

## АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 532.517.2, 532.5.013.12

ПРОСТЕЙШИЕ МИКРОЛОКОМОТИВЫ ДЛЯ ПЕРЕДВИЖЕНИЯ  
В ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЯХ

А. А. Селезнев

(кафедра физики колебаний)

**Проведен сравнительный теоретический анализ некоторых предложенных сравнительно недавно моделей микролокомотивов и на его основе выдвинута новая модель микролокомотива, превосходящая их по эффективности и простоте изготовления.**

**Введение**

В настоящее время актуальной является задача транспортировки веществ по кровеносным сосудам человека с использованием микроскопических механизмов — так называемых микролокомотивов. Из-за миниатюризации механизма процесс его передвижения в крови отличен от привычного плавания макроскопических тел — вязкость играет значительно большую роль, чем инерционность. Поэтому в данных условиях число Рейнольдса мало:  $Re = \rho l v / \eta \ll 1$  (здесь  $\rho$  и  $\eta$  — соответственно плотность и вязкость жидкости, окружающей локомотив;  $l$  и  $v$  — его характерные размер и скорость). Для большинства биологических объектов микроскопического размера это величина порядка  $Re \approx 10^{-4}$ .

Первую модель механизма для передвижения в вязких жидкостях предложил Парцелл [1]. Ее теоретический анализ оказался весьма сложен и был проведен лишь сравнительно недавно, поэтому мы не будем останавливаться на ней.

Позже были предложены более простые для анализа модели, состоящие из трех [2] и двух [3] сфер. В настоящей работе мы анализируем эти модели и предлагаем новую оригинальную схему микролокомотива.

**1. Оценочный коэффициент**

Для того чтобы иметь объективный критерий сравнения разных микролокомотивов, введем оценочный коэффициент, определяемый математически [4, 5]:

$$\delta = \frac{\tau \int_0^{\tau} P dt}{6\pi\eta\Delta^2}. \quad (1)$$

Здесь  $\tau$  — период цикла модели,  $P$  — потребляемая микролокомотивом мощность,  $\eta$  — вязкость окружающей среды,  $\Delta$  — смещение за цикл. Коэффициент  $\delta$  характеризует отношение потребляемой локомотивом за период энергии к квадрату

ее перемещения и имеет размерность длины. Он нормирован таким образом, что для простой буксировки сферы с постоянной скоростью он равен радиусу этой сферы. Очевидно, что чем меньше коэффициент  $\delta$ , тем эффективнее модель.

**2. Модель трех сфер**

Эта модель микролокомотива впервые была предложена в работе [2]. Она состоит из трех твердых сфер, соединенных между собой двумя стержнями, способными изменять свою длину. Главная ее идея состоит в том, что гидродинамическое сопротивление, испытываемое системой из двух связанных сфер, при движении в направлении, параллельном прямой, соединяющей их центры, зависит от расстояния между сферами. Как можно видеть из цикла ее движения, представленного на рис. 1, при периодическом его повторении модель способна перемещаться в среде.

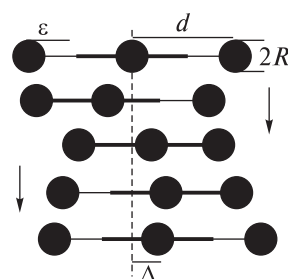


Рис. 1. Цикл передвижения модели трех сфер

Выразим все величины, необходимые нам для расчета коэффициента эффективности, через параметры микролокомотива. Для оценки перемещения модели за цикл разобьем его на четыре этапа, в течение каждого из которых длина одного стержня изменяется (увеличивается или уменьшается) с постоянной скоростью  $W$ , а длина другого остается постоянной (см. рис. 1). Рассчитаем перемещение модели за каждый этап по отдельности.

При расчетах используем приближение Стокса, исходя из которого сопротивление, испытываемое сферой радиуса  $R$  при движении в вязкой жидкости с показателем вязкости  $\eta$  под действием постоянной силы  $F_0$  с постоянной скоростью  $v$ , равно  $F_0 = 6\pi R\eta v = k_s v$ . Применение приближения Стокса оправдано малостью числа Рейнольдса.

В дальнейших расчетах мы оценим силу сопротивления  $F$ , испытываемую системой из двух сфер, расположенных на расстоянии  $x$  выражением  $F = k_{2s}(x)v$ , где  $k_{2s}(x) = 2k_s(1 - \frac{R}{x})$ . При такой зависимости (она удовлетворяет общим требованиям к подобной зависимости, изложенным ниже, и соображениям размерности [6]) от расстояния  $x$  сила сопротивления двух близко расположенных сфер несколько меньше, чем тех же сфер, разнесенных на большое расстояние. Подчеркнем, что наш подход является менее строгим, чем в [2], однако позволяет получить простую аналитическую формулу, удобную для сравнения с локомотивами другого типа.

Рассмотрим передвижение модели за первую часть цикла  $\Delta_1$  (рис. 1). Длина левого стержня уменьшается от  $d$  до  $d - \varepsilon$  с постоянной скоростью  $W$ . Записав для этого участка пути уравнения движения

$$\begin{cases} k_s v_1 = F_1, \\ k_{2s}(d) v_2 = F_2, \\ v_1 + v_2 = W, \\ F_1 = F_2 \end{cases}$$

(первое уравнение записано для левой сферы, второе — для системы из правой и центральной сфер) и решив их, легко находим перемещение средней сферы на этом участке пути:

$$\Delta_1 = \frac{k_s \varepsilon}{k_s + k_{2s}(d)}.$$

Во второй части цикла изменяется длина уже правого стержня. Для нее, проведя расчеты, аналогичные расчетам для первой части (с тем лишь отличием, что теперь длина постоянного стержня равна не  $d$ , а  $d - \varepsilon$ ), получим перемещение

$$\Delta_2 = \frac{k_s \varepsilon}{k_s + k_{2s}(d - \varepsilon)},$$

причем модель движется в противоположную сторону.

Третий и четвертый этапы, очевидно, являются зеркальными отображениями соответственно второго и первого, а значит, для перемещения за полный цикл  $\Delta$ , подставив предложенный нами вид функции  $k_{2s}(x)$ , мы можем написать:

$$\Delta = 2(\Delta_2 - \Delta_1) = \frac{4\varepsilon^2 R}{[3(d - \varepsilon) - 2R][3d - 2R]},$$

а исходя из того, что время совершения полного цикла равно  $T = 4\varepsilon/W$ , мы можем найти среднюю

скорость движения модели

$$V = \frac{W}{4\varepsilon} \Delta = \frac{W\varepsilon R}{[3(d - \varepsilon) - 2R][3d - 2R]}.$$

Стоит отметить расхождение наших результатов и полученных в [2] (см. уравнение (11) в [2]) для средней скорости локомотива. Зависимость средней скорости от  $\varepsilon$  в нашем случае представляется линейной, тогда как в [2] она квадратичная. Данное различие в аналитических выражениях для средней скорости движения модели при условии малости относительных деформаций модели приводит к различию в численных значениях характеристик модели не более чем на 15%. На рис. 2 проиллюстрировано расхождение результатов для конкретного случая  $d = 10R$ . Верхний график на нем соответствует расчетам в [2], нижний — нашим расчетам.

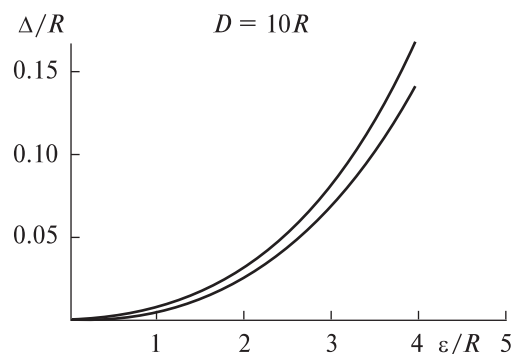


Рис. 2. Графики смещения локомотива за цикл как функции относительного смещения соседних сфер

Для расчета коэффициента  $\delta$  используем то, что потребляемая моделью мощность  $P = F(v_1 + v_2) = FW$ , где  $F$  — сила, действующая в стержне;  $v_1$  и  $v_2$  — скорости систем из одной и двух сфер. Получаем, что на первом этапе

$$P_1 = 12\pi R\eta \frac{d - R}{3d - 2R} W^2,$$

а на втором

$$P_2 = 12\pi R\eta \frac{(d - \varepsilon) - R}{3(d - \varepsilon) - 2R} W^2.$$

Расчет коэффициента  $\delta$  для модели трех сфер по формуле (1) имеет весьма простой вид

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \frac{\tau^2(P_1 + P_2)}{12\pi\eta\Delta^2} = \\ &= \frac{\frac{d-R}{3d-2R} + \frac{d-\varepsilon-R}{3(d-\varepsilon)-2R}}{\varepsilon^2 R} (3(d - \varepsilon) - 2R)^2 (3d - 2R)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Анализ полученного выражения показывает, что в пределе малых относительных деформаций, когда  $d \geq 10R$ ,  $\delta$  в лучшем случае имеет порядок сотен и даже тысяч  $R$ .

### 3. Модель двух сфер

Следующая модель, предложенная впервые в [3] и называемая авторами «Pushmerullyou», состоит из двух сфер, способных менять объем, сообщающихся посредством жесткого телескопического стержня (рис. 3).

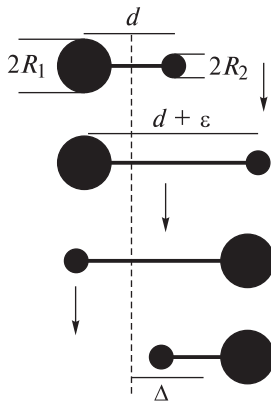


Рис. 3. Цикл передвижения модели двух сфер

После аналогичного разбиения цикла перемещения на этапы получаем перемещение за полный цикл в этом приближении

$$\Delta = 2\Delta_1 = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \varepsilon$$

и среднюю скорость

$$V = \frac{\Delta}{T} = \frac{\Delta}{\frac{2\varepsilon}{W} + \frac{2(V_1 - V_2)}{V}},$$

где  $V_1$  и  $V_2$  — соответственно объемы большой и малой сфер,  $R_1$  и  $R_2$  — их радиусы, а  $V$  — скорость перекачки внутреннего газа из одной сферы в другую.

Подобно тому как мы это делали в предыдущем пункте, получаем потребляемую мощность для первого этапа

$$P_1 = F(v_1 + v_2) = FW = 6\pi\eta \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} W^2.$$

Вычисления для второго этапа проводятся так: так как давление на поверхность расширяющейся сферы равно  $\sigma = 4\eta\dot{r}/r$ , где  $r$  — мгновенный радиус сферы,  $\dot{r}$  — скорость его изменения, мощность, затрачиваемая на расширение (сдувание) сферы,  $P_2 = 4\pi r^2 \sigma \dot{r} = 4\pi r^2 4\eta/r \dot{r}^2 = 16\pi r \eta \dot{r}^2$ . Так как сфер две, то

$$P_2 = 16\pi\eta(r_1 + r_2)\dot{r}^2.$$

Рассчитав коэффициент  $\delta$  по формуле (1) с использованием этих величин, получим результат, аналогичный приведенному в [3]:

$$\delta_2 \approx 4R_m, \tag{3}$$

где  $R_m$  — радиус малой сферы. Эта оценка справедлива для условий максимальной эффективности:  $(d_0 + \varepsilon_0)^2 \gg d_0^2$ ,  $d + \varepsilon \gg \sqrt{V_0/R}$ , где  $V_0$  — общий объем сфер.

### 4. Новая модель

На основе рассмотренных выше моделей нами была предложена еще одна, использующая схожие с вышеизложенными принципы, но лишенная некоторых недостатков своих предшественников. Она представляет собой расположенные на концах телескопического стержня зонтики, способные permanently складываться и раскладываться во время движения модели, тем самым изменяя свое гидродинамическое сопротивление (рис. 4).

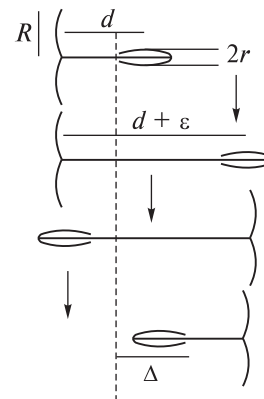


Рис. 4. Цикл передвижения предложенной модели

Для расчетов примем, что сопротивление зонтика в раскрытом состоянии приблизительно равно сопротивлению диска такого же радиуса  $F_d = 16\eta Rv$ ; для сложенного приблизим сопротивление сопротивлением сферы малого радиуса  $r$ ,  $F_s = 6\pi r v$ .

Как и раньше, разобьем цикл перемещения на этапы и посчитаем передвижение центра стержня за первый этап:

$$\Delta_1 = \frac{v_2 - v_1}{2} \frac{\varepsilon}{W} = \frac{8R - 3\pi r}{16R + 6\pi r} \varepsilon.$$

Во время второго (а также четвертого) этапа происходит изменение конфигурации зонтиков. Складывание (или разворачивание) зонтика является анизотропным процессом, вследствие чего при его проведении во время этого этапа модель совершает дополнительное передвижение. Здесь мы пренебрегаем им по нескольким причинам. Во-первых, в связи с пренебрежимой малостью эффектов инерции приобретаемые моделью во время раскладывания зонтика дополнительные импульсы не оказывают существенного влияния на движение модели и он частично компенсируется аналогичным симметричным ему этапом. Во-вторых, его можно проводить весьма медленно, с тем лишь условием, чтобы этап изменения длины протекал дольше и перемещал модель на заметно большее расстояние.

Очевидно, передвижение за полный цикл равно

$$\Delta = 2\Delta_1 = \frac{8R - 3\pi r}{8R + 3\pi r} \varepsilon,$$

а средняя скорость

$$V = \frac{\Delta}{T} = \left( \frac{8R - 3\pi r}{8R + 3\pi r} \varepsilon \right) / \left( \frac{2\varepsilon}{W} + 2T_{cl} \right),$$

где  $T_{cl}$  — время складывания (раскладывания) зонтика. Для приблизительных расчетов заменим складывание зонтика «передвижением» диска радиуса  $R$  на  $R/2$  со скоростью  $u$ . Тогда при синхронном сложении и разложении обоих зонтиков получаем  $T_{cl} = R/2u$ .

Для первого этапа энергопотребление

$$P_1 = FW = \frac{48\pi\eta r R}{8R + 3\pi r} W^2.$$

Для второго этапа (с точки зрения нашего приближения)

$$P_2 = 2P_d = 2Fu = 32Ru^2,$$

где  $P_d$  — мощность, затрачиваемая при равномерном движении диска радиуса  $R$  со скоростью  $u$ .

Подстановка в (1) дает

$$\delta_{new} = \frac{\left( \frac{2\varepsilon}{W} + \frac{R}{u} \right) \left( \frac{48\pi r R W^2}{8R + 3\pi r} \frac{2\varepsilon}{W} + 32Ru^2 \frac{R}{u} \right)}{6\pi\varepsilon^2} \approx \frac{12\pi r W \varepsilon + 32R^2 u}{3\pi\varepsilon W} = 4r + \frac{32R^2 u}{3\pi\varepsilon W} \approx 4r. \quad (4)$$

Он получен в предположении, что время изменения длины стержня велико по сравнению с временем изменения состояния зонтика.

В нашей модели полезный объем, необходимый для переноса жидкости, можно разместить в капсуле внутри стержня. Толщину капсулы можно уменьшить, удлиняя при этом стержень (в короткой конфигурации). В таком случае можно даже рассматривать модель как некий «шприц», способный не только доставить вещество в необходимое место, но и оставить его в ней.

## Заключение

Как легко видеть из сравнения формул (2), (3) и (4), предложенная нами модель при разумном использовании по эффективности на порядки превосходит модель трех сфер и ни в чем не уступает модели двух сфер.

В то же время она гораздо более проста в изготовлении: для передвижения кроме мотора, изменяющего длину стержня, ей требуются лишь два закрывающих механизма, в то время как двум сферам нужен микронасос для перекачки рабочей жидкости (или газа), что гораздо сложнее реализовать технически. Кроме того, при расчетах для двух сфер вязкость внутренней жидкости полагалась пренебрежимо малой, а при наиболее продуктивном методе использования модели (при большой амплитуде изменения длины стержня) она начинает играть большую роль вследствие увеличения длины канала, по которому она транспортируется.

Иными словами, при увеличении амплитуды изменения длины стержня эффективность модели двух сфер растет медленнее, чем эффективность нашей модели.

## Литература

1. Purcell E.M. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1977. **94**. P. 11307–11.
2. Najafi A., Golestanian R. // Phys. Rev. E. 2004. **69**. P. 062901; Preprint cond-mat/0402070.
3. Avron J.E., Kenneth O., Oaknin D.H. // New J. Phys. 2005. **7**. P. 234.
4. Lighthill J. // Commun. Pure Appl. Math. 1952. **5**. P. 109; Taylor G.L. // Proc. R. Soc. A. 1951. **209**, N 447. P. 61.
5. Stone H.A., Samuel A.D. // Phys. Rev. Lett. 1996. **77**, N 4102. P. 4.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: 1988.

Поступила в редакцию  
24.01.07