\mu, \sigma^2 I)}(x) dx \mid \mu \in \bar{V}_f \setminus \bar{V}_0, \sigma^2 > 0 \right\}, \quad (8)$$

где $p_{N(\mu, \sigma^2 I)}(\cdot)$ — плотность нормального распределения. Точная верхняя грань в (8) равна $\alpha_H(\xi_m) = \int_{\tau(x) \geq \tau(\xi)} p_{N(\mu_0, I)}(x) dx$ и с вероятностью еди-

ница одна и та же для любого $\mu_0 \in \bar{V}_0$, в частности для $\mu_0 = 0$. Она может быть вычислена методом Монте-Карло путем разыгрывания реализаций вектора $\zeta \sim N(\mu_0, I)$ с математическим ожиданием $\mu_{0,i} = 0$, $i = 1, \dots, n$, и подсчета частоты реализаций, для которых $\tau(\zeta) \geq \tau(\xi_m)$.

Заметим, что если \bar{V}_f — k -мерное подпространство R^n , то случайная величина $\frac{n-k}{\tau(\zeta)(k-1)}$ при $\zeta \sim N(\mu, \sigma^2 I)$, $\mu \in \bar{V}_0$, контролируется распределением Снедекора–Фишера с $k-1$, $n-k$ степенями свободы, а область S в (7) определяет равномерно наиболее мощный критерий проверки гипотезы (5) при альтернативе (6) в классе критериев, инвариантных к преобразованиям, определяемым симметрией задачи проверки гипотез (5), (6) [4, 5].

Множество, оценивающее значение m временного сдвига

Вернемся к оцениванию значения m временного сдвига сигнала ξ_2 относительно ξ_1 и построим множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$, оценивающее параметр $m \in \{-M, \dots, M\}$ по следующему правилу: будем считать, что оценивающее множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$ состоит из тех и только тех значений $m \in \{-M, \dots, M\}$, для которых надежность гипотезы (5) при альтернативе (6) не меньше $1 - p$:

$$\alpha(\xi_m) = P(\tau(\zeta) \geq \tau(\xi_m)) \geq 1 - p, \quad (9)$$

что влечет неравенство $\tau(\xi_m) \leq \delta(\varepsilon)$. Чем меньше $\delta(\varepsilon)$, тем меньше (по включению) оценивающее множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$ и тем точнее локализуется оцениваемое значение m . В силу определения случайное множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$ покрывает истинное значение параметра $m \in \{-M, \dots, M\}$ с вероятностью не меньше p .

Заметим, что эта оценка вероятности накрытия истинного значения параметра m случайным оценивающим множеством $I_p(\xi_1, \xi_2)$ получена в условиях неизвестной дисперсии измерительной погрешности; она вычисляется как точная нижняя грань по всем возможным частным распределениям гипотезы и равна пределу надежности частной гипотезы при стремлении математического ожидания вектора ξ_m к константе. Поскольку на практике математическое ожидание ξ неизвестно, то можно лишь гарантировать, что оценивающее множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$ покрывает истинное значение сдвига m с вероятностью не меньшей p (хотя в реальности эта вероятность может быть значительно больше).

Минимаксная оценка временного сдвига гарантированной надежности

Для множества $I_p(\xi_1, \xi_2)$ построим минимаксную оценку

$$\sup_{i \in I_p(\xi_1, \xi_2)} ||i - \tilde{i}|| = \inf_{i' \in \{-M, \dots, M\}} \sup_{i \in I_p(\xi_1, \xi_2)} |i - i'|. \quad (10)$$

Оценка \tilde{i} с гарантированной вероятностью p минимизирует максимально возможную погрешность оценивания параметра сдвига. Решением задачи (10) является середина отрезка минимальной длины, содержащего множество $I_p(\xi_1, \xi_2)$, половина его длины является погрешностью оценки \tilde{i} [1]. Ясно, что чем выше вероятность p , тем больше погрешность оценивания.

Результаты оценивания сдвига

В эксперименте регистрировались выходные сигналы трех датчиков акустического давления, расположенных в вершинах треугольника. Вычислялись оценки времени задержки. Предложенный метод использовался для оценки времени задержки выходных сигналов второго и третьего датчиков

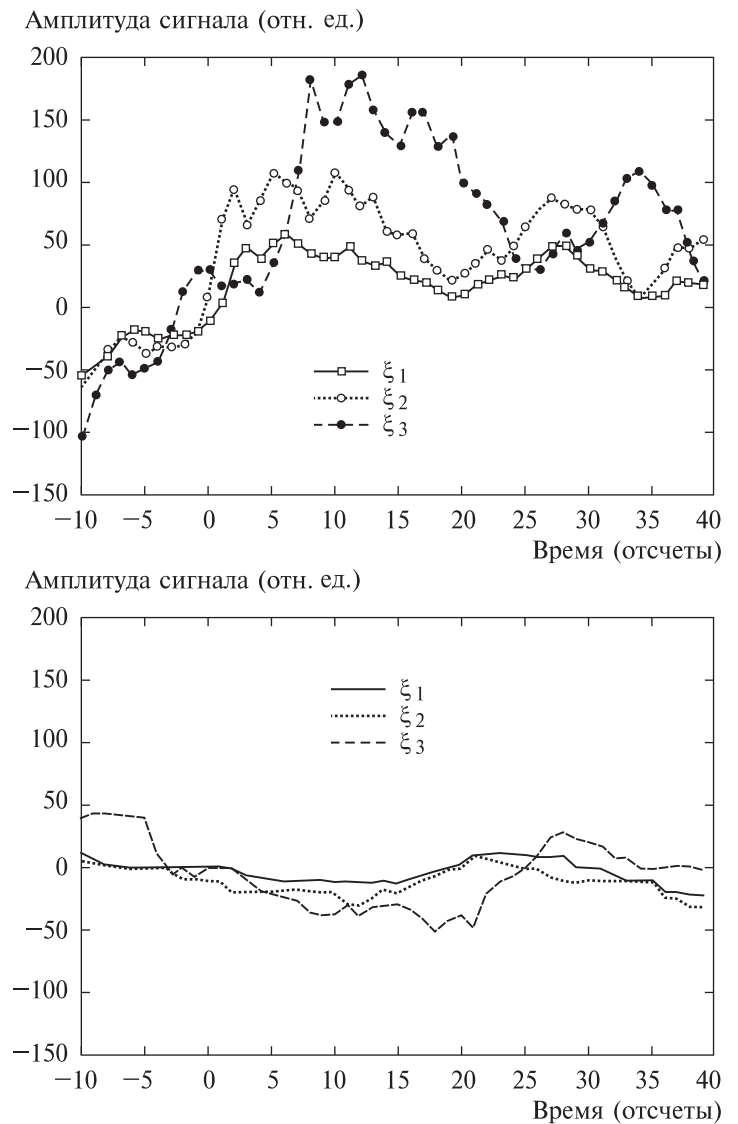


Рис. 1. Фрагменты сигналов, зарегистрированных тремя датчиками: а — фрагменты имеют ярко выраженные особенности формы; б — фрагменты сигналов малой амплитуды, особенности формы выражены слабо

относительно выходного сигнала первого датчика. На рис. 1 изображены два фрагмента сигналов, в первом случае (рис. 1,а) фрагмент имеет ярко выраженные особенности формы, однако участки монотонности не идентичны на всех трех сигналах, что можно объяснить наличием шумов; сигналы второго фрагмента (рис. 1,б) меньше по амплитуде по сравнению с сигналами первого фрагмента, что может свидетельствовать о меньшей амплитуде полезного сигнала и, следовательно, о большей его близости к константе.

На рис. 2 приведены графики надежности $\alpha_H(\xi_m)$ в зависимости от сдвига $m \in \{-M, \dots, M\}$ сигналов второго и третьего датчиков относительно сигнала первого датчика, а также показаны множества, оценивающие соответствующие временные сдвиги:

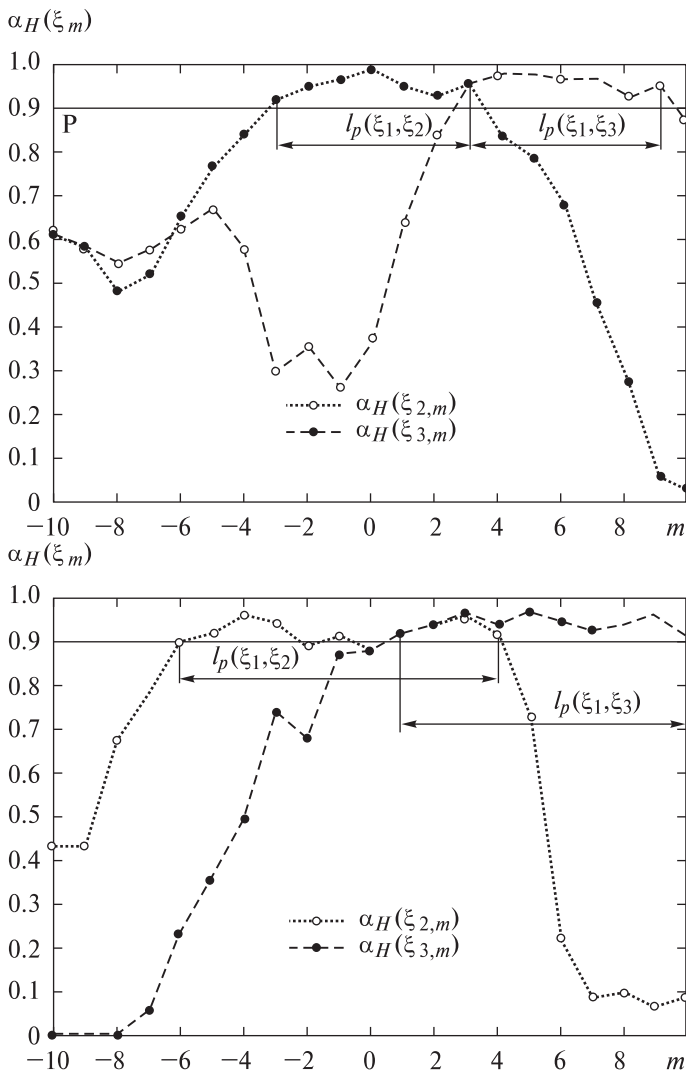


Рис. 2. Надежность $\alpha_H(\xi_m)$ в зависимости от сдвига $m \in \{-10, \dots, 10\}$ сигналов второго и третьего датчиков относительно сигнала первого датчика: а — для фрагментов сигналов, приведенных на рис. 1, а; б — для фрагментов, приведенных на рис. 1, б. $I_p(\xi_1, \xi_2)$ и $I_p(\xi_1, \xi_3)$ — интервальные оценки уровня не менее $p = 0.1$ временного сдвига второго сигнала относительно первого и третьего сигнала относительно первого соответственно

эти множества содержат те значения параметра, при которых надежность $\alpha_H(\xi_m)$ не меньше 0.9, а значит, в силу (9) содержат истинное значение $m \in \{-M, \dots, M\}$ с вероятностью, гарантированно не меньшей 0.1.

Видно, что для фрагментов, изображенных на рис. 1, а, оценка параметра сдвига с вероятностью не ниже 0.1 обладает существенно меньшей погрешностью, чем оценка для фрагментов, изображенных на рис. 1, б.

На рис. 3 приведены графики коэффициента корреляции $r(m) = \frac{|(f, \xi_m)|}{\|f\| \|\xi_m\|}$, $m \in \{-M, \dots, M\}$, для ситуации, когда вектор $f \in R^n$ выбран из сигнала первого датчика, а $\xi_m \in R^n$ — сдвинутый на m отсчетов участок сигнала второго (сплошная кри-

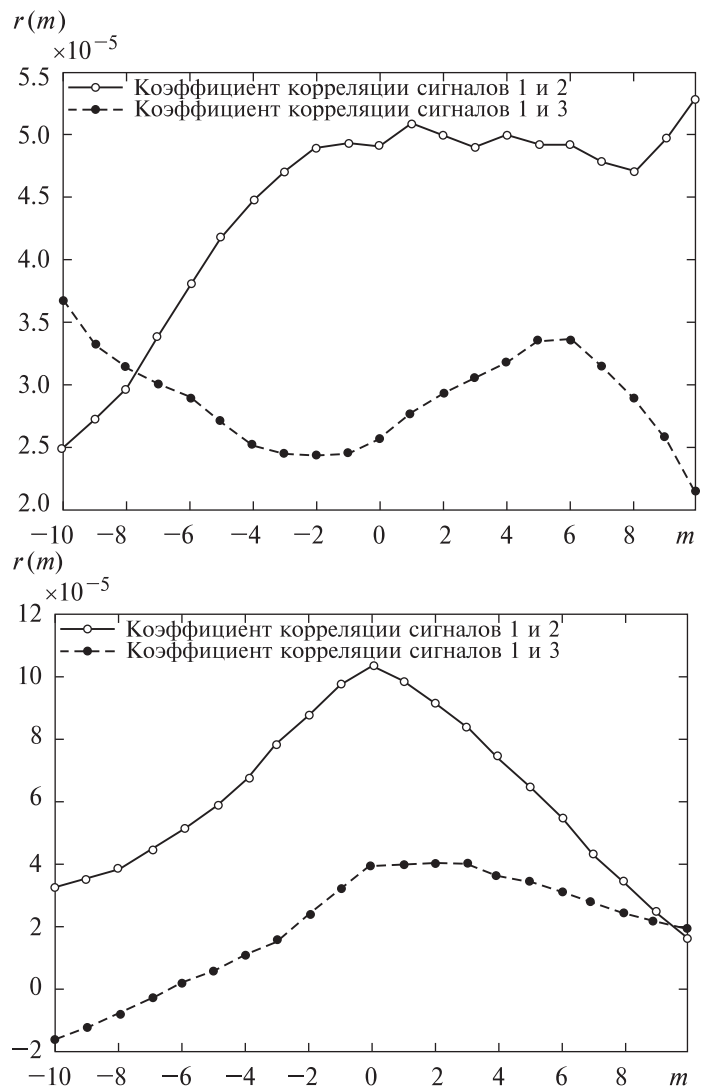


Рис. 3. Зависимость коэффициентов корреляции r_m сигнала первого датчика и сдвинутого на m отсчетов второго (сплошная линия) и третьего (пунктирная линия) датчиков, $m \in \{-10, \dots, 10\}$: а — для фрагментов сигналов, приведенных на рис. 1, а; б — для фрагментов, приведенных на рис. 1, б

вая) и третьего (пунктир) датчиков, изображенных на рис. 1, а, б соответственно. Если бы сигнал $\xi_m \neq 0$ можно было получить из $f \neq 0$ линейным преобразованием его координат, то в силу неравенства Коши $r(m) = 1$, в противном случае $r(m) < 1$. Малое значение $r(m)$, $m \in \{-M, \dots, M\}$, свидетельствует о малых корреляциях сигналов, а широкий максимум коэффициента корреляции — о невозможности оценки сдвига на основе анализа линейной зависимости сравниваемых сигналов.

В заключение заметим, что широко распространенный метод максимального правдоподобия в данном случае приводит к оценке параметра сдвига из условия $\hat{m} = \arg \min_m \|P_f \xi_m - \xi_m\|^2$, недостатки которого при неизвестной дисперсии погрешности измерения (2) обсуждены выше.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-01-00615, 05-05-64973).

Литература

1. *Пытьев Ю.П.* // Математические методы исследования природных ресурсов Земли из космоса: Сб. М., 1984.
2. *Пытьев Ю.П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М., 2004.
3. *Чуличков А.И.* Основы теории измерительно-вычислительных систем. Стохастические линейные измерительно-вычислительные системы. Тамбов: Изд-во Тамбовского гос. тех. ун-та, 2000.
4. *Чуличков А.И., Морозова И.В.* // Интеллектуальные системы. 2005. **9**, № 1–4. С. 321.
5. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М., 1979.

Поступила в редакцию
27.12.06