УДК 524.8-337

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ ПАМЯТИ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТА ВО ВСЕЛЕННОЙ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Д. А. Грачев

(*кафедра математики*)

E-mail: gdmath@mail.ru

Уравнение Якоби на геодезической риманова многообразия со случайной кривизной описывает распространение света во Вселенной с неоднородностями. В рамках модели с постепенной потерей памяти получена формула для эффективной кривизны пространства. Показано, что эта кривизна является отрицательной при любой величине корреляционного радиуса. Результаты сравниваются с известными результатами, полученными в рамках модели с кусочно-постоянной случайной кривизной, а также модели с малым радиусом корреляций кривизны.

Введение

Вселенная в больших масштабах обладает исключительной степенью однородности и изотропии, однако в малых масштабах она неоднородна и анизотропна из-за концентрации материи в небесных телах. Еще в 1964 г. Я. Б. Зельдович показал, что флуктуации плотности, вызванные такими неоднородностями, приводят к небольшому систематическому искажению космологических тестов, которые делают Вселенную [1], гауссова кривизна пространственного сечения которой в среднем равна нулю, в известной степени похожей на открытую космологическую модель.

Эффект Зельдовича мало связан с динамикой расширения Вселенной, а представляет собой некоторый факт геометрии пространственного сечения [1]. Более того, он представляет факт геометрии двумерного среза пространственного сечения, которое определяется направлением на наблюдаемый объект и его ориентацией. С геометрической точки зрения эффект Зельдовича, как и некоторые другие факты, связанные с космологическими тестами, удобно описывать в терминах полей Якоби на геодезических пространственного сечения, вдоль которых и распространяются лучи света.

Поле Якоби $y(x)$ (здесь x — расстояние вдоль некоторой геодезической) однозначно определяется гауссовой кривизной $K(x)$, которая считается случайной и представимой в виде $K(x) = \overline{K} + k(x)$, где $\overline{K}$ — средняя кривизна, которая не зависит от x ввиду статистической однородности Вселенной, а член $k(x)$ описывает случайные флуктуации кривизны пространственного сечения, вызванные флуктуациями плотности. Поскольку мы имеем дело со случайным полем, заданным вдоль некоторой геодезической, естественно рассмотреть среднюю величину $\mathcal{Y} = \langle y \rangle$. Физический смысл среднего поля Якоби состоит в следующем: величина $\mathcal{Y}(x)\theta$ представляет собой средний линейный размер объектов с угловым размером θ, расположенных во Вселенной на расстоянии x от наблюдателя.

Как показано в [2], среднее поле Якоби $\mathcal{Y}$ можно найти из уравнения

$$\mathcal{Y}'' + \mathcal{Y}\Big(\overline{K} - \frac{\mathcal{K}}{6}\Big) = 0. \qquad (1)$$

При выводе (1) использовалась модель случайной кривизны с обновлением (она описана ниже), в которой длина интервала обновления δ устремлялась к нулю. При этом приходится считать, что флуктуации кривизны становятся большими, так чтобы среднее $\langle k^2\delta^2 \rangle \to \mathcal{K}$ при $\delta \to 0$. Тем самым при любом соотношении между $\overline{K}$ и $\mathcal{K}$ кривизна K меняет знак, в результате чего остается неясным, с чем связан эффект Зельдовича — с наличием на геодезической участков с отрицательной кривизной или же с наличием небольших флуктуаций. Для того чтобы прояснить этот вопрос, необходимо отказаться от короткокоррелированного приближения и рассмотреть модель с малым, но конечным δ. Это и составляет содержание настоящей работы. Теперь вместо дифференциального уравнения (1) для среднего поля Якоби приходится рассматривать разностное (алгебраическое) уравнение. Однако удается показать, что среднее поле Якоби по-прежнему растет экспоненциально со скоростью, определяемой соотношениями того же характера, что и для короткокоррелированной модели. Другими словами, эффект Зельдовича действительно связан с малыми флуктуациями кривизны, а обращения ее знака при выводе уравнений в короткокоррелированной модели несущественны.

1. Уравнение Якоби и случайная кривизна

Здесь мы дадим формальное определение поля Якоби и опишем модель случайного процесса с обновлением.

Пусть на двумерном римановом многообразии M^2 задано двупараметрическое семейство геодезических $\gamma(\theta, x)$, пересекающихся в заданной точке $P \in M^2$. При этом x —длина вдоль геодезических, а θ —угол, отсчитываемый в точке P от определенной базовой геодезической Γ этого семейства, для которой $\theta = 0$. Тогда расстояние между точками, находящимися на близких геодезических на расстоянии x от точки P, равно (с точностью до малых высшего порядка) $y(x)\theta$, где $y(x)$ и есть, по определению, поле Якоби вдоль базовой геодезической Γ. Поле Якоби можно найти из уравнения Якоби (см. [3]), которое также называют уравнением отклонений геодезических,

$$y'' + K(x)y = 0. \tag{2}$$

Здесь $K(x)$ — гауссова кривизна, а производные берутся по расстоянию x от начальной точки P. Уравнение Якоби дополняется естественными начальными условиями $y(0) = 0$ (все геодезические семейства выпущены из одной точки) и $y'(0) = 1$ (условие нормировки).

Очевидно, что изучение уравнения (2) требует конструктивного описания случайного процесса $K(x)$. Мы выбираем это описание, ориентируясь на модели, удобные для аналитических исследований (а именно на уже упоминавшиеся модели с обновлением).

Пусть полупрямая $x \geqslant 0$ разбита на равные отрезки длины δ (корреляционная длина, которая используется в качестве единицы длины, сам же отрезок принято называть интервалом обновления). Далее, пусть процесс $K(x)$ теряет память точно в точках $x_n = n \cdot \delta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Это означает, что величины $K_n(x)$ на полусегментах $[0; \delta), \ldots, [n\delta; (n+1)\delta)$ предполагаются статистически независимыми и имеющими одинаковые статистические характеристики (а именно среднее значение, дисперсию, корреляционную функцию и т. д.). Кроме того, предполагается статистическая независимость точек обновления от всех процессов $K_n(x)$. Эта модель и есть модель процесса с обновлением. В общем случае из-за фиксированных точек обновления такой случайный процесс статистически неоднороден (в масштабах, сопоставимых с δ), и корреляционная функция $\langle K(x_1), K(x_2)\rangle$ зависит от обеих точек x_1 и x_2.

2. Среднее поле Якоби и эффекты памяти

Отметим, что непосредственное усреднение уравнения (2) затруднительно, поскольку оно содержит произведение $K(x)y$, в котором сомножители зависимы. Однако описанная модель случайного процесса с обновлением позволяет преодолеть эту трудность.

Перепишем (2) в виде системы линейных уравнений для двухкомпонентного вектора-строки $\boldsymbol{z}$ с компонентами $z_1 = y$, $z_2 = \delta y'$:

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = \boldsymbol{z} \begin{pmatrix} 0 & -\delta \cdot K(x) \\ 1/\delta & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь мы умножили y' на δ для того, чтобы придать компонентам вектора $\boldsymbol{z}$ одинаковую размерность. Начальные условия имеют вид

$$z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = \delta.$$

Тогда

$$\boldsymbol{z}(x_n) = \boldsymbol{z}(x_{n-1})B_n = \ldots = \boldsymbol{z}_0 B_1 \cdots B_{n-1}B_n, \quad \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z}_0. \tag{4}$$

Здесь матрица B_n является фундаментальной матрицей системы (3), т. е. матрицей, обладающей свойством $\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{z}(s)B(s, x)$ при $s < x$, а формула (4) получается благодаря ее мультипликативному свойству $B(x_0, x_n) = B(x_0, x_1) \cdots B(x_{n-1}, x_n)$. В общем случае, когда кривизна является кусочно-непрерывной случайной функцией, явное выражение для фундаментальной матрицы будет содержать так называемый мультипликативный интеграл (известный в квантовой теории поля как T-экспонента)

$$B_i = \prod_{u=(i-1)\delta}^{i\delta} \left[\boldsymbol{I} + \begin{pmatrix} 0 & -\delta \cdot K(u) \\ 1/\delta & 0 \end{pmatrix} du \right], \tag{5}$$

где $\boldsymbol{I}$ —единичная матрица размера 2×2. Многие важные свойства мультипликативного и обычного аддитивного интегралов совпадают, в частности и тот и другой существуют для любой кусочно-непрерывной функции. Ниже нам потребуется представление мультипликативного интеграла в виде бесконечной суммы аддитивных интегралов (см. [4])

$$\prod_{u=a}^{b} \bigl(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}(u)\, du\bigr) = \boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \int \cdots \int\limits_{a \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k \leqslant b} \boldsymbol{A}(\tau_1) \cdots \boldsymbol{A}(\tau_k)\, d\tau_1 \cdots d\tau_k. \tag{6}$$

Отметим, что в (6) интегрирование ведется по k-мерной пирамиде (при $k = 1$ пирамида вырождается в отрезок, а при $k = 2$ — в треугольник).

Положим в (4) $x_n = n\delta$, тогда вектор $\boldsymbol{z}(n\delta)$ представим в виде

$$\boldsymbol{z}(n\delta) = \boldsymbol{z}(0)B_1 \cdots B_{n-1}B_n. \tag{7}$$

Как следует из (5), каждая матрица в (7) зависит только от распределения кривизны между точками обновления $(i-1)\delta$ и $i\delta$; тем самым все B_i

статистически независимы и имеют одинаковое вероятностное распределение. Данное обстоятельство позволяет провести усреднение (7):

$$<\boldsymbol{z}(n\delta)> = <\boldsymbol{z}(0)><B_1>^n. \qquad (8)$$

Нахождение матрицы B_1 при помощи формулы (6) облегчается тем, что вычисления достаточно вести лишь с точностью до членов порядка квадрата кривизны. Непосредственный подсчет показывает, что

$$<B_1> = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \delta^2\overline{K}\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} + \delta^4\begin{pmatrix} \mathcal{K}^4_{1,3} & \mathcal{K}^3_{1,3} \\ \mathcal{K}^5_{2,4} & \mathcal{K}^4_{2,4} \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где

$$\mathcal{K}^l_{i,j} = \frac{1}{\delta^l}\int\cdots\int\limits_{0\leqslant\tau_1\leqslant\ldots\leqslant\tau_l\leqslant\delta} c(\tau_j - \tau_i)\, d\tau_1\cdots d\tau_l. \qquad (10)$$

Подынтегральное выражение $c(\tau_j - \tau_i)$ в (10) является корреляционной функцией кривизны $<K(\tau_i)K(\tau_j)>$.

Чтобы исследовать поведение вектора $<\boldsymbol{z}>$, найдем из характеристического уравнения для матрицы $<B_1>$ главное собственное значение λ. Пренебрегая малыми высшего порядка и учитывая, что в (9) $\mathcal{K}^4_{1,3} = \mathcal{K}^4_{2,4}$, получим

$$\lambda = 1 + \delta\sqrt{-\overline{K} + \delta^2\mathcal{K}^3_{1,3}}. \qquad (11)$$

Отметим, что матричные элементы $\mathcal{K}^4_{1,3}, \mathcal{K}^4_{2,4}$ и $\mathcal{K}^5_{2,4}$ существенной роли не играют, так как при решении характеристического уравнения перед ними возникают коэффициенты существенно большего порядка по δ, нежели порядок нормировки l в (10) (напомним, что мы рассматриваем длину интервала обновления хоть и конечной, но малой).

Используя (11), несложно получить разностное уравнение для среднего поля Якоби. При достаточно больших n величина $<y>$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} <y(n\delta)> - <y((n-1)\delta)> = \\ \quad = \delta\sqrt{-\overline{K} + \delta^2\mathcal{K}^3_{1,3}}<y((n-1)\delta)>, \\ <y'(n\delta)> - <y'((n-1)\delta)> = \\ \quad = \delta\sqrt{-\overline{K} + \delta^2\mathcal{K}^3_{1,3}}<y'((n-1)\delta)>, \end{cases}$$

которая заменой $<y(n\delta)> - <y((n-1)\delta)>$ на $\delta<y'((n-1)\delta)>$ может быть сведена к уравнению

$$\frac{<y'(n\delta)> - <y'((n-1)\delta)>}{\delta} + (\overline{K} - \delta^2\mathcal{K}^3_{1,3})<y((n-1)\delta)> = 0. \qquad (12)$$

Разностное уравнение (12) похоже на уравнение (1), а роль эффективной кривизны пространства K_{eff} теперь играет величина $-\delta^2\mathcal{K}^3_{1,3}$.

Вычислим матричный элемент $\mathcal{K}^3_{1,3}$. Из (10) следует, что

$$\mathcal{K}^3_{1,3} = \frac{1}{\delta^3}\int_0^\delta\left(\int_0^{\tau_1}\left(\int_0^{\tau_2} c(\tau_1-\tau_3)\,d\tau_3\right)d\tau_2\right)d\tau_1 = $$

$$= \frac{1}{\delta^3}\int_0^\delta\left(\int_0^{\tau_1}\left(\int_{\tau_3}^{\tau_1} c(\tau_1-\tau_3)\,d\tau_2\right)d\tau_3\right)d\tau_1 = $$

$$= \frac{1}{\delta^3}\int_0^\delta\left(\int_0^{\tau_1} c(\tau_1-\tau_3)(\tau_1-\tau_3)\,d\tau_3\right)d\tau_1. \qquad (13)$$

Переходя в (13) к новым переменным $t = \tau_1 - \tau_3$, $\tau_3 = \tau_3$ и учитывая, что якобиан отображения $(\tau_3, \tau_1) \mapsto (\tau_3, t)$ равен единице, получим

$$\mathcal{K}^3_{1,3} = \frac{1}{\delta^2}\int_0^\delta c(t)t\,dt - \frac{1}{\delta^3}\int_0^\delta c(t)t^2\,dt. \qquad (14)$$

Отметим, что при вычислении этого матричного элемента в [2] допущена неточность, которую мы здесь исправили.

Для нахождения в явном виде эффективной кривизны требуется задать корреляционную функцию $c(t)$. Выберем ее ради определенности в виде $c(t) = <K^2>\exp(-t^2/r_0^2)$, где $r_0 \in (0, \delta)$ — корреляционный радиус, величина которого и определяет эффекты памяти в рассматриваемой модели. Подставляя $c(t)$ в (14), мы приходим к результату

$$K_{\mathrm{eff}} = -\frac{r_0^2 < K^2 >}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{\pi}\,r_0}{2\delta}\,\mathrm{erf}(\delta/r_0)\right), \qquad (15)$$

где $\mathrm{erf}(\cdot)$ — функция ошибок.

3. Обсуждение

Итак, мы отказались от условия короткокоррелированности, добавив в описание флуктуаций кривизны эффекты памяти. Это привело к усложнению уравнения для среднего поля Якоби —оно стало разностным. Однако, как и дифференциальное уравнение (1), оно описывается эффективным значением кривизны K_{eff}, приводящим к некоторому уменьшению осредненного значения $\overline{K}$. В этом смысле уравнение для среднего поля Якоби оказывается устойчивым по отношению к усложнению модели. Еще одним аргументом в пользу указанной устойчивости являются результаты численного моделирования решений уравнения Якоби [5, 6].

Отметим, что формула (15) получена для совершенно произвольных $0 < r_0 < \delta$. При $r_0 \ll \delta$ и $\overline{K} = 0$ выражение (15) переходит в полученное в [2] соотношение $K_{\mathrm{eff}} = -\frac{r_0^2<K^2>}{2}$.

Автор благодарен Д. Д. Соколову за обсуждение текста и сделанные замечания.

Литература

1. *Зельдович Я.Б.* // Астрон. журн. 1964. **41**. С. 19.
2. *Lamburt V.G., Sokoloff D.D., Tutubalin V.N.* // Astrophysics and Space Science. 2005. **298**. P. 409.
3. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М., 1971.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 2004.
5. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 2. С. 172.
6. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* // Астрон. журн. 2005. **82**, № 7. С. 584.

Поступила в редакцию
26.03.07