УДК 530.145

ДИНАМИКА ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ТЕОРИИ С НАРУШЕННОЙ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТЬЮ

А. Е. Лобанов, Е. М. Мурчикова

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: lobanov@phys.msu.ru

Получены решения уравнения Дирака для частиц, взаимодействующих с векторным, аксиально-векторным и тензорным конденсатами в рамках расширенной стандартной модели. Рассмотрен вопрос о применимости этих решений для описания поведения нейтрино в плотной среде и электромагнитном поле.

В настоящее время считается, что стандартная модель элементарных частиц является низкоэнергетическим пределом более фундаментальной теории, объединяющей все известные физические взаимодействия. Поэтому весьма актуальным представляется исследование эффектов, которые не могут быть описаны в рамках стандартной модели. Один из таких возможных эффектов — нарушение лоренц-инвариантности, которое следует при определенных допущениях из теории струн [1, 2].

На текущий момент наиболее разумным для изучения такого рода эффектов представляется подход, получивший название «расширенная стандартная модель» [3–5].

Основная идея данного подхода — включение в лагранжиан стандартной модели членов, которые феноменологически описывают взаимодействие с вакуумными конденсатами или внешними полями и формально нарушают лоренц-инвариантность теории. Известно, что наличие таких членов в лагранжиане может открывать каналы реакций, которые в обычном подходе закрыты [6]. Причем установить это возможно только при расчетах в картине Фарри, позволяющей точно учитывать влияние внешних полей или вакуумных конденсатов. Вследствие этого принципиальное значение приобретает нахождение точных решений уравнений, следующих из данной модели.

Задача о решении уравнений, отвечающих полному лагранжиану расширенной стандартной модели [4], крайне сложна. Поэтому в настоящей работе рассматриваются решения уравнения Дирака в теории, учитывающей влияние только тензорного, векторного и аксиально-векторного конденсатов на фермионы. В этом случае уравнение Дирака может быть записано в виде

$$\left(i\hat{\partial} - \hat{a} - \hat{b}\gamma^5 - \frac{i}{2}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - m\right)\Psi = 0. \qquad (1)$$

Здесь $F^{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор, а a^μ, b^μ — 4-векторы, описывающие взаимодействие с указанными конденсатами; $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$.

Будем считать $F^{\mu\nu}$, a^μ и b^μ постоянными величинами, что обычно и делается при исследовании процессов в расширенной стандартной модели. В этом случае операторы канонического импульса частицы $i\partial^\mu$ являются интегралами движения и могут служить для классификации решений. Однако физическому смыслу задачи в большей степени соответствуют решения, которые определяются заданием кинетического импульса. Именно такие решения и будут рассмотрены в настоящей статье. Надо отметить, что в случае наличия только тензора $F^{\mu\nu}$ искомые решения были получены в работе [7], а при наличии 4-вектора b^μ — в работе [8].

Следуя методике указанных работ, будем искать решения уравнения (1) в виде

$$\Psi(x) = e^{-iF(x)}U(\tau(x), \tau_0 = 0)\Psi_0(x). \qquad (2)$$

В этой формуле $U(\tau, \tau_0)$ — резольвента классического уравнения эволюции спина (уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди [9]) в биспинорном представлении [7, 10], $e^{-iF(x)}$ — некоторый фазовый множитель, а

$$\Psi_0(x) = e^{-iqx}(\hat{q} + m)(1 - \gamma^5\hat{S}_0)\psi_0 \qquad (3)$$

— решение уравнения Дирака для свободной частицы (ψ_0 — произвольный постоянный биспинор, нормированный таким образом, что $\bar{\Psi}_0(x)\Psi_0(x) = m/q_0$).

Резольвента $U(\tau, \tau_0)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\dot{U}(\tau, \tau_0) = \\ = \left\{\frac{i}{2m}\gamma^5(\hat{b}\hat{q} - \hat{q}\hat{b}) + \frac{i}{m^2}\gamma^5 H^{\mu\nu}q_\nu\gamma_\mu\hat{q}\right\}U(\tau, \tau_0), \qquad (4)$$

где $H^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}e^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$ — тензор, дуальный тензору $F^{\mu\nu}$, а точка обозначает дифференцирование по собственному времени τ. В формулах (3), (4) q^μ — постоянный 4-вектор, обладающий свойством $q^2 = m^2$, в силу которого его можно интерпретировать как кинетический импульс частицы. Очевидно, что решение уравнения (4) представляет собой матричную экспоненту

$$U(\tau,\tau_0)=\exp\Bigg\{i(\tau-\tau_0)\times \\ \times\left[\frac{1}{2m}\gamma^5(\hat b\hat q-\hat q\hat b)+\gamma^5\frac{H^{\mu\nu}}{m^2}q_\nu\gamma_\mu\hat q\right]\Bigg\}. \quad (5)$$

Подстановка выражения (2) в уравнение (1) с учетом (4) приводит к соотношению

$$\Bigg\{\hat q+\hat\partial F(x)-\hat a+\gamma^5\hat b+ \\ +\gamma^5\hat N\left[\frac{1}{2m}(\hat b\hat q-\hat q\hat b)+\frac{1}{m^2}H^{\mu\nu}q_\nu\gamma_\mu\hat q\right]- \\ -\frac{i}{2}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}-m\Bigg\}e^{-iF(x)}U(\tau(x),\tau_0)\Psi_0(x)=0,$$

где $N^\mu=\partial^\mu\tau$. Так как матрица $U(\tau(x),\tau_0)$ невырождена и, очевидно, $[U(\tau(x),\tau_0),\hat q]=0$, то для выполнения этого соотношения необходимо выполнение условия

$$\hat\partial F(x)-\hat a+\gamma^5\hat b+ \\ +\gamma^5\hat N\left[\frac{1}{2m}(\hat b\hat q-\hat q\hat b)+\frac{1}{m^2}H^{\mu\nu}q_\nu\gamma_\mu\hat q\right]-\frac{i}{2}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}=0.$$

Приравняв к нулю коэффициенты при линейно независимых элементах алгебры матриц Дирака, получаем

$$\partial^\mu F(x)=a^\mu$$

и систему уравнений для определения вектора N^μ

$$\begin{gathered}\varphi^\mu(m-(Nq))+(N\varphi)q^\mu=0,\\ F^{\mu\alpha}q_\alpha=-e^{\mu\nu\rho\lambda}N_\nu\varphi_\rho q_\lambda,\end{gathered} \quad (6)$$

где $\varphi^\mu=b^\mu+H^{\mu\nu}q_\nu/m$.

Нетрудно убедиться, что для совместности этой системы необходимо, чтобы

$$q_\mu F^{\mu\nu}H_{\nu\alpha}q^\alpha+mq_\mu F^{\mu\nu}b_\nu=0. \quad (7)$$

Так как q^μ принимает, вообще говоря, произвольные значения, то, для того чтобы (7) выполнялось тождественно, необходимо потребовать выполнения условий

$$F^{\mu\alpha}H_{\alpha\nu}\equiv-\frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}=0,\quad F^{\mu\nu}b_\nu=0. \quad (8)$$

Следовательно, решение уравнения (1) может иметь вид (2) только в том случае, если тензор $F^{\mu\nu}$ — плоский, т. е. его второй инвариант $I_2=\frac{1}{4}F^{\mu\nu}H_{\mu\nu}$ равен нулю, а вектор b^μ является его собственным вектором, отвечающим нулевому собственному значению*).

*) Следует отметить, что наличие у антисимметричного тензора собственного вектора, отвечающего нулевому собственному значению, возможно тогда и только тогда, когда этот тензор плоский.

Для нахождения N^μ разложим входящие в уравнения (6) векторы по ортогональному базису в пространстве Минковского:

$$n_0^\mu=q^\mu/m,\quad n_1^\mu=\frac{H^{\mu\nu}q_\nu}{\sqrt{\mathcal N}},\quad n_2^\mu=\frac{F^{\mu\nu}q_\nu}{\sqrt{\tilde{\mathcal N}}},\\ n_3^\mu=\frac{m^2H^{\mu\nu}H_{\nu\alpha}q^\alpha-q^\mu\mathcal N}{m\sqrt{\mathcal N\tilde{\mathcal N}}}$$

и воспользуемся соотношениями*)

$$(\varphi q)H^{\mu\nu}=m(\varphi^\mu b^\nu-b^\mu\varphi^\nu),\quad \mathcal N-\tilde{\mathcal N}=2m^2I_1,\\ \left((b\varphi)^2-b^2\varphi^2\right)m^2=\left(b^2\mathcal N+(b_\mu H^{\mu\nu}q_\nu)^2\right)=2(\varphi q)^2I_1. \quad (9)$$

Здесь $\mathcal N=q_\mu H^{\mu\nu}H_{\nu\rho}q^\rho$, $\tilde{\mathcal N}=q_\mu F^{\mu\nu}F_{\nu\rho}q^\rho$, а $I_1==\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ — первый инвариант тензора $F^{\mu\nu}$.

В результате получаем

$$N^\mu=-q^\mu\frac{m(b\varphi)}{(\varphi q)^2-m^2\varphi^2}+b^\mu\frac{m}{(\varphi q)}+ \\ +\varphi^\mu\frac{m^3(b\varphi)}{(\varphi q)\left((\varphi q)^2-m^2\varphi^2\right)}. \quad (10)$$

Поскольку $a^\mu,N^\mu=\mathrm{const}$, то

$$\tau=(Nx),\quad F(x)=(ax). \quad (11)$$

Подставляя (11) в формулу (5), нетрудно убедиться, что выражение для волновой функции принимает вид

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}\sum_{\zeta=\pm1}e^{-i(Px)}(1-\zeta\gamma^5\hat S_{tp})(\hat q+m)(1-\gamma^5\hat S_0)\psi_0, \quad (12)$$

где

$$S^\mu_{tp}=\frac{q^\mu(\varphi q)/m-\varphi^\mu m}{\sqrt{(\varphi q)^2-\varphi^2m^2}}, \quad (13)$$

$$P^\mu=q^\mu\left(1+\zeta\frac{(b\varphi)}{\sqrt{(\varphi q)^2-m^2\varphi^2}}\right)+ \\ +a^\mu-b^\mu\frac{\zeta\sqrt{(\varphi q)^2-m^2\varphi^2}}{(\varphi q)}-\varphi^\mu\frac{\zeta(b\varphi)m^2}{(\varphi q)\sqrt{(\varphi q)^2-m^2\varphi^2}}.$$

Полученные решения являются стационарными только тогда, когда $S_0^\mu=S^\mu_{tp}$. В этом случае волновые функции являются собственными функциями оператора проекции спина на направление S^μ_{tp} с собственными значениями $\zeta=\pm1$ и оператора

*) Для произвольного антисимметричного тензора $A^{\mu\nu}$, дуального ему тензора ${}^*A^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}e^{\mu\nu\rho\lambda}A_{\rho\lambda}$ и любых 4-векторов g^μ, h^μ, $(gh)\neq0$ имеет место соотношение

$$A^{\mu\nu}(gh)=-\left[g^\mu A^{\nu\rho}h_\rho-A^{\mu\rho}h_\rho g^\nu\right]+{}^*\left[h^\mu{}^*A^{\nu\rho}g_\rho-{}^*A^{\mu\rho}g_\rho h^\nu\right], \quad (\mathrm{A})$$

из которого следует, что

$$g_\mu{}^*A^\mu_\rho{}^*A^\rho_\nu g^\nu h^2+\left(g_\mu{}^*A^\mu_\nu h^\nu\right)^2-h_\mu A^\mu_\rho A^\rho_\nu h^\nu g^2-\left(g_\mu A^\mu_\nu h^\nu\right)^2= \\ =g_\mu{}^*A^\mu_\rho{}^*A^\rho_\nu h^\nu(gh)-g_\mu A^\mu_\rho A^\rho_\nu h^\nu(gh)=2(gh)^2I_1. \quad (\mathrm{B})$$

Отсюда при выполнении условий (8) вытекают формулы (9).

канонического импульса $i\partial^\mu$ с собственными значениями P^μ. Причем ортонормированная система решений уравнения (1) может быть записана следующим образом:

$$\Psi_\zeta(x) = e^{-i(Px)}\sqrt{|J|}(\hat{q}+m)(1-\zeta\gamma^5\hat{S}_{tp})\psi_0, \qquad (14)$$

где J — якобиан перехода от переменных q^μ к переменным P^μ:

$$J = \det(M_{ij}) = \det\left[\frac{\partial P^i}{\partial q^j} + \frac{\partial P^i}{\partial q^0}\frac{\partial q^0}{\partial q^j}\right].$$

Используя формулы (9), матрицу M_{ij} можно представить в виде

$$M_{ij} = \delta_{ij}\left(1+\zeta\frac{(b\varphi)}{\sqrt{(\varphi q)^2 - m^2\varphi^2}}\right) + \zeta\left(q_i - \varphi_i\frac{m^2}{(\varphi q)}\right)\times \\ \times\left(\varphi_j - q_j\frac{\varphi^0}{q^0}\right)\frac{m^2(b\varphi)^2 + b^2(\varphi q)^2 - m^2 b^2\varphi^2}{(\varphi q)\left((\varphi q)^2 - m^2\varphi^2\right)^{3/2}}.$$

Поскольку для любых векторов $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ выполняется соотношение

$$\det(\delta_{ij} + g_i h_j) = 1 + (\boldsymbol{gh}),$$

то

$$J = \left(1+\zeta\frac{(b\varphi)}{\sqrt{(\varphi q)^2 - m^2\varphi^2}}\right)^2 \times \\ \times\left(1+\zeta\frac{b_\mu H^{\mu\nu}q_\nu/m - 2I_1}{\sqrt{(\varphi q)^2 - m^2\varphi^2}}\right).$$

Структура решения (14) указывает на то, что частицы, находящиеся в конденсатах, удовлетворяющих условию (8), ведут себя как свободные, т. е. движутся с постоянной скоростью и сохраняют знак своей поляризации. Однако при их взаимодействии с другими частицами могут открываться каналы реакций, которые для свободных частиц закрыты. Этот факт следует из вида закона дисперсии, определяющего связь энергии частиц с ее каноническим импульсом.

Если ввести обозначения

$$\tilde{P}^\mu = P^\mu - a^\mu, \quad \tilde{\Phi}^\mu = b^\mu + H^{\mu\nu}\tilde{P}_\nu/m,$$

то, используя представление (13) для P^μ и соотношения

$$(\tilde{P}b) = (\varphi q)\left(1+\zeta\frac{b_\mu H^{\mu\nu}q_\nu/m - 2I_1}{\sqrt{(\varphi q)^2 - m^2\varphi^2}}\right),$$
$$(\tilde{P}b)(b\varphi) = (\varphi q)(b\tilde{\Phi}), \quad \tilde{\Phi}^2(\varphi q)^2 = \varphi^2(\tilde{\Phi}\tilde{P})^2,$$

вытекающие из формул (A), (B) (см. сноску на с. 12), закон дисперсии можно записать в следующей форме:

$$\tilde{P}^2 = m^2 - b^2 - 2I_1 - 2\zeta\Delta\sqrt{(\tilde{P}\tilde{\Phi})^2 - \tilde{\Phi}^2 m^2}. \qquad (15)$$

Здесь

$$\Delta = \operatorname{sign}\left(1+\zeta\frac{b_\mu H^{\mu\nu}q_\nu/m - 2I_1}{\sqrt{(\varphi q)^2 - m^2\varphi^2}}\right).$$

Появление фактора Δ в уравнении (15) связано с тем, что ζ задает проекцию спина частицы на направление, определяемое кинетическим импульсом частицы, а не каноническим.

В заключение отметим, что уравнение (1) имеет еще одну интерпретацию: оно описывает поведение массивного дираковского нейтрино в плотной среде в присутствии сильного электромагнитного поля [11–14]. В этом случае входящие в (1) величины имеют следующий физический смысл:

$$F^{\mu\nu} \Rightarrow \mu_0 F^{\mu\nu},$$

где μ_0 — аномальный магнитный момент частицы, а $F^{\mu\nu}$ — тензор внешнего электромагнитного поля;

$$a^\mu = b^\mu \Rightarrow f^\mu/2,$$

где $f^\mu = \sum_f \rho_f^{(1)} j_f^\mu + \rho_f^{(2)}\lambda_f^\mu$ представляет собой линейную комбинацию 4-векторов токов (j_f^μ) и поляризаций (λ_f^μ) фермионов среды; суммирование производится по всем фермионам среды, а коэффициенты $\rho_f^{(1,2)}$ определяются выбранной моделью взаимодействий. В стандартной модели эти коэффициенты, вычисленные в первом приближении, имеют вид [11–14]

$$\rho_f^{(1)} = \sqrt{2}G_F\left\{I_{e\upsilon} + T_3^{(f)} - 2Q^{(f)}\sin^2\theta_W\right\},$$
$$\rho_f^{(2)} = \sqrt{2}G_F\left\{I_{e\upsilon} + T_3^{(f)}\right\},$$

где $Q^{(f)}$ — электрический заряд фермионов среды, $T_3^{(f)}$ — третья компонента слабого изоспина, $I_{e\upsilon} = \pm 1$ для взаимодействия электронного нейтрино с электронами или позитронами, $I_{e\upsilon} = 0$ в остальных случаях, G_F — константа Ферми, θ_W — угол Вайнберга.

Таким образом, массивное нейтрино в плотной среде, движущейся с постоянной скоростью и имеющей постоянную поляризацию ($f^\mu = \mathrm{const}$) в присутствии сильного электромагнитного поля может вести себя как свободное. При этом условие (8), которое в явном виде ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей соответственно) выглядит как

$$(\boldsymbol{Ef}) = 0, \quad \boldsymbol{E}f^0 - [\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{f}] = 0,$$

является прямым следствием того факта, что средние скорость и поляризация частиц среды во внешнем поле должны подчиняться уравнениям Лоренца и Баргмана–Мишеля–Телегди.

Авторы благодарны А. В. Борисову и В. Ч. Жуковскому за обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы Президента РФ «Ведущие научные школы» (грант НШ-5332.2006.2).

Литература

1. *Kostelecký V.A., Potting R.* // Nucl. Phys. B. 1991. **359**. P. 545; Phys. Lett. B. 1996. **381**. P. 89.
2. *Kostelecký V.A., Samuel S.* // Phys. Rev. D. 1989. **39**. P. 683.
3. *Carroll S.M., Field G.B., Jackiw R.* // Phys. Rev. D. 1990. **41**. P. 1231.
4. *Colladay D., Kostelecký V.A.* // Phys. Rev. D. 1997. **55**. P. 6760; Phys. Rev. D. 1998. **58**. P. 11602.
5. *Coleman S., Glashow S.L.* // Phys. Rev. D. 1999. **59**. P. 116008.
6. *Zhukovsky V.Ch., Lobanov A.E., Murchikova E.M.* // Phys. Rev. D. 2006. **73**. P. 065016.
7. *Лобанов А.Е., Павлова О.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1999. N 4. P. 1).
8. *Lobanov A.E.* // Phys. Lett. B. 2005. **619**. P. 136.
9. *Bargmann V., Michel L., Telegdi V.* // Phys. Rev. Lett. 1959. **2**. P. 435.
10. *Lobanov A.E.* // J. Phys. A. 2006. **39**. P. 7517.
11. *Pal P.B., Pham T.N.* // Phys. Rev. D. 1989. **40**. P. 259.
12. *Nieves J.F.* // Phys. Rev. D. 1989. **40**. P. 866.
13. *Nötzold D., Raffelt G.* // Nucl. Phys. B. 1988. **307**. P. 924.
14. *Pantaleone J.* // Phys. Lett. B. 1991. **268**. P. 227.

Поступила в редакцию
30.05.2007