

УДК 517.538.72, 541.421

**ОПТИЧЕСКАЯ ДИФРАКЦИЯ НА ФРАКТАЛЬНЫХ РЕШЕТКАХ****А. Н. Боголюбов, А. А. Петухов, Н. Е. Шапкина***(кафедра математики)*

E-mail: nshapkina@mail.phys.msu.ru

**Описываются основные свойства фракталов и фрактальных объектов. Приводится обзор статей, посвященных изучению дифракции на фрактальных решетках. Рассматривается метод оптического преобразования Фурье как способ определения фрактальной размерности дифракционной решетки.**

Фракталом можно назвать структуру, состоящую из частей, в некотором смысле подобных целому [1]. Основным свойством фрактала является самоподобие, или масштабная инвариантность, а фундаментальной его характеристикой — фрактальная размерность. Причем фрактальная размерность не всегда является целым числом. Наличие у фракталов таких особенностей позволяет ожидать проявления у фрактальных объектов свойств, резко отличающихся от свойств объектов с обычными геометрическими формами и строго периодических структур. И эти ожидания действительно оправдываются. Например, в результате дифракции света на фрактальной решетке образуется самоподобная дифракционная картина, причем, изучая распределение интенсивности на этой картине, можно определить фрактальную размерность решетки.

Говоря о фрактальной размерности, необходимо в первую очередь обратиться к определению размерности Хаусдорфа [1–3]. Рассмотрим некоторое множество точек  $G$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Покроем это множество  $n$ -мерными кубиками с ребром  $\varepsilon$  каждый. Составим сумму вида  $m_p = \sum \varepsilon^p$  по всем кубикам, где есть точки нашего множества ( $p$  — произвольный действительный параметр). Устремим  $\varepsilon$  к нулю. Тогда в зависимости от  $p$  значение предела  $M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_p$  может меняться.

При малых  $p$  этот предел равен  $\infty$ , при больших — нулю. Существует такое  $p = D_H$ , при котором происходит скачок  $M$  от нуля до  $\infty$ . Это значение  $D_H$  и называется размерностью Хаусдорфа\*). Непосредственной проверкой можно убедиться, что для обычных геометрических форм, таких как квадрат или отрезок, размерность Хаусдорфа равна их топологической размерности  $D_T$  [3], однако для фрактальных объектов это не так. Например, для триадного канторова множества  $D_H = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63$ ,  $D_T = 0$ , а для  $H$ -фрактала  $D_H = 2$ ,  $D_T = 1$ .

При расчете размерности Хаусдорфа для реальных физических объектов могут возникнуть и, как

\*) Приведенное определение не является математически абсолютно строгим, но такой формулировки вполне достаточно для решения задач, описанных в этой статье в дальнейшем.

правило, возникают существенные трудности. Определение этой характеристики требует предельного перехода к бесконечно малым объемам, что невозможно реализовать на практике из-за существования у каждой системы конечных ненулевых минимальных характерных размеров. Однако в действительности оказывается, что отличительные свойства фракталов проявляются не только при предельном переходе при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , но и в целой конечной области изменения масштабов. Это важное замечание позволяет проводить исследования с так называемыми предфракталами — фрактальными структурами, построенными за конечное число итераций (фрактал же требует стремлений числа итераций к бесконечности). В этом случае можно записать, что число  $N$  элементарных множеств в покрытии данного нам объекта  $G$  при масштабе  $\varepsilon$

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D_F},$$

где  $D_F$  — по определению фрактальная размерность множества.  $D_F$  является количественной характеристикой самоподобия. Вообще говоря, определенная таким образом фрактальная размерность может не совпадать с размерностью Хаусдорфа данного фрактала. Однако для строго самоподобных, или конструктивных, фракталов [3–4] эти величины всегда совпадают.

Используя определение фрактальной размерности, ее можно довольно легко вычислять экспериментально. Запишем выражение для меры  $M$  множества  $G$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве:

$$M = N(\varepsilon)\varepsilon^n = a\varepsilon^{n-D}.$$

Получив экспериментально зависимость  $M(\varepsilon)$  и затем построив график  $\ln M(\ln \varepsilon)$  (это прямая), можно на практике рассчитать фрактальную размерность, выразив ее через коэффициент наклона этой прямой.

Существуют и другие методы практического определения фрактальных размерностей. Остановимся подробнее на методе, основанном на изучении дифракционных картин, полученных в результате дифракции света на фрактальных решетках — ме-

тоде оптического преобразования Фурье [5]. Первые подобные эксперименты были проведены более 20 лет назад. В 1985 г. была опубликована статья К. Аллена и М. Клуатра [6]. В этой работе описаны опыты по дифракции света на одномерном триадном канторовом множестве (предфрактал 7-го порядка итерации) и двумерном фрактале Вичека (5-го порядка итерации). На рис. 1 представлены изображения одной из первых итераций этих фракталов.

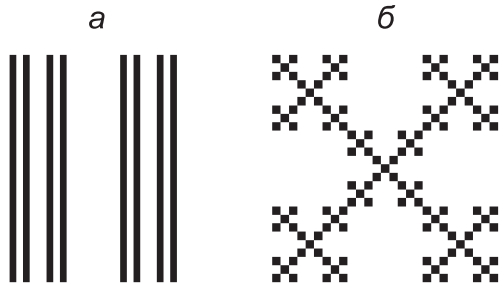


Рис. 1. Фрактал Кантора (а) и фрактал Вичека (б), 3-й порядок итерации

Численное моделирование процесса было проведено с учетом того факта, что распределение амплитуд на дифракционной картине является фурье-образом дифракционной решетки [6–9]. Тогда, зная функцию пропускающей решетки, а также распределение амплитуд падающей на решетку световой волны в зависимости от координат  $x$  и  $y$  в плоскости решетки (волна считалась сферической), можно рассчитать распределение амплитуд, а значит, и распределение интенсивности на дифракционной картине. Зависимость интенсивности дифрагировавшего света от пространственной частоты  $q$  для случая дифракционной решетки, построенной на основе канторова множества  $n$ -го порядка итерации, согласно [6], можно представить в следующем виде:

$$I_n(q) = 2^{2n} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \cos(2\pi 3^i q) \right)^2 \left( \frac{\sin \pi q}{\pi q} \right)^2,$$

где  $2^{2n} \varepsilon^2$  — интенсивность при  $q = 0$ . На рис. 2 для сравнения приведены рассчитанный и экспериментально полученный дифракционные спектры для фрактала Кантора.

Выражение для  $I_n(q)$  (см. выше) представляет собой произведение двух выражений: формфактора  $F(q) = \left( \frac{\sin \pi q}{\pi q} \right)^2$  и структурного фактора

$$S_n(q) = 2^{2n} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \cos(2\pi 3^i q) \right)^2.$$

Формфактор отвечает за распределение интенсивности на дифракционной картине от элементарной структурной единицы дифракционной решетки (в данном случае элементарной структурной единицей является щель) и не зависит от геометрии решетки. Структурный фактор, наоборот, опреде-

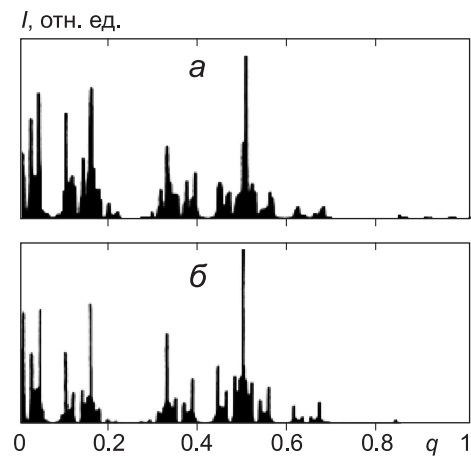


Рис. 2. Дифракционный спектр для фрактала Кантора: теоретический расчет (а) и экспериментальные данные (б)

ляется распределением элементарных единиц в дифракционной решетке, а потому именно его анализ позволяет установить ее характерные особенности.

Для зависимости спектральной плотности структурного фактора  $\langle S \rangle(q)$  от пространственной частоты  $q$  учеными был экспериментально установлен степенной закон

$$\langle S \rangle(q) \propto q^{-D},$$

где  $D$  — фрактальная размерность дифракционной решетки. Таким образом, строя зависимость  $\ln \langle S \rangle(q)$  от  $\ln q$ , можно, определив угловой коэффициент этой прямой, определить и размерность  $D$ .

С помощью этого метода было рассчитано значение фрактальной размерности для канторова множества и фрактала Вичека. Полученные значения совпадают с теоретическими с точностью до 10%. Такая относительно невысокая точность обусловлена использованием в качестве решеток фрактальных структур небольшого порядка итерации ( $n = 7$  для канторова множества,  $n = 5$  для фрактала Вичека).

Исследователи из Китая Б. Ху, Г. Ксю, В. Вэн и Дж. Вонг (Bo Hou, Gu Xu, Weijia Wen and George K. L. Wong) аналогичным способом изучили  $H$ -фрактальную дифракционную решетку. Результаты их исследований описаны в статье [10], опубликованной в 2004 г. Они экспериментально и теоретически изучили дифракцию Фраунгофера на решетке в форме  $H$ -фрактала 15-го порядка итерации. Фрагмент использованной решетки приведен на рис. 3. Построение фрактала начинается с отрезка длины  $a$  (первый порядок итерации). На  $(k+1)$ -й итерации к структуре добавляется  $2^k$  отрезков, середина каждого из них примыкает к концу отрезка, построенного на  $k$ -м шаге. Длины отрезков масштабируются с коэффициентом 2 (1), если  $k$  — четное (нечетное) число. Аналитически показывается, что фрактальная размерность такой структуры равна двум. Физически такое значение размерности

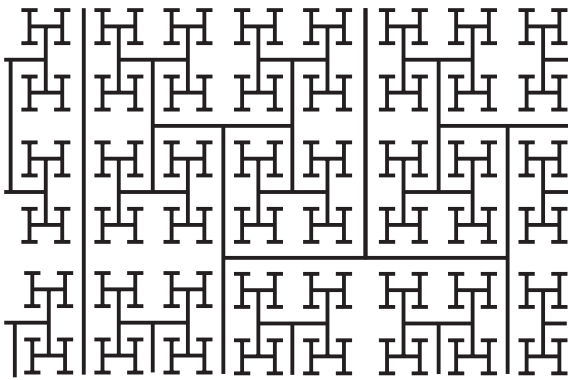


Рис. 3. Фрагмент  $H$ -фрактального образца

означает, что  $H$ -фрактал нельзя считать просто кривой. В действительности он плотно заполняет некоторую конечную площадь в двумерном пространстве.

Результаты численного моделирования дифракционной картины (рис. 4) были проведены с использованием фурье-преобразования апертурной функции  $H$ -фрактальной решетки. При расчете дифракционная картина рассматривалась как «сумма» дифракционных картин, создаваемых элементами каждого уровня (порядка итерации)  $H$ -фрактальной решетки в отдельности. Такой способ позволил оценить вклад элементов решетки, построенных на каждом порядке итерации, в общую дифракционную картину. Фурье-образ для элементов  $k$ -го порядка, согласно [10], имеет вид

$$G_k(q_x, q_y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sin(q_x \frac{a}{2^n})}{q_x \frac{a}{2^n}} \frac{\sin(q_y \frac{w}{2})}{q_y \frac{w}{2}} \times \\ \times \frac{\sin(q_x a)}{\sin(q_x a / 2^{n-1})} \frac{\sin(q_y a)}{\sin(q_y a / 2^{n-1})}, & k = 2n - 1, \\ \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sin(q_x \frac{w}{2})}{q_x \frac{w}{2}} \frac{\sin(q_y \frac{a}{2^n})}{q_y \frac{a}{2^n}} \times \\ \times \frac{\sin(q_x a)}{\sin(q_x a / 2^n)} \frac{\sin(q_y a)}{\sin(q_y a / 2^{n-1})}, & k = 2n, \end{cases}$$

где  $q_x$  и  $q_y$  — пространственные частоты по соответствующим осям,  $n$  — натуральное число. Просуммировав распределения амплитуд по всем уровням решетки (в данном случае от 1 до 15), получаем распределение амплитуд от всей решетки в целом.

Результаты теоретических расчетов хорошо согласуются с экспериментально полученной дифракционной картиной (рис. 5). Как видно из рис. 5, дифракционная картина является масштабно инвариантной, или самоподобной (причем коэффициент подобия равен 2), и неперiodической. Воспользовавшись описанным выше степенным законом  $I(q) \propto q^{-D}$  и рассчитав зависимость  $I(q)$ , ученые

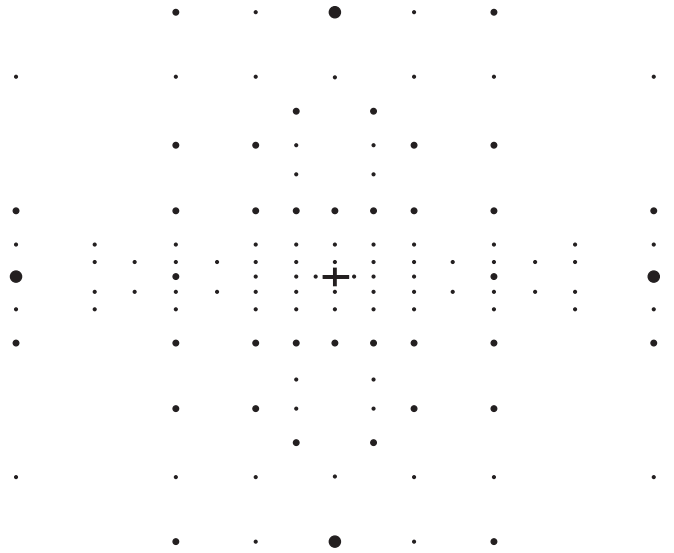


Рис. 4. Теоретически рассчитанная дифракционная картина

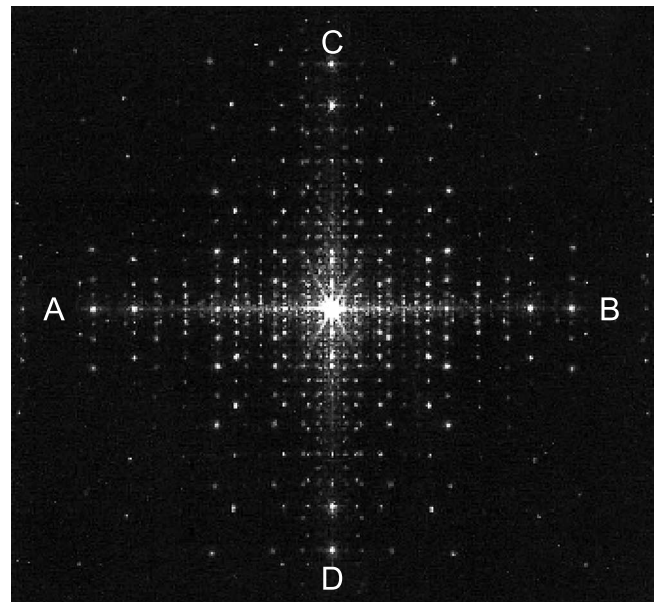


Рис. 5. Экспериментальная дифракционная картина

получили значение  $D = 2$ , что совпадает с теоретической размерностью  $H$ -фрактала.

Анализируя описанные эксперименты, можно сделать несколько важных выводов. Во-первых, наличие свойства самоподобия у фрактальной решетки приводит к образованию масштабно инвариантной дифракционной картины. Причем «коэффициенты самоподобия» решетки и картины совпадают. Во-вторых, распределение интенсивности на дифракционной картине от фрактальных решеток, так же как и от обычных периодических решеток, может быть рассчитано с использованием фурье-преобразования апертурной функции решетки. В-третьих, распределение интенсивности  $I$  в зависимости от пространственной частоты  $q$  определяется степен-

ным законом  $I(q) \propto q^{-D}$ , где  $D$  — фрактальная размерность решетки. А значит, анализируя дифракционную картину, можно определить размерность  $D$  фрактала, по которому построена дифракционная решетка.

Однако на практике далеко не все фракталы являются детерминированными, т. е. созданными с помощью строго определенных правил. Физические объекты, которые на первый взгляд кажутся самоподобными, в действительности зачастую обладают лишь приближенным или статистическим самоподобием. Такие объекты иногда называют физическими фракталами. Для них не является приемлемой модель детерминированного фрактала, они гораздо лучше моделируются случайными фракталами, порождаемыми стохастическими процессами. Физические фракталы также характеризуются некоторым значением фрактальной размерности, для измерения которой может в частности использоваться описанный дифракционный метод. Он обобщается на применение к произвольным одномерным и двумерным случайным фракталам. Так, например, изучение дифракционных картин от коллоидных или пористых структур может выявить их фрактальное строение и таким образом дать ключ к объяснению их физических свойств [11]. Еще одним аспектом применения данного метода может стать проектирование отражательных фазовых решеток с интенсивным рассеиванием фазовой энергии в широких частотных диапазонах [12]. Эти диапазоны можно

еще больше расширить, если использовать при их проектировании самоподобие, в результате чего получаются фрактальные дифракционные решетки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00146).

### Литература

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Ижевск, 2001.
2. Федер Е. Фракталы. М., 1991.
3. Яновский В.В. // Universitates. 2003. No. 3. (www.universitates.kharkov.ua/arhiv/2003\_3/janovskij.doc)
4. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Москва; Ижевск, 2004.
5. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: топология выборки. М., 2005.
6. Allain C., Cloitre M. // Phys. Rev. 1986. **В 33**. P. 3566.
7. Аллен К., Клуатр М. // Фракталы в физике. М., 1988. С. 91.
8. Стюард И. Г. Введение в Фурье-оптику. М., 1985.
9. Применение методов Фурье-оптики / Под ред. Г. Старка. М., 1988.
10. Bo Hou, Gu Xu, Weija Wen, George K.L. Wong. // Appl. Phys. Lett. 2004. **85**. P. 6125.
11. Аллен К., Клуатр М. // Фракталы в физике. М., 1988. С. 395.
12. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск, 2005.

Поступила в редакцию  
02.04.2007