УДК 530.12

СТАТИСТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ И ИЗОТРОПНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ КРИВИЗНЫ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Е. В. Иванова, Д. Д. Соколов

(*кафедра математики*)

E-mail: jivanova@afrodita.phys.msu.su

Рассматриваются возможные пути формализации понятия статистически однородных и изотропных флуктуаций кривизны в общей теории относительности. Показано, что прямолинейный путь построения этого понятия, заимствованный из статистической гидромеханики, приводит к физически вырожденному результату: корреляции флуктуаций не убывают с расстоянием между точками. Подчеркивается, что этот результат является своеобразным аналогом теоремы Шура.

1. Концепция статистической однородности и изотропии

Понятие однородных и изотропных в статистическом смысле флуктуаций кривизны молчаливо используется во многих работах по космологии. Например, обсуждая неоднородности и анизотропию флуктуаций микроволнового излучения, авторы многих работ по умолчанию предполагают, что эти флуктуации, по крайней мере мысленно, можно себе представить статистически однородными и изотропными. В работе [1] А. Д. Чернин впервые рассмотрел мелкомасштабные космологические магнитные поля и их влияние на космологическое расширение, однако и он, и многочисленные авторы, использовавшие эту идею впоследствии [2], рассматривали понятия статистической однородности и изотропии флуктуации как самоочевидные. Цель настоящей работы — показать, что на самом деле разработка этого понятия встречает серьезные трудности.

Прежде всего требует формализации само понятие случайной метрики (или случайной кривизны). Соответствующее прямолинейное обобщение понятия случайной величины (т. е. функции на вероятностном пространстве) по аналогии с понятием случайного процесса (т. е. функции $f(t,\omega)$, где ω — точка вероятностного пространства, а t — число) выглядит как закон, сопоставляющий точке вероятностного пространства (псевдо)риманову метрику $g(\omega)$. Однако в отличие от понятия случайного процесса такая конструкция практически бессодержательна, поскольку структура пространства римановых метрик гораздо менее прозрачна, чем структура функционального пространства, к которому принадлежит траектория случайного процесса. Не ясно даже, как сформулировать условие измеримости в рамках данного подхода. Поэтому мы сразу же будем считать, что нам дано многообразие-носитель римановой метрики, так что наша задача сводится к описанию некоторого случайного тензора (кривизны или метрического) на этом многообразии. Его уже, действительно, можно понимать как функцию точки и случайного параметра ω, снабженную соответствующим набором тензорных индексов.

Понятие статистической однородности и изотропии возникло в статистической гидромеханике (теории турбулентности), где оно понимается как инвариантность характеристического функционала случайного поля (или всех конечномерных функций распределения) группе движения евклидова пространства [3–5]. Очевидно, что в таком виде мы не можем применить это определение просто потому, что рассматриваемые нами пространства не имеют, вообще говоря, никакой группы движения. Конечно, можно ограничиться рассмотрением флуктуаций как малых возмущений на фоне однородного и изотропного пространства. Эта возможность, конечно, достаточна для многих практических задач, но не составляет предмет нашего изучения.

Отмеченное обстоятельство не означает еще невозможности построения интересующего нас понятия. Дело в том, что реально в статистической гидромеханике пользуются не общим понятием статистической однородности, а его следствиями для корреляционных функций. Например, для однородного и изотропного в среднем поля скорости корреляционный тензор имеет вид [4]

$$<v_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})> = A(r^2)\delta_{ij} + B(r^2)r_ir_j, \qquad (1)$$

где r — расстояние между точками $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а r_i — соответствующий вектор. Если жидкость является несжимаемой, то условие $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ превращается в дифференциальную связь между A и B. Аналогично выписываются выражения для корреляционных тензоров более высокого порядка.

Рецепт, приводящий к (1), можно принять за определение однородного и изотропного тензора кривизны. При этом придется преодолеть ряд технических трудностей. Скорости $v_i(\boldsymbol{x})$ и $v_j(\boldsymbol{y})$ заданы в различных точках. В евклидовом пространстве нет препятствий для перемножения этих величин. В римановом пространстве можно перемножать только тензоры, заданные в одной точке. В римановом пространстве не определен вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ (можно вычитать лишь векторы, приложенные к одной точке). Эти проблемы обходятся следующим образом.

Рассмотрим геодезическую γ, соединяющую точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ на нашем многообразии. Эта геодезическая, конечно, зависит от того, какая метрика выбрана на многообразии. Поскольку эта метрика случайна, то случайна и геодезическая, т. е. она тоже зависит от ω. Однако мы можем сделать эту случайность не бросающейся в глаза, договорившись, что для каждого ω координаты выбираются так, чтобы геодезические $\gamma(\omega)$ имели одни и те же координаты. На γ определен единичный вектор $\boldsymbol{n}$, который может играть роль, аналогичную вектору $\boldsymbol{r}$, поскольку в евклидовом пространстве $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$. Пусть теперь T — операция параллельного переноса тензора вдоль геодезической γ из точки $\boldsymbol{y}$ в точку $\boldsymbol{x}$, а R_{ijkl} — тензор Римана, у которого для определенности выбраны нижние индексы. Мы можем рассмотреть тензор $<R_{ijkl}(\boldsymbol{x})TR_{\alpha\beta\mu\nu}(\boldsymbol{y})>$ и потребовать в качестве определения однородности и изотропии, чтобы он выражался через величину n_i, n_α (вместо r_i), g_{ij}, $g_{\alpha\beta}$ (вместо δ_{ij}) в соответствии с рецептом Бэтчелора [4]. Возникающие при этом разнообразные произвольные функции должны зависеть от r^2, т. е. квадрата расстояния между точками $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Угловые скобки $<\ldots>$ означают статистическое среднее, т. е. интеграл по пространству элементарных событий. Обратим внимание, что тензор $TR_{\alpha\beta\mu\nu}(\boldsymbol{y})$ по определению находится в касательном пространстве в точке x (а не y). Мы не выписываем всего соответствующего выражения в силу его чрезвычайной громоздкости, а приводим лишь некоторые возникающие в нем члены: $A(r^2)n_in_jn_kn_ln_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu$, $B(r^2)n_in_jn_kn_ln_\alpha n_\beta g_{\mu\nu}$, $C(r^2)n_in_jn_kn_lg_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}$, $D(r^2)n_in_jg_{kl}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}$, $E(r^2)\times$ $\times g_{ij}g_{kl}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}$. Для краткости мы опустили знак T при объектах, переносимых из точки $\boldsymbol{y}$ в точку $\boldsymbol{x}$, поскольку и метрический тензор $g_{\alpha\beta}$, и единичный вектор n_α переносятся при этом как ковариантно-постоянные объекты.

При формулировке этого рецепта нам пришлось сохранить различие между индексами, относящимися к точкам $\boldsymbol{x}$ (латинские индексы) и точке $\boldsymbol{y}$ (греческие индексы), поскольку иначе мы не сможем далее проследить за выполнением дифференциальных свойств тензора Римана (дифференцировать по $\boldsymbol{y}$). Поэтому, в частности, в рассматриваемое выражение для корреляционного тензора не могут входить компоненты метрического тензора, у которых один индекс латинский, а другой — греческий. Это значит, что мы можем воспроизвести подход Бэтчелора, но с некоторыми (как выяснится далее, важными) ограничениями).

Отметим, что многие из этих трудностей связаны с тем, что кривизна в четырехмерном пространстве является тензором. Если бы мы хотели, например, сформулировать, что такое однородные и изотопные флуктуации кривизны Риччи, то это означало бы, что соответствующий коррелятор имеет вид

$$<R(\boldsymbol{x})R(\boldsymbol{y})> = A(r^2). \qquad (2)$$

Так что проблем с тензорными индексами не возникло бы. Отметим также, что мы не можем проделать той же операции с метрическим тензором, поскольку он по определению римановой метрики является ковариантно-постоянным и в этом случае путь, основанный на структуре корреляторов, становится бессодержательным.

2. Выполнение свойств тензора Римана

Теперь мы должны выполнить требования, вытекающие из многочисленных свойств тензора Римана. Сразу же выясняется, что многие из потенциально допустимых членов (например, пропорциональные функциям A и B) выпадают в силу условия антисимметрии при перестановке индексов.

Наиболее сильным оказывается условие Бьянки, которое, как известно, имеет вид

$$R^n{}_{ikl;m} + R^n{}_{imk;l} + R^n{}_{ilm;k} = 0, \qquad (3)$$

где «;» — знак ковариантного дифференцирования. Выполняя эти дифференциальные операции с искомым выражением для корреляционного тензора, нужно воспользоваться соотношением

$$n^i_{;j} = -\Gamma^i_{rs}n^rn^sn_j + \Gamma^i_{pj}n^p.$$

В результате предполагаемое выражение для коррелятора радикально упрощается и сводится к следующему:

$$<R_{ijkl}(\boldsymbol{x})TR_{\alpha\beta\mu\nu}(\boldsymbol{y})> = E(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il})(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}), \qquad (4)$$

а условие Бьянки сводится к условию $E' = 0$, т. е. $E = \mathrm{const}$.

Итак, оказалось, что свойства тензора Римана чрезвычайно ограничивают возможную структуру корреляционного тензора (4). В частности, оказывается, что корреляции в полученном выражении не убывают с расстоянием, поскольку E оказывается константой.

3. Обсуждение

Мы интерпретируем полученный результат как указание на то, что требования однородности и изотропии, предъявляемые по опыту статистической гидромеханики к флуктуациям кривизны, оказываются неоправданно завышенными. По существу они приводят к тому, что корреляции флуктуации кривизны могут быть лишь такими, какими они были бы для пространства постоянной кривизны, в котором сама постоянная кривизна является случайной величиной. Напомним в этой связи, что тензор Римана пространства постоянной кривизны имеет вид

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}), \quad (5)$$

так что для получения представления (4) нужно положить $E = <K^2>$. В рамках представлений современной теории случайных сред приходится рассматривать подобное понятие статистической однородности и изотропии как бессодержательное.

Отметим, что полученный результат можно рассматривать как определенный аналог известной теоремы Шура, согласно которой требование изотропии риманова пространства также оказывается неожиданно сильным и влечет за собой представление (5) [6].

В то же время условие статистической однородности и изотропии флуктуаций кривизны кажется физически естественным. Мы видим несколько возможных путей разрешения ситуации:

1) признать то, что интересующее нас понятие имеет смысл лишь для метрик, близких к метрикам постоянной кривизны;

2) найти какой-то иной, пока неизвестный способ введения интересующего нас понятия;

3) потребовать изотропии и однородности не от всего тензора кривизны, а от связанных с ним скалярных инвариантов (мы показали, как это сделать для кривизны Риччи (2)) или от тензора Риччи, для которого нет аналога тождествам Бьянки;

4) признать, что представления статистической гидродинамики несовместимы с общей теорией относительности (ОТО).

Несмотря на серьезные последствия для концепции ОТО в целом, третья возможность кажется нам наиболее реальной. Отметим, что она хорошо сочетается с потребностями задачи, которая привела нас к рассмотрению данной проблемы. Речь идет о тонком эффекте, обнаруженном Я. Б. Зельдовичем [7], согласно которому флуктуации плотности и вызванные ими флуктуации кривизны не только вносят случайный шум в космологические тесты, но и приводят к некоторому систематическому эффекту. Его можно описать как возникновение отрицательной эффективной добавки к кривизне [8], которая, впрочем, оказывается очень маленькой и практически ненаблюдаемой [9]. Важно, что Зельдович построил свою аргументацию так, чтобы двумеризовать задачу и рассматривать лишь скалярные величины. Мы заинтересовались тензорной постановкой (влиянием случайного ансамбля гравитационных волн) и немедленно столкнулись с описанной проблемой. Анализируя теперь исходную статью Зельдовича, можно заметить, что он до определенной степени обращал внимание на выявившиеся трудности и, по-видимому, склонялся к последней из описанных возможностей ее разрешения. Отметим, что по пути скаляризации задачи идут практически все авторы, использующие рассматриваемое понятие в конкретных задачах космологии, поскольку они работают не с общими уравнениями Эйнштейна, а с их дифференциальными следствиями.

Мы благодарны М. В. Сажину за полезные обсуждения и Д. Моссу за помощь в работе над статьей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 07-02-00127).

Литература

1. *Чернин А.Д.* // Астрон. журн. 1966. **43**. С. 797.
2. *Семикоз В.Б., Соколов Д.Д.* // Int. J. Mod. Phys. D. 2005. **14**. P. 1839.
3. *Robertson H.P.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1940. **36**. P. 209.
4. *Бэтчелор Дж.К.* Теория однородной турбулентности. М., 1955.
5. *Chandrasekhar S.* // Philos. Trans. 1950. **242**. P. 557.
6. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1966.
7. *Зельдович Я.Б.* // Астрон. журн. 1964. **41**. С. 19.
8. *Lamburt V., Sokoloff D., Tutubalin V.* // Astrophys. and Space Science. 2005. **298**. P. 409.
9. *Иванова Е., Хованская О.* // Астрон. журн. 2005. **82**, № 10. С. 867.

Поступила в редакцию
14.09.2007