УДК 536-12, 514.84, 531.5

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ, НАРУШЕНИЕ ЧЕТНОСТИ И ГРАВИТАЦИЯ В ОБОБЩЕННОЙ КВАНТОВОЙ И КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ

В. В. Асадов, О. В. Кечкин

(*НИИЯФ*)

E-mail: kechkin@depni.npi.msu.su

Представлены результаты изучения квантовой механики со стационарным неэрмитовым гамильтонианом и комплексным параметром эволюции, а также ее классического предела, обладающего нетривиальными корреляциями. Показано, что соответствующая динамика необратима для изотермического и адиабатического режимов квантовой и классической эволюции. Установлена возможность универсальной связи между необратимостью и динамическим нарушением четности в системе. Продемонстрирован механизм генерации гравитации распределением корреляций в свободной теории.

Введение

Второй закон термодинамики выделяет преимущественное направление в эволюции реальных физических систем. В одной из своих формулировок он утверждает, что с течением времени энтропия любой замкнутой макроскопической системы не может убывать [1]. В рамках статистической механики возникающая стрела времени объясняется переходом системы из менее вероятного в более вероятное состояние [2]. Проблема, однако, заключается в обратимости уравнений стандартной микроскопической динамики, усреднением по которой и должны получаться все необратимые макроскопические закономерности [3].

Для решения этой и ряда других задач мы предлагаем включить стрелу времени в динамику уже на микроскопическом уровне, объединив квантовую и статистическую механики в единую теоретическую конструкцию. Дополнительным аргументом в пользу этого шага может служить имеющаяся статистическая структура квантовой теории как таковой [4]. Классический предел объединенной теории должен тогда отвечать за необратимые процессы, наблюдаемые в макромире, т. е. в конечном счете и за «обычную» термодинамику.

1. Квантовая динамика со стрелой времени

Обозначим через $|\Psi\rangle$, τ и $\mathcal{H}$ вектор состояния, комплексный параметр эволюции и неэрмитов гамильтониан обобщенной квантовой системы. Уравнение Шрёдингера и условие аналитичности

$$i\hbar|\Psi\rangle_{,\tau}=\mathcal{H}|\Psi\rangle, \quad |\Psi\rangle_{,\tau^*}=0 \tag{1}$$

(где «*» — комплексное сопряжение) постулируем в качестве основных динамических соотношений теории. Обобщенное условие стационарности зададим в виде $\mathcal{H}_{,\tau}=\mathcal{H}_{,\tau^*}=0$ и наложим дополнительное ограничение

$$[\mathcal{H},\, \mathcal{H}^+]=0, \tag{2}$$

естественное в рамках приводимой далее физической интерпретации данной общетеоретической схемы.

Общее решение уравнений (1), (2) можно записать в виде суперпозиции $|\Psi\rangle=\sum_n C_n|\Psi_n\rangle$ базисных состояний $|\Psi_n\rangle=|\Psi_n(\tau)\rangle$, собственных для коммутирующих операторов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^+$, с комплексными коэффициентами $C_n=\mathrm{const}$ (здесь n — мультииндекс). Представим параметр эволюции и гамильтониан теории в терминах вещественных переменных t и β и эрмитовых операторов E и Γ следующим образом:

$$\tau=t-i\frac{\hbar}{2}\beta, \quad \mathcal{H}=E-i\frac{\hbar}{2}\Gamma. \tag{3}$$

Тогда для вероятности P_n обнаружения системы, находящейся в состоянии $|\Psi\rangle$, в базисном состоянии $|\Psi_n\rangle$, получим

$$P_n=\frac{w_n}{\mathcal{Z}}. \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{Z}=\sum_n w_n$ — статистическая сумма, связанная с данным квантовым состоянием, в которой

$$w_n=\rho_n\exp[-(E_n\beta+\Gamma_n t)], \tag{5}$$

E_n и Γ_n — собственные значения коммутирующих в силу (2) операторов E и Γ, и $\rho_n=|C_n|^2$. Ясно, что под t и E_n естественно понимать «обычные» время и уровни энергии рассматриваемой системы. Тогда β интерпретируется как обратная абсолютная температура T ($\beta=1/kT$, где k — постоянная Больцмана), а величины Γ_n определяют «времена жизни» системы в базисных состояниях, характеризуемых вероятностями P_n (см. (4), (5)). Далее E и Γ мы называем операторами энергии и распада системы.

Последним элементом общей схемы является задание температурного режима $\beta = \beta(t)$, фиксирующего тип термодинамической эволюции. Естественные примеры даются изотермическим $\beta = \text{const}$ и адиабатическим $\overline{E} = \text{const}$ режимами. При этом среднее значение $\overline{E}$ энергии E определяется как $\overline{E} = \langle\Psi|E|\Psi\rangle/\langle\Psi|\Psi\rangle$. Очевидно, что $\overline{E} = \overline{E}(t, \beta)$, так что условие адиабатичности действительно определяет соответствующую температурную кривую.

Далее для полной производной по времени от величины $\overline{\Gamma}$ в изотермическом и адиабатическом режимах соответственно получаем

$$\frac{d\overline{\Gamma}}{dt} = -D_\Gamma^2, \quad \frac{d\overline{\Gamma}}{dt} = -D_\Gamma^2\left[1 - \frac{(\overline{E\Gamma} - \overline{E}\,\overline{\Gamma})^2}{D_E^2 D_\Gamma^2}\right], \qquad (6)$$

где $D_\Gamma^2 = \overline{(\Gamma - \overline{\Gamma})^2}$ и $D_E^2 = \overline{(E - \overline{E})^2}$ — квадраты дисперсии операторов Γ и E в состоянии Ψ. В обоих случаях $d\overline{\Gamma}(t)/dt \leqslant 0$, причем для адиабатической эволюции это следует из неравнества Коши–Буняковского, делающего неотрицательным выражение в квадратной скобке во втором из соотношений (6).

Тем самым в указанных режимах эволюции $\overline{\Gamma}(t)$ не возрастает при любых начальных условиях. Это означает наличие в изучаемой динамике хорошо определенной стрелы времени, направленной на аттрактор с минимальным значением оператора Γ (согласующийся с данным режимом и начальными условиями). При этом понятие температуры с необходимостью обобщается здесь на неравновесные состояния системы.

2. Динамическое нарушение четности

Наиболее интересным является выбор оператора распада пропорциональным оператору четности системы. В простейшем двухкомпонентном случае $\Gamma = \gamma\sigma_3$, где σ_3 — соответствующая матрица Паули, а γ — положительная (для определенности) постоянная. Вектор состояния $|\Psi\rangle$ имеет здесь вид $|\Psi\rangle = |\Psi_+\rangle + |\Psi_-\rangle$, где $|\Psi_\pm\rangle$ — собственные векторы оператора Γ с собственными значениями $\pm\gamma$. Их интерпретация может быть связана с левыми и правыми состояниями, с частицами и античастицами и, вообще, с любыми другими реализациями данной дискретной группы симметрий.

Анализ соответствующей динамики позволяет установить, что на временных асимптотиках система с необходимостью является поляризованной. Действительно, имеет место следующее утверждение:

$$\lim_{t\to\pm\infty} \overline{\Gamma}(t) = \mp\gamma, \qquad (7)$$

т. е. система совершает переход из «$+$»-состояния в «$-$»-состояние независимо от того, каким является распределение соответствующих вероятностей в начальный момент времени $t = 0$. Единственное ограничение на температурный режим, которое делается при выводе формулы (7), состоит в требовании существования асимптотических значений обратной температуры, т. е. величин $\beta_\pm = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \beta(t)$. Любопытно отметить, что в частном случае равновероятного распределения «четных» $|\Psi_{+n}\rangle$ и «нечетных» $|\Psi_{-n}\rangle$ состояний с одинаковыми значениями энергии E_n в начальный момент времени (т. е. при $P_{+n}(0) = P_{-n}(0)$) функция $\overline{\Gamma}(t)$ имеет вид кинка

$$\overline{\Gamma} = -\gamma \,\text{th}\, \gamma t.$$

Представленная схема динамического нарушения четности может быть использована для объяснения факта асимметрии между правым и левым в нейтринной физике, а также барионной асимметрии во Вселенной.

3. Классическая динамика со стрелой времени

Определим классическую динамику как предел квантовой при $\hbar \to 0$. Представляя фазу S волновой функции $\Psi = \exp(iS/\hbar)$ в виде

$$S = S_1 + \frac{i\hbar}{2} S_2, \qquad (8)$$

для следующей из (1) модифицированной системы классических уравнений Гамильтона–Якоби получим

$$\begin{aligned} &S_{1,t} = -E, && S_{1,\beta} = 0, \\ &S_{e,t} + E_{,p^T} S_{e,q} = \Gamma_*, && S_{e,\beta} = 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

В ней $S_e = S_2 - \beta E$ — величина энтропийного типа, $\Gamma_* = \Gamma + \text{tr}(E_{,pp^T} S_{1,qq^T})$, а q и p — столбцы канонических координат и импульсов. Предполагается, что $E = T(p) + V(q)$; после выполнения дифференцирований во всех динамических переменных должна быть сделана подстановка $p \to S_{1,q}$.

Утверждение состоит в том, что в силу (9) классическая величина $\overline{\Gamma} = \int dq\, \rho\Gamma$ (где $\rho = \exp(-S_2)/\mathcal{Z}$ — плотность вероятности, $\mathcal{Z} = \int dq \exp(-S_2)$) удовлетворяет тем же соотношениям (6), что и ее квантовый аналог. Таким образом, классическая динамика также является необратимой в изотермическом и адиабатическом режимах эволюции. Результат имеет место в естественном (см. (2)) предположении о равенстве нулю классической скобки Пуассона $\{E, \Gamma\}$ и при условии достаточно быстрого убывания плотности вероятности на координатной бесконечности (подразумеваемом для локализованного классического объекта).

Мы отождествляем максимум плотности вероятности с классическим положением рассматриваемого объекта. Модифицированные уравнения Гамильтона, полученные при учете системы (9), имеют следующий вид

$$\begin{aligned} &q_{,t} = E_{,p} - A_2^{-1}\Gamma_{*;q}, && q_{,\beta} = -A_2^{-1} E_{;q}, \\ &p_{,t} = -E_{,q} - A_1 A_2^{-1}\Gamma_{*;q}, && p_{,\beta} = -A_1 A_2^{-1} E_{;q}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Здесь «$;q$» — полная производная по столбцу q, матричные же величины определяются как $A_1 = S_{1,qq^T}$ и $A_2 = S_{2,qq^T}$. Система уравнений (10) и температурный режим $\beta = \beta(t)$ определяют полные производные классических координат и импульсов по времени (как $d/dt = \partial_t + \dot\beta\,\partial_\beta$, где $\dot\beta = d\beta/dt$).

Отметим, что уравнения (10) переходят в стандартные уравнения Гамильтона при $A_2^{-1} \to 0$. Этот предел соответствует абсолютной локализации объекта на его классической траектории $q = q(t)$. Действительно, раскладывая $S_2(q)$ в ряд с центром в $q(t)$, учитывая необходимое условие экстремума $dS_2(q(t)) = 0$ и тот факт, что $d^2S_2(q(t)) = dq^T\,A_2\,dq$, для плотности вероятности в данном пределе получаем $\rho = \delta(q - q(t))$.

Определяя далее корреляцию $A \circ B$ величин A и B как $\overline{AB + BA} - 2\overline{A}\,\overline{B}$, получаем

$$q_k \circ q_l \approx (A_2^{-1})_{kl}, \quad p_k \circ q_l \approx (A_1 A_2^{-1})_{kl},$$
$$p_k \circ p_l \approx (A_1 A_2^{-1} A_1)_{kl},$$

причем эти равенства становятся точными в пределе $A_2^{-1} \to 0$. Тем самым модификация уравнений Гамильтона оказывается связанной с включением в них нетривиальных корреляций канонических координат и импульсов, т. е. с нелокальной в вероятностном смысле структурой фазового пространства данного варианта классической теории.

4. Релятивизм и эффективная гравитация

Простейшая четырехмерная релятивистская квантовая теория получается при выборе $E = g_{(0)}^{\mu\nu} p_\mu p_\nu / 2m$, где $g_{(0)\mu\nu}$ — метрика Минковского с сигнатурой $+---$, $p_\mu = i\hbar\,\partial_\mu$ — оператор импульса, и m — параметр размерности массы. В этой теории t и x^0 — кинематически независимые «термодинамическое» и «геометрическое» времена. В случае $\Gamma = 0$ классические уравнения Гамильтона имеют здесь следующий вид:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{m}\Big\{ g_{(0)}^{\mu\nu} p_\nu - - g_{(0)}^{\nu\lambda}\Big[\big(A_2^{-1}\big)^{\mu\sigma} S_{1,\sigma\nu\lambda} + \dot\beta\big(A_2^{-1}A_1\big)^\mu_{\ \nu} p_\lambda \Big]\Big\},$$
$$\frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{1}{m} g_{(0)}^{\nu\lambda}\Big[\big(A_1 A_2^{-1}\big)^\sigma_{\ \mu} S_{1,\sigma\nu\lambda} + \dot\beta\big(A_1 A_2^{-1} A_1\big)_{\mu\nu} p_\lambda \Big]. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что при отсутствии корреляций мировые линии становятся прямыми, причем получающееся соотношение $p_\mu = g_{(0)\mu\nu} m\,dx^\nu/dt$ позволяет отождествить термодинамическое время t с собственным временем движущейся частицы с массой m.

Сравним далее систему (11) с уравнениями геодезической для аналогичной частицы, движущейся в гравитационном поле с метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{m} g^{\mu\nu} p_\nu, \quad \frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{1}{2m} g^{\nu\lambda}_\mu p_\nu p_\lambda. \tag{12}$$

Рассматривая случай малых корреляций (т. е. хорошо определенной локализации частицы) и слабой гравитации ($g_{\mu\nu} = g_{(0)\mu\nu} + g_{(1)\mu\nu}$, где $g_{(1)\mu\nu} \to 0$), удается выразить возмущения метрики в (12) через корреляционные коэффициенты из (11). Определяется также класс температурных режимов, совместный с получающейся эффективной римановой геометрией. Так, в начальной системе покоя частицы гравитационный потенциал $g_{(1)00}$ дается следующим выражением:

$$g_{(1)\,00} = \big(A_2^{-1}\big)^{0\mu}\left[\frac{1}{mc} g_{(0)}^{\nu\lambda} S_{1,\mu\nu\lambda} + \dot\beta (A_1)_{\mu 0}\right],$$

где c — скорость света. Тем самым неопределенность в положении и импульсе, характеризуемая их нетривиальными корреляциями, воспринимается наблюдателем как гравитационное поле, действующее на рассматриваемую частицу.

Гравитационные аспекты квантовой динамики с классическим пределом изучались также в [5], а римановы структуры в равновесной термодинамике — в работе [6].

Заключение

На наш взгляд, даваемое соотношениями (3) и (8) объединение времени и температуры, спектров энергии и времен жизни, а также действия и энтропии в единые комплексно-аналитические сущности имеет фундаментальный смысл. Стрела времени, динамическое нарушение четности и гравитация — эффекты, обеспечиваемые данной общетеоретической конструкцией. Отметим, что они исчезают при тривиальных корреляциях, т. е. для локализованных состояний теории.

Мы благодарны Б. С. Ишханову за постоянный обмен идеями и поддержку и Ю. П. Рыбакову, А. А. Славнову, А. В. Борисову, А. С. Холево, Ю. Г. Рудому, С. С. Кокареву, В. Д. Кассандрову, Дж. Коста, М. Матоне, А. Эррера-Агиляр, Т. Занниас, Э. Кеведо и О. Обрегону — за полезные обсуждения представленных результатов.

Литература

1. *Кубо Р.* Термодинамика. М., 1970.
2. *Гиббс Дж.В.* Основные принципы статистической механики. М.; Л., 1946.
3. *Magnon A.* Arrow of time and reality: in search of a conciliation. Singapore, 1997.
4. *Холево А.С.* Статистическая структура квантовой теории. М., 2003.
5. *Matone M.* // Found. Phys. Lett. 2002. **15**. P. 311.
6. *Quevedo H.* // J. Math. Phys. 2007. **48**. P. 013506.

Поступила в редакцию
21.06.2007