

УДК 533.92

## О ЗАКОНЕ ОМА В ТОНКИХ ТОКОВЫХ СЛОЯХ МАГНИТОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

А. Г. Коржов, Х. В. Малова, В. Ю. Попов

(кафедра математики)

E-mail: hmalova@yandex.ru

**При помощи аналитической аппроксимации численных результатов самосогласованной модели магнитосферного тонкого токового слоя получены аналитические и численные оценки зависимости полного поперечного тока от величины электрического поля, нормальной компоненты магнитного поля, температуры ионов и электронов. Показано, что зависимость тока от параметров  $\varepsilon$ ,  $T_i$ ,  $b_n$  нелинейна. Оценен относительный вклад различных компонент плазмы в полный ток.**

### Введение

Целью настоящей работы является аналитическое и численное исследование закона Ома в токовом слое (ТС) хвоста магнитосферы Земли [1], в котором существует крупномасштабное электрическое поле и течет поперечный электрический ток. Во время суббурь ТС сжимается до предельно малой толщины порядка ионного ларморовского радиуса [2]. Поскольку такой предельно тонкий токовый слой (ТТС) может являться ключевым фактором, влияющим на характер геомагнитных возмущений, задача изучения его свойств является весьма актуальной. Еще в 1980-е годы были предприняты попытки оценить масштаб электрического тока через хвост и оценить круг основных параметров, влияющих на структуру ТС [3]. Однако эти оценки, во-первых, были достаточно грубые, а во-вторых, не удавалось оценить вклад электронной компоненты плазмы в полный ток. В работах [4, 5] представлена самосогласованная модель ТТС, которая позволяет получить самосогласованные профили магнитного поля, плотности плазмы и тока в хвосте магнитосферы Земли для широкого диапазона параметров. Однако в этой модели выбрана специальная система координат, где электрическое поле не учитывается. Для учета крупномасштабного электрического поля и электронного тока самосогласованный профиль плотности плазмы, полученный в модели [5], был аппроксимирован аналитической формулой, а для аналитического представления электронных токов использовалось дрейфовое приближение [6, 7]. Это позволило перейти в систему координат с ненулевым электрическим полем и получить аналитические и численные оценки для зависимости полного поперечного тока от величины электрического поля, нормальной компоненты магнитного поля, температур ионов и электронов. Также оценен относительный вклад различных компонент плазмы в полный ток.

### 1. Аппроксимация численных результатов самосогласованной модели ТТС

Рассмотрим следующую конфигурацию электрических и магнитных полей, характерную для ТТС [5]:

$$\mathbf{B} = (B_0 \operatorname{th}(z/L), 0, B_n), \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = (0, E_y, E_z(z)) \quad (2)$$

Причем  $E_z(z) \rightarrow 0$  при  $Z \rightarrow L$ , где  $L$  — характерная ширина ТС и  $b_n = \frac{B_n}{B_0} \ll 1$ .

Обычно предполагают, что  $B_n$  поддерживается дипольным магнитным полем Земли, а  $B_x$ -компонента создается самосогласованно током хвоста. Амбиполярное электрическое поле  $E_z(z)$  возникает из-за разной динамики замагниченных электронов и неадиабатических ионов в ТТС [5] и определяется самосогласованным потенциалом, который имеет вид, схожий с гауссовской функцией, и затухает на расстояниях порядка ширины слоя  $L$ . Для его аппроксимации использовалась функция

$$\phi(z) = \phi_0 \exp\left(-\alpha_1 \frac{z^2}{L^2}\right), \quad \alpha_1 > 0, \quad (3)$$

При такой аппроксимации потенциала электрическое поле

$$\mathbf{E} = \left(0, E_y, E_{z0} \frac{z}{L} \exp\left(-\alpha_1 \frac{z^2}{L^2}\right)\right), \quad (4)$$

где  $E_{z0} = 2\phi_0 \frac{\alpha_1}{L}$ .

Аналогично концентрацию ионов в соответствии с численной самосогласованной моделью будем аппроксимировать функцией Гаусса с максимумом в центре слоя:

$$n(z) = n_0 \left(1 + \beta \exp\left(-\alpha_2 \frac{z^2}{L^2}\right)\right), \quad \alpha_2 > 0, \quad (5)$$

где параметры  $\phi_0$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  определялись по численным результатам самосогласованной модели [5] так, чтобы

$$\delta I = \left| \int (\psi_{\text{num}} - \psi_{\text{approx}}) f(z) dz \right| \leq \gamma,$$

где  $\gamma$  — точность дрейфового приближения. Зависимости параметров  $\beta$  и  $\phi_0$  от величины  $\varepsilon = \frac{v_T}{v_D}$  (отношения тепловой скорости к средней потоковой скорости в движущейся системе координат) при  $\frac{T_i}{T_{e\perp}} = \frac{T_i}{T_{e\parallel}} = 6$ ,  $b_n = 0.25$  показаны на рис. 1.

В специальной системе координат де Хоффмана–Теллера, движущейся в положительном направлении оси  $X$  со скоростью  $V_{HT} = cE_y/B_n$ , поля имеют вид

$$\begin{aligned} E'_x &= 0, & E'_y &= 0, & E'_z(z) &= E_z(z), \\ B'_x(z) &= B_x(z), & B'_y(z) &= \frac{E_y}{B_n} E_z(z), & B'_z &= B_n. \end{aligned}$$

Это преобразование справедливо при условии  $\frac{E_y}{B_n} \ll 1$ , которое в действительности характерно для хвоста магнитосферы Земли. В такой системе координат на границе ТС зададим ионную функцию распределения как суперпозицию функций распределений ионов, входящих в слой и выходящих из него [5, 8]:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}') &= f_0^+ \exp\left(-\frac{(v'_{\parallel} + v'_D)^2 + v'^2_{\perp}}{v_T^2}\right) + \\ &+ f_0^- \exp\left(-\frac{(v'_{\parallel} - v'_D)^2 + v'^2_{\perp}}{v_T^2}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $T_i = \frac{m_i v_T^2}{2}$  — температура ионов,  $v_T$  — тепловая скорость ионов в неподвижной системе координат, которая отличается от скорости в движущейся системе на малую величину,  $v'^2_T = v_T^2 + c^2 \frac{E_y^2}{B_n^2}$  (здесь и далее будем обозначать индексом  $L$  величины, взятые на границе токового слоя).

## 2. Вычисление концентрации и плотности тока ионов

Вычисление концентрации и плотности тока ионов основывается на законе сохранения потока

импульса для поля и частиц [6, 7], т.е. на согласовании параметров функции распределения с параметрами магнитного поля.

В случае стационарных полей закон сохранения записывается в виде [3]

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ij} + T_{ij}) = 0, \quad (7)$$

где

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{E^2 + B^2}{2} \delta_{ij} - (E_i E_j + B_i B_j) \right) \quad (8)$$

— тензор натяжений электромагнитного поля,

$$P_{ij} = \int m_i v_i v_j f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (9)$$

— тензор плотности потока импульса. После интегрирования  $x$ -компоненты (7) по  $z$ -координате с учетом (1) и (6) получается выражение для концентрации ионов (равной концентрации электронов) на границе слоя:

$$n = \frac{B_L^2 \varepsilon'^2}{8T_i} \frac{(1 + \operatorname{erf}(\frac{1}{\varepsilon'}))}{\left(\pi + \pi \operatorname{erf}(\frac{1}{\varepsilon'}) + \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon'^2}\right) \varepsilon'\right)}, \quad (10)$$

$B_L = \sqrt{B_0^2 + B_n^2}$  — поле на границе слоя. Видно, что  $n \approx \frac{B_L^2 \varepsilon'^2}{8\pi T_i}$  при  $\varepsilon' \lesssim 1$  и  $n \approx \frac{B_L^2}{8\pi T_i} (2 - \pi + \sqrt{\pi} \varepsilon')$  при  $\varepsilon' \gg 1$ . Величина  $\varepsilon$  определяется следующим образом:  $\varepsilon = \frac{v_T}{v_D}$ . Для характерных параметров задачи  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  можно считать совпадающими.

Для характерного значения  $B_L = 20$  нТл и  $T_i = 2 \div 3$  кэВ значения концентрации согласуются с экспериментальными данными, представленными в работе [9].

Далее, интегрируя уравнение  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ , пренебрегая величиной  $B_n^2$  по сравнению с  $B_0^2$  и выражая  $v'_D$  через известные в неподвижной системе величины:  $v'_D = v_{DHT} = v_D + c \frac{E_y}{B_n}$ , где  $v_D$  — средняя потоковая скорость, измеренная в неподвижной системе

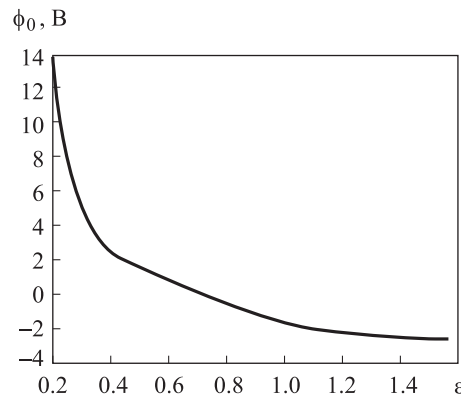
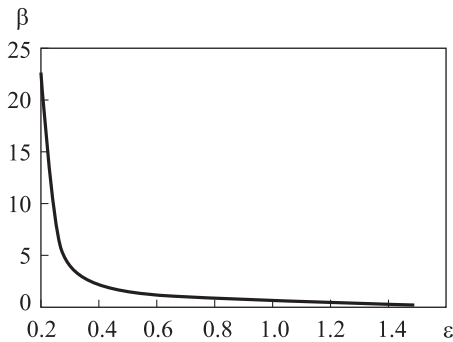


Рис. 1. Зависимости параметров  $\beta$  и  $\phi_0$  от величины  $\varepsilon$  при  $\frac{T_i}{T_{e\parallel}} = \frac{T_i}{T_{e\perp}} = 6$ ,  $b_n = 0.25$

координат, получим формулу для ионного тока через слой в неподвижной системе координат:

$$I_i = \frac{c}{2\pi} \sqrt{4\pi m_i n} v_{DHT} \sqrt{1 + \frac{v_T \exp\left(-\frac{v_{DHT}^2}{v_T^2}\right)}{\sqrt{\pi} v_{DHT} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{v_{DHT}}{v_T}\right)\right)}} \quad (11)$$

Видно, что для характерных параметров ТС зависимость ионного тока от величины электрического поля мало отличается от линейной, в то время как зависимость от температуры и величины  $\varepsilon$  нелинейна.

Приведем асимптотики в зависимости от параметра  $\varepsilon$ :  $I_i = \frac{cB_L}{2\pi} \left(1 + \varepsilon \frac{c}{v_T} \frac{E_y}{B_n}\right)$  при  $\varepsilon \lesssim 1$   $I_i = \frac{cB_L}{2\pi} \sqrt{2 - \pi + \sqrt{\pi\varepsilon}} \left(\frac{1}{4\sqrt{\pi}} + \frac{cE_y}{v_T B_n} + \frac{1}{\varepsilon}\right)$  при  $\varepsilon \gg 1$ . Зависимость ионного тока от температуры и электрического поля для различных значений  $\varepsilon$  представлена на рис. 2.

### 3. Учет электронного тока

Для описания замагниченных электронов, источники которых считаются расположенными вне ТС

симметрично относительно нейтральной плоскости, будем использовать дрейфовое приближение [5, 6] и характеризовать их усредненными температурами  $T_{e\parallel} = m_e v_{e\parallel}^2$  и  $T_{e\perp} = \frac{m_e v_{e\perp}^2}{2}$ , заданными на границе слоя.

Условие применимости приближения ведущего центра выглядит так [2]:  $\rho \frac{\nabla B_x}{B} \ll 1$ , что для данной модели эквивалентно условию  $\frac{\rho(0)}{R(0)} \ll 1$ , где  $\rho(z=0) = v_{\perp}(0) \frac{m_e c}{eB(0)}$  — ларморовский радиус электрона в центре слоя,  $R(0) = Lb_n$  — радиус кривизны силовых линий магнитного поля в центре слоя.

Используя закон сохранения магнитного момента и оценки для ширины токового слоя  $L \approx \varepsilon^{\frac{4}{3}} \frac{v_D}{\omega_0}$  при  $b_n < \varepsilon < 1$  и  $L \approx \frac{v_T}{\omega_0}$  для  $\varepsilon > 1$  [4], запишем для заданного значения параметра  $\gamma = \frac{\rho(0)}{R(0)}$  соотношение между параметрами модели, определяющее в пространстве основных параметров задачи разрешенную область применимости дрейфового приближения:

$$b_n \varepsilon^{2/9} \left(\frac{T_{e\perp}}{T_i}\right)^{-1/3} = \frac{1}{\gamma^{2/3}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \quad (12)$$

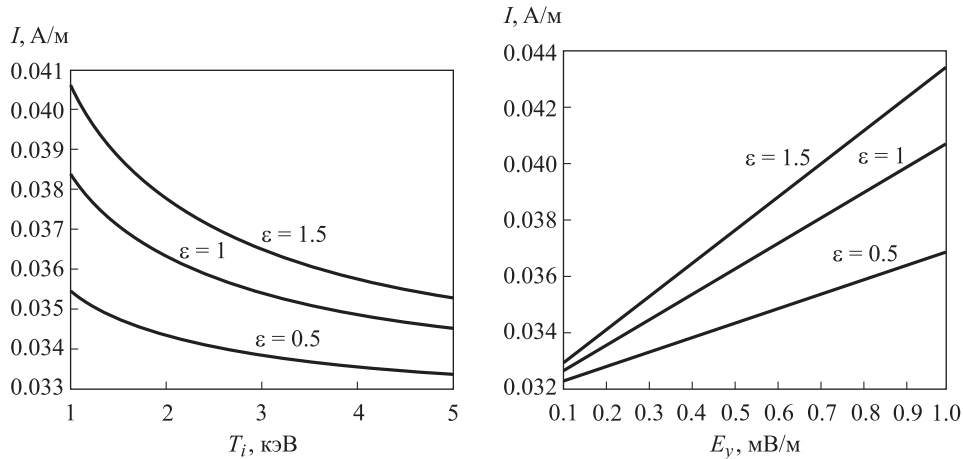


Рис. 2. Зависимость ионного тока от температуры и электрического поля для различных значений  $\varepsilon$

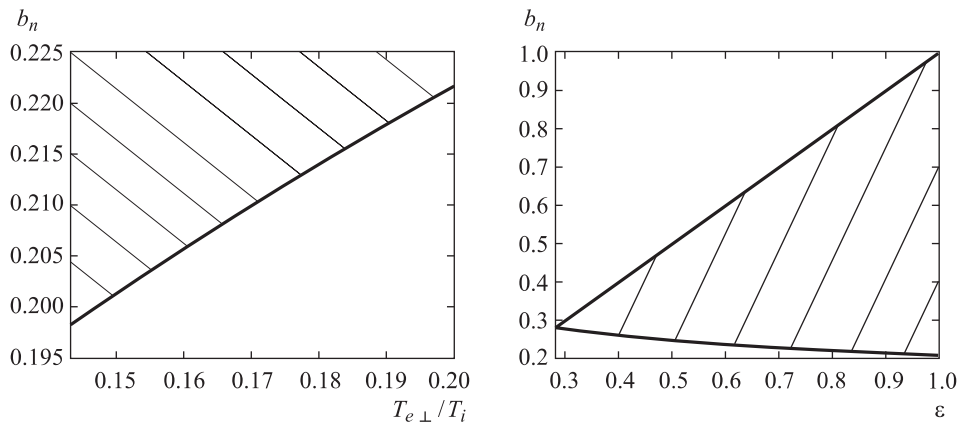


Рис. 3. Значения  $b_n$  в заштрихованных областях удовлетворяют условиям дрейфового приближения ( $\gamma = 0.1$ )

Диапазоны значений  $b_n$ , при которых справедливо дрейфовое приближение показаны на рис. 3. Видно, что существует область малых значений параметров  $\varepsilon$  и  $b_n$  (для реальных температур), в которой электроны нельзя рассматривать в дрейфовом приближении.

Плотность перпендикулярной составляющей электронного тока состоит из трех слагаемых и имеет вид [3]

$$\mathbf{j}_{e\perp} = \mathbf{j}_R + \mathbf{j}_E + \mathbf{j}_m = c \left( m_e n_e v_{e\parallel}^2 - \frac{m_e n_e v_{e\perp}^2}{2} \right) \times \\ \times \frac{[\mathbf{B}, (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}]}{B} + \frac{[\mathbf{B}, \nabla \frac{m_e n_e v_{e\perp}^2}{2}]}{B} + e n_e c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2}. \quad (13)$$

Первое слагаемое этого выражения связано с токами кривизны и намагничивания и вносит основной вклад в полный электронный ток, электронный ток и третье — с током в скрещенных полях. Два последних слагаемых вносят существенно меньший вклад. Поскольку в центре слоя слагаемое  $\frac{[\mathbf{B}, (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}]}{B} \sim \frac{1}{b_n^2}$ ,  $\frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \sim \frac{E_y}{B_n} \ll 1$ , то второе слагаемое  $\sim \nabla B \sim \frac{1}{b_n}$ .

Проинтегрируем (13) с учетом (1), законов сохранения энергии и магнитного момента электрона, а также аналитических выражений для потенциала и концентрации (3), (5), полученных аппроксимацией результатов самосогласованной численной модели [5]. Получим следующие приближенные аналитические выражения для электронных токов (индексом  $L$  помечены величины, взятые на границе токового слоя):

$$(I_R)_y = \frac{c n_L (1 + \beta) m_e v_L'^2}{B_L} \times \\ \times \left( \left\{ \frac{\pi}{2b_n} \right\} \left\{ 1 + \frac{2|e|\phi_0}{m_e v_L'^2} \right\} - 3 \frac{v_{L\perp}^2}{v_L'^2} \right), \quad (14)$$

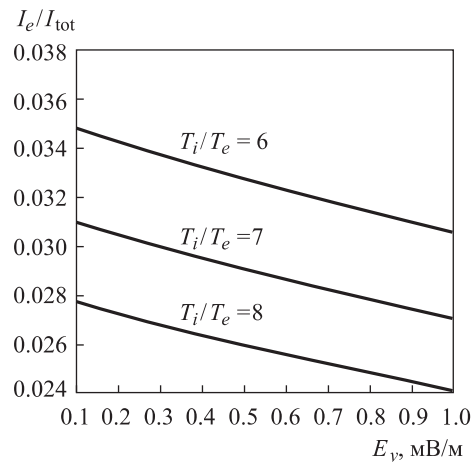
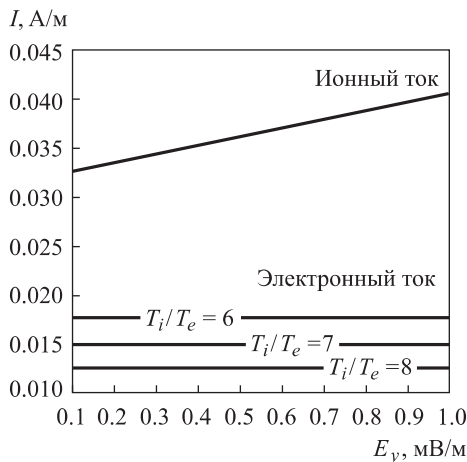


Рис. 4. Зависимости электронных и ионных токов от  $E_y$  и доля электронной составляющей в полном токе через слой

$$(I_E)_y = -|e|n_L(1 + \beta)c \frac{2\phi_0\alpha_1}{B_0} \left( \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}} - \pi b_n \right), \quad (15)$$

$$(I_m)_y = -\frac{c n_L m_e v_{L\perp}^2}{B_L} \left( (1 + \beta)(\ln(2/b_n) - 1) + \right. \\ \left. + \alpha_2 \beta \left( \frac{1}{4} + \frac{\exp(-\frac{\alpha_2}{4})}{\alpha_2} \right) \right). \quad (16)$$

В этих формулах стоят значения скоростей, вычисленные в движущейся системе отсчета, а заданными считаются скорости, измеренные в неподвижной системе. Связь между этими скоростями имеет вид

$$v_{L\parallel}^2 = (v_{L\parallel} + \frac{cE_y}{b_n B_L})^2, \quad (17)$$

$$v_{L\perp}^2 = v_{\perp}^2 + c^2 \frac{E_y^2}{B_L^2}. \quad (18)$$

В соответствии с формулами (10), (14)–(16) электронный ток  $I_e \sim \varepsilon^2$  для малых  $\varepsilon$  и  $I_e \sim \varepsilon$  для больших  $\varepsilon$  и обратно пропорционален  $T_i$  и  $b_n$ .

На рис. 4 представлены графики зависимостей полного электронного тока для электронов различных температур. Сравнивая их с ионным током для  $T_i = 2$  кэВ,  $b_n = 0.25$ ,  $\varepsilon = 1$ , получим, что для выбранных значений параметров задачи доля электронных токов в полном токе составляет около одной трети.

## Выводы

Анизотропные токовые структуры могут образовываться в начальной фазе суббури в результате утоньшения токового слоя магнитосферного хвоста и, по-видимому, играют ключевую роль в динамике магнитосферы в целом. Исследование факторов, влияющих на ток через хвост магнитосферы является задачей, которая до сих пор была практически не исследована. В настоящей работе проведены оценки тока в хвосте магнитосферы Земли на основании аналитической модели ТТС, с учетом электронной и ионной компонент плазмы.

Получены аналитические формулы для электронных токов в дрейфовом приближении. Выражения для ионного тока получены в результате согласования параметров ионной функции распределения с параметрами магнитного поля.

В рамках приближения ведущего центра получены ограничения на характерные значения малых параметров  $b_n$  и  $\varepsilon$ .

Показано, что токи в ТТС хвоста магнитосферы Земли обладают следующими свойствами:

1. Зависимость электронного тока от поля  $E_y$  для характерных значений поля  $\sim 1 \frac{mV}{m}$  слабо отличается от линейной.

2. Зависимость ионного тока от электрического поля  $E_y$  слабо нелинейна.

3. Зависимость ионного тока от  $T_i$  и  $\varepsilon$  нелинейна.

4. Полный ток через слой является нелинейным по параметрам  $\varepsilon$ ,  $b_n$ ,  $T_i$ .

Результаты, полученные в настоящей работе, согласуются с экспериментальными оценками, приведенными, например, в работе [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 08-02-00407, 08-06-00283)

и Программой поддержки научных школ (грант НШ-5359.2006.2). Работа Х. В. Маловой выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-05-64993, 06-05-90631).

#### Литература

1. *Ness N.F.* // J. Geophys. Res. 1965. **70**. P. 2989.
2. *Sergeev V.A., Mitchell D.G., Russell C.T.* et al. // J. Geophys. Res. 1993. **98**. P. 17345.
3. *Lyons L.R., Speiser T.W.* // J. Geophys. Res. 1985. **90**. P. 8543.
4. *Zelenyi L.M., Sitnov M.I., Malova H.V.* et al. // Non-linear processes in Geophysics. 2000. **7**. P. 127.
5. *Zelenyi L.M., Malova H.V., Popov V.Yu.* et al. // Non-linear Processes in Geophysics. 2004. **11**. P. 1.
6. *Галеев А.А.* Основы физики плазмы. Т. 1. М., 1983.
7. *Франк-Каменецкий Д.А.* Лекции по физике плазмы. М., 1968.
8. *Burkhardt G.R., Drake J.F., Dusenbery P.B.* et al. // J. Geophys. Res. 1992. **97**. P. 13799.
9. *Runov A.V., Sergeev V.A., Nakamura R.* et al. // Annales Geophysicae. 2006. **24**. P. 247.

Поступила в редакцию  
20.06.2007