Г.Н. Медведев

ЗАДАЧИ
ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

Физический факультет МГУ

1993—2004

МОСКВА

2004

ББК
УДК

Медведев Г.Н.
Задачи вступительных экзаменов по математике 1993–2004.
2004.   с. Илл.

ISBN 5-211-02590-3

Книга знакомит школьников и преподавателей с вариантами заданий письменного экзамена по математике на Физическом факультете МГУ. Приведены по два варианта с ответами для каждого из 33 экзаменов и олимпиад «Абитуриент» за 1993–2004 гг. Даны также решения более сложных геометрических задач и задач с параметром.

Особенностью данного пособия, в отличие от распространенных руководств, является то, что решенные задачи взяты не из двух приведенных вариантов, а из третьего варианта того же экзамена. Таким образом, для самостоятельной работы в распоряжении абитуриента оказываются два варианта одного экзамена с возможной подсказкой в решении более трудных последних трех задач.

Для учащихся старших классов и для преподавателей, работающих со школьниками.

Медведев Герман Николаевич
Задачи вступительных экзаменов по математике
Физический факультет МГУ
1993–2004

ISBN 5-211-02590-3

Предисловие

Книга знакомит школьников и преподавателей с вариантами заданий письменного экзамена по математике на Физическом факультете МГУ.

Начиная с 1993 года, на Физическом факультете ежегодно проводились как экзамены, так и олимпиады «Абитуриент» (вначале их называли пробными экзаменами), результаты которых могли быть зачтены в качестве конкурсных оценок.

В первой части книги приведены по два варианта каждого из 33 экзаменов и олимпиад за 1993–2004 гг. На экзаменах на решение такого варианта отводилось четыре астрономических часа. В конце книги к этим вариантам даны ответы.

Во второй и третьей частях приведены решения не всего варианта, а только более сложных геометрических задач и задач с параметром. Первые пять задач соответствуют уровню стандартного школьного учебника и вполне доступны хорошему школьнику без каких бы то ни было подсказок.

Особенностью данного пособия, в отличие от распространенных руководств, является то, что решенные задачи взяты не из двух приведенных вариантов, а из третьего варианта того же экзамена. Таким образом, для самостоятельной работы в распоряжении абитуриента оказываются два варианта одного экзамена с возможной подсказкой в решении более трудных последних трех задач.

Краткая, сжатая форма приведенных решений преследует цель обратить внимание читателя на то, как можно, не теряя строгости и не тратя лишнего времени на пресловутое «оформление», изложить на экзамене решение задачи. Поэтому возможно, что освоение этих решений потребует от читателя определенных усилий.

Несколько советов абитуриенту

При подготовке к экзамену необходимо не только расширять арсенал методов решения задач, но и тренировать чисто технические навыки, учиться уверенно получать верные результаты в несложных задачах. Таких задач на экзамене большинство!

Как часто после экзамена можно услышать: «Решил столько-то задач, может и все, но не знаю верно ли»!

В этой фразе смешались и комичное (что такое «неверно решенная задача»?) и трагичное. Почти наверняка абитуриент знал как решать эти задачи, но, несмотря на это, он не уверен в правильности полученных ответов. Спрашивается, зачем осваивать методы решения, если не доверять затем своим же вычислениям?

Проверка экзаменационных работ, в самом деле, обнаруживает большое количество ошибок в решении тех задач, которые абитуриент знал как решать, но по небрежности не смог довести до правильного результата. Это самые непростительные ошибки, и на борьбу с ними должна быть, в первую очередь, направлена подготовка к экзамену.

Как же избавиться от этих недостатков? Думается, что помочь в этом могут следующие советы:

- научитесь прежде всего безошибочно решать простые задачи, для этого каждому человеку нужно решить их некоторое достаточное количество, даже если метод решения уже знаком (ведь нельзя научиться быстро бегать стометровку или поднимать штангу, только посмотрев, как это делает чемпион);

- приучите себя решать простые задачи сразу начисто, это повышает внимание и экономит на экзамене время и силы для размышлений над более трудными задачами;

- используйте все способы проверки ответов, особенно допускающих прямую подстановку в уравнение, ведь самые обидные ошибки — это ошибки в задачах, доведенных до неверного результата при правильном методе решения;

- ответы геометрических задач с буквенными данными проверяйте на частных случаях, например, на правильных треугольниках, правильных пирамидах или других «хороших» фигурах;

- несмотря на то, что приведенные варианты каждого экзамена похожи друг на друга, решайте их именно этими парами, стараясь при этом выделить самое главное — идею задачи. Одна и та же идея маскируется экзаменаторами различным внешним видом уравнения или неравенства, различными тригонометрическими формулами, заданием в условии острого или тупого угла, треугольной или четырехугольной пирамиды и т. п. Преодолевая этот «камуфляж», нужно овладевать самым ценным — методом решения целого семейства аналогичных задач;

– решая для тренировки вариант, заставьте себя сначала закончить всю работу, представьте, что вернуться к ней уже нельзя (как будто вы уже сдали работу экзаменатору), и только тогда начинайте проверку ответов.

В заключение хочется пожелать не удачи, а заслуженных успехов!

Часть 1

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНОВ И ОЛИМПИАД
1993–2004 гг.

1993 (май). Вариант 1

1. Решить неравенство
$$x^5 < x.$$

2. Решить уравнение
$$10\sin^2\frac{x}{2} + 3\sin x - 5 = 0.$$

3. Решить уравнение
$$2^{x+2} = 2^{2x+2}\cdot 3^{x+3}.$$

4. В трапеции средняя линия делит площадь трапеции в отношении $3:7$. Средняя линия равна 5. Найти основания трапеции.

5. Найти область определения функции
$$y = \sqrt{\log_{1/2}(x^2-9)+4}\,.$$

6. В равнобедренном треугольнике BCD ($BC = CD$) проведена биссектриса BE. Известно, что $CE/ED = m$. Найти отношение длины отрезка ED к радиусу окружности, описанной около треугольника BED.

7. Для любого a решить уравнение
$$2|x| + |x-3| = a.$$

8. В треугольной пирамиде $SPQR$ все плоские углы при вершине S — прямые, SH — высота пирамиды. Известно, что отношение площади треугольника QHR к площади треугольника RHP равно k. Найти отношение площади треугольника QSR к площади треугольника RSP.

1993 (май). Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} < x.$$

2. Решить уравнение

$$4\cos^2\frac{x}{2} - 5\sin x - 2 = 0.$$

3. Решить уравнение

$$3^{x+2} = 3^{2x+1} \cdot 5^{x+2}.$$

4. Одно из оснований трапеции равно 3. Средняя линия делит площадь трапеции в отношении $1 : 2$, считая от данного основания. Найти другое основание трапеции.

5. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{3^x - 4^x}{x^2 + 4x + 3}}.$$

6. В равнобедренном треугольнике LMN ($LM = MN$) проведена биссектриса NK. Известно, что $LK/KM = n$. Найти отношение длины отрезка KM к радиусу окружности, описанной около треугольника KMN.

7. Для любого a решить уравнение

$$3|x| + |x + 1| = a.$$

8. Боковые ребра DA, DB и DC треугольной пирамиды $DABC$ попарно перпендикулярны, DH — высота пирамиды. Известно, что отношение площади треугольника BDC к площади треугольника ADC равно m. Найти отношение площади треугольника BHC к площади треугольника AHC.

1993 (июль). Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\frac{3-x}{1-3^x} < 0.$$

2. Решить уравнение

$$\cos(7-x) = \cos 7x.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{2\log_3 x} = 4\log_3 \sqrt[4]{x} - 2.$$

4. Окружность радиуса r вписана в равнобедренный треугольник BCD ($BC = CD$) с углом CBD, равным β. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник BCD.

5. Решить неравенство

$$\frac{|x+2|-x}{x} < 2.$$

6. Стороны угла BOC касаются окружности в точках B и C. На этой окружности внутри треугольника BOC взята точка A. Расстояния от точки A до прямых OB и OC равны соответственно b и c. Найти расстояние от точки A до хорды BC.

7. Одним из корней уравнения $bx^2+cx+5=0$, где $b<0$, является число $x=2$. Найти действительные корни уравнения bx^4+cx^2+ $+5=0$.

8. На плоскости лежат цилиндр радиуса R и два шара радиуса r ($r<R$). Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найти радиус шара, большего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

1993 (июль). Вариант 2

1. Решить неравенство

$$(1-5^x)(5x-1)>0.$$

2. Решить уравнение

$$\sin 6x=\sin(6-x).$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{2\log_7 x+1}=3\log_7\sqrt[3]{x}.$$

4. В равнобедренном треугольнике LMN ($LM=MN$) точка O — центр вписанной окружности, $\angle OLN=\varphi$. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей для треугольника LMN.

5. Решить неравенство

$$\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|>2.$$

6. Через точку M внутри угла с вершиной O проведена окружность, касающаяся сторон этого угла в точках K и L (точки M и O — по разные стороны от прямой KL). Расстояния от точки M до прямых KL и OL равны соответственно b и c. Найти расстояние от точки M до прямой OK.

7. Число $x=7$ является одним из корней уравнения $2x^2+mx+n=0$, где $n<0$. Найти действительные корни уравнения $2x^4+mx^2+n=0$.

8. Цилиндр радиуса R и два шара радиуса r ($r<R$) лежат на плоскости. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Найти радиус шара, меньшего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

1994 (май). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 2x \cdot \sin 6x = \frac{1}{2}\,.$$

2. Решить уравнение

$$\log_3 (x-4) = 1 + 6\log_{1/27}\sqrt{x-2}.$$

3. Решить уравнение

$$7^{\sqrt{x}} - 2\cdot 7^{2-\sqrt{x}} = 47.$$

4. В прямоугольном треугольнике отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной окружности равно $13/4$. Найти острые углы треугольника.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x+2| + |y-3| = 1, \\ y = 3 - |x+2|. \end{cases}$$

6. В треугольнике BCD медианы BF и CE взаимно перпендикулярны, $CD = b$, $BD = c$. Найти BC.

7. При каких значениях a уравнение

$$a(x+3)^2 - 2|x+3| + 2 = 0$$

имеет четыре различных решения?

8. Наклонная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет своими основаниями трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Сумма площадей параллельных боковых граней призмы равна S, а расстояние между этими гранями равно d. Найти объем многогранника $A_1B_1C_1D_1AC$.

1994 (май). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos^2 2x + \cos^2 5x = 1.$$

2. Решить уравнение

$$4\log_{1/36}\sqrt{4x-9} = \frac{1}{4}\left[\log_6(x-1) - 1\right].$$

3. Решить уравнение

$$2^{\sqrt{-x}} - 3\cdot 2^{4-\sqrt{-x}} = 13.$$

4. Отношение радиуса окружности, описанной около прямоугольного треугольника, к периметру этого треугольника равно $13/60$. Найти острые углы треугольника.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-5| + |y+1| = 2, \\ x = 5 - |y+1|. \end{cases}$$

6. В треугольнике KLM точка B — середина KL а точка C — середина LM, $KC \perp MB$, $KM = l$, $KL = m$. Найти LM.

7. При каких значениях a уравнение

$$(x+4)^2 - 3|x+4| + 2a = 0$$

имеет ровно два различных решения?

8. Трапеции $KLMN$ и $K_1L_1M_1N_1$ являются основаниями наклонной призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Расстояние между параллельными боковыми гранями призмы равно l, а сумма площадей этих граней равна S. Найти объем многогранника $KLMNK_1M_1$.

1994 (июль). Вариант 1

1. Решить неравенство
$$\frac{2-x}{\log_2 x} > 0.$$

2. Решить уравнение
$$3\cos x + 5\sin x = 5.$$

3. Решить уравнение
$$4^{x-1} + 4\cdot(0,25)^{x-2} = 17.$$

4. В треугольнике ABC $AB = BC$, CN и BM — высоты треугольника, $BM = m$, $CN = n$. Найти AB и AC.

5. Решить уравнение
$$\log^2_{1/3}(9x) + \log_3\left(\frac{x}{3}\right) = 9.$$

6. На окружности взяты последовательно точки A, B, C, D. Известно, что $AC \perp BD$, $BC = m$, $AD = n$. Найти радиус окружности.

7. Для каких значений a система неравенств
$$\begin{cases} -2x^2 + 12x + a \geqslant 0, \\ x \leqslant -1 \end{cases}$$
выполняется хотя бы при одном значении x?

8. В правильной треугольной пирамиде $SBCD$ (S — вершина) боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β, сторона основания равна a, SH — высота пирамиды. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SB и CD.

1994 (июль). Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{\log_{2/3} x}{2-3x} < 0.$$

2. Решить уравнение

$$4\sin x - \cos x = 4.$$

3. Решить уравнение

$$3^{x+3} + 3 \cdot \sqrt{3^{-2x-4}} = 10.$$

4. В треугольнике KLM $KL = LM = a$, MA и KB — биссектрисы треугольника, $AB = n$. Найти KM.

5. Решить уравнение

$$\log^2_{1/5}\left(\frac{x}{25}\right) - \log_5\left(25x^2\right) = 9.$$

6. Через точки L и M, лежащие на окружности радиуса R, проведены пересекающиеся хорды LN и MK, $LN \perp MK$, $LM = m$. Найти KN.

7. Для каких значений b система неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 - 18x - b \leqslant 0, \\ x \geqslant 5 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x?

8. В правильной треугольной пирамиде $SLMN$ (S — вершина) боковое ребро равно b, а высота SH пирамиды равна h. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты MK основания LMN параллельно ребрам SM и LN.

1995 (март). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 2x - 1 = \operatorname{tg} x.$$

2. Решить уравнение

$$\log_3 x \cdot (\log_9 x + 7) = 12(2 + \log_9 x).$$

3. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} \cdot 7^{10-x} = 49^{-1}.$$

4. В прямоугольном треугольнике острый угол равен α, а противолежащий ему катет равен a. Найти биссектрису прямого угла.

5. Решить неравенство

$$2^{\log_{1/6}\left(x^2+x\right)} \geqslant 0,5.$$

6. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен φ. Найти угол при вершине между двумя боковыми ребрами пирамиды.

7. Найти минимальное значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{3}{2}\,a^2 - a + 2. \end{cases}$$

8. Около трапеции $BCDE$ $(CD \parallel BE)$ описана окружность. Известно, что $CD = c$, $BE = b$, $\angle DBE = \alpha$. Найти радиус окружности.

1995 (март). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$1 + \cos x = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

2. Решить уравнение

$$5(6 - \log_2 x) = 2\log_4 x \cdot (\log_4 x - 3).$$

3. Решить уравнение

$$(0,2)^{x^2} \cdot 5^{17-2x} = 25.$$

4. В прямоугольном треугольнике катет равен a, а биссектриса прямого угла равна l. Найти другой катет.

5. Решить неравенство

$$7^{-\log_3\left(x^2-8x\right)} \geqslant \frac{1}{49}.$$

6. В правильной четырехугольной пирамиде угол между боковым ребром и высотой пирамиды равен φ. Найти угол между боковым ребром и стороной основания пирамиды.

7. При каком значении a достигает максимального значения выражение xy, в котором x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x - y = 2a - 1, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}(4 - 2a + 3a^2)? \end{cases}$$

8. На окружности взяты последовательно точки K, L, M и N. Известно, что $LM \parallel KN$, $LM = m$, $KN = n$, $\angle LMK = \beta$. Найти радиус окружности.

1995 (май). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2^x \cdot 5^{x-1} = 0,2 \cdot 10^{2-x}.$$

2. Решить уравнение

$$4\log_9 x + 2 = \log_3(12x + 12).$$

3. Решить неравенство

$$\frac{x+2}{x} \leqslant \frac{x}{x+1}\,.$$

4. В остроугольном треугольнике BCD $BC = a$, $CD = ma$, $\angle BCD = \alpha$. Найти высоту CH и угол $\angle CBD$.

5. Решить уравнение

$$|\log_5(x+3)| > 1.$$

6. В трапеции $BCDE$ $(CD \parallel BE)$ диагонали пересекаются в точке O, $CD = c$, $BE = b$. Найти отношение площади треугольника COB к площади трапеции $BCDE$.

7. При каких значениях x числа $a_1 = \cos x$, $a_2 = (1/2)\sin 2x$, $a_3 = -\cos 3x$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше нуля?

8. В правильной треугольной пирамиде $SBCD$ (S — вершина) проведено сечение плоскостью, проходящей через точки C и D и делящей ребро SB в отношении $m : n$, считая от вершины S. Известно, что расстояние от центра основания BCD до плоскости сечения равно d, а объем пирамиды $SBCD$ равен V. Найти площадь сечения.

1995 (май). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$3^{x-3} \cdot 5^{x-1} = \frac{15^{3-x}}{9}\,.$$

2. Решить уравнение

$$1-\log_7(4x+3)+4\log_{49}x=0.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{x+2}{x+1}\geqslant\frac{x}{x+2}\,.$$

4. В остроугольном треугольнике LMN $LN=n$, $LM=m$, $\angle MLN=\alpha$. Найти медиану LK и угол $\angle LMN$.

5. Решить уравнение

$$|\log_2(x-5)|>3.$$

6. Диагонали трапеции $PQRS$ ($QR\parallel PS$) пересекаются в точке T, $QR=l$, $PS=m$. Найти отношение площади треугольника RTS к площади трапеции $PQRS$.

7. При некоторых значениях x числа $u_1=\cos x$, $u_2=\sin x$, $u_3=$ $=1-\cos 2x$ образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой больше нуля. Найти эти значения x.

8. В правильной треугольной пирамиде $SLMN$ (S — вершина) плоскость сечения проходит через точки L и N, отстоит на расстояние d от середины апофемы грани LSN и делит ребро SM в отношении $m:n$, считая от точки M. Известно, что объем пирамиды $SLMN$ равен V. Найти площадь сечения.

1995 (июль). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 5x+\sin x=\sin 3x.$$

2. Решить уравнение

$$25^{x+1}+5^{x+2}-50=0.$$

3. Решить уравнение

$$2|x-1|=2+x.$$

4. В треугольнике даны два угла α и β и радиус R описанной окружности. Найти высоту, опущенную из вершины угла α.

5. Решить неравенство

$$9^{\log_3 x} + 3x^2 < 16.$$

6. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно b, а двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти объем пирамиды.

7. Для всех значений a решить неравенство

$$2^{\sqrt{x-1}} > 3^{a+1}.$$

8. В окружности хорда BC параллельна диаметру AD. Через точку A проведена касательная к окружности, пересекающая прямые DB и DC соответственно в точках M и N. Известно, что $AM = m$, $AN = n$. Найти AD.

1995 (июль). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos 5x - \cos 7x = \sin 6x.$$

2. Решить уравнение

$$4^{x-1} - 2^{x-2} - 3 = 0.$$

3. Решить уравнение

$$3|x+2| = 6 - x.$$

4. В треугольнике даны два угла β и γ и радиус r вписанной окружности. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

5. Решить неравенство

$$49^{\log_7 x} + 18 > 3x^2.$$

6. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно b, а двугранный угол при основании равен β. Найти объем пирамиды.

7. Для всех значений m решить неравенство

$$2^{\sqrt{2+x}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2-m}.$$

8. Катет KM прямоугольного треугольника KLM служит диаметром окружности, пересекающей гипотенузу LM в точке A. Хорда AB параллельна катету KM. Прямая MB пересекает катет KL в точке C. Известно, что $LK = l$, $CK = c$. Найти KM.

1996 (март). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$1 - \cos 3x = \sin 3x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1-2x}{x-5} < \frac{1}{3-x}\,.$$

3. Решить уравнение

$$7^{2x} = [6 - (0,7)^x] \cdot 100^x.$$

4. Отношение длин двух пересекающихся окружностей равно $\sqrt{3}$. Общая хорда этих окружностей стягивает в меньшей из них дугу в $120°$. Найти стягиваемую этой хордой дугу большей окружности.

5. Решить уравнение

$$\log_{25} x^6 + \log_5\left(-x^5\right) = 5.$$

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SBCDE$ с вершиной S боковое ребро равно b, а двугранный угол между смежными боковыми гранями равен α. Найти объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ BD основания и середину бокового ребра SC.

7. Для любого допустимого значения a решить неравенство

$$2 - \log_a(x-3) < \log_a x.$$

8. В остроугольном треугольнике BCD проведена высота CE и из точки E опущены перпендикуляры EM и EN на стороны BC и CD. Известно, что $CE = b$, $MN = a$. Найти угол $\angle BCD$.

1996 (март). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\,(1+\cos 2x) = \sin 2x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{4-x} > \frac{2x-5}{x-2}\,.$$

3. Решить уравнение

$$[3\cdot(0,75)^x + 4]\cdot 16^x = 3^{2x}.$$

4. Две пересекающиеся окружности имеют общую хорду, которая стягивает в них дуги в 120° и 60°. Найти отношение площади большего круга к площади меньшего круга.

5. Решить уравнение

$$\log_3\left(-x^5\right) + 1 = \log_9 x^2.$$

6. В правильной треугольной пирамиде $SLMN$ с вершиной S боковое ребро равно l, а двугранный угол между боковыми гранями равен β. Найти объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания пирамиды $SLMN$, середину бокового ребра SM и параллельной ребру LN.

7. Для любого допустимого значения b решить неравенство

$$\log_b(x+3) + \log_b x < 2.$$

8. В остроугольном треугольнике PQR угол $\angle QPR$ равен α. Из вершины P проведена высота PS и из точки S опущены перпендикуляры SA и SB на стороны PQ и PR. Известно, что $AB = a$. Найти длину отрезка PS.

1996 (май). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 2x + 8\sin x = 3.$$

2. В арифметической прогрессии сумма первых пяти членов равна 65, а сумма третьего и четвертого членов равна 30. Найти первый член и разность прогрессии.

3. Решить неравенство

$$-3 < |x^2 - 9| < 16.$$

4. В трапеции $BCDE$ $(CD \| BE)$ $DE = b$, а расстояние от середины отрезка BC до прямой DE равно d. Найти площадь трапеции.

5. Решить неравенство

$$4^{x+1} + 2^{x+2} - 8 < 0.$$

6. В окружности радиуса R проведены диаметр BC и хорда BD. Хорда PQ, перпендикулярная диаметру BC, пересекает хорду BD в точке M. Известно, что $BD = a$, $PM : MQ = 1 : 3$. Найти BM.

7. В правильной четырехугольной пирамиде отношение бокового ребра к стороне основания равно $\sqrt{5}/2$, а радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен 1. Найти объем пирамиды.

8. Для любого значения a решить уравнение

$$(\log_5 2)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_4 25)^{\sqrt{x^2-3a-5}}.$$

1996 (май). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$1 + 4\cos x = \cos 2x.$$

2. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 40, а сумма второго и четвертого членов этой прогрессии равна 80. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

3. Решить неравенство

$$-2 < |4 - x^2| < 21.$$

4. Площадь трапеции $KLMN$ ($LM \| KN$) равна S, а расстояние от середины стороны MN до прямой KL равно m. Найти сторону KL.

5. Решить неравенство

$$9^{x+0,5} - 3^{x+1} - 18 > 0.$$

6. В окружности радиуса R проведены взаимно перпендикулярные хорда BC и диаметр KM. Хорда KL пересекает хорду BC в точке D. Известно, что $KL = b$, $CD : DB = 2$. Найти KD.

7. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $3\sqrt{3}$, а радиус сферы, описанной около пирамиды, равен 3. Найти объем пирамиды.

8. Для любого значения b решить уравнение

$$(\log_9 49)^{\sqrt{x-b-1}} = (\log_7 3)^{\sqrt{x^2+b^2-4b-2}}.$$

1996 (июль). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 3x - \sin\left(7x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x-1}{x\sqrt{4+3x-x^2}} > 0.$$

3. Решить уравнение

$$6^{\frac{x}{2}} - 3 \cdot 6^{1-\frac{3x}{2}} = 3 \cdot 6^{-\frac{x}{2}}.$$

4. Через точку L окружности проведены касательная и хорда LM длины 5. Хорда MN параллельна касательной и равна 6. Найти радиус окружности.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(3y^2 - x^2) = 3, \\ 8\log_{16}(-x) + \log_2 y^2 = 4. \end{cases}$$

6. В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d, образует с боковыми гранями углы β и γ. Найти объем параллелепипеда.

7. В равнобедренном треугольнике BCD ($BC = CD$) проведена биссектриса BE. Известно, что $CE = c$, $DE = d$. Найти BE.

8. Для каждого значения a найти число решений уравнения

$$a \operatorname{ctg} x - 1 = \cos 2x,$$

принадлежащих промежутку $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

1996 (июль). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 3x = \cos x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x+1}{(2-x)\sqrt{8+2x-x^2}} < 0.$$

3. Решить уравнение

$$2^{\frac{3x}{2}} - 2^{5-\frac{x}{2}} = 2^{2+\frac{x}{2}}.$$

4. Одна из двух параллельных прямых касается окружности в точке D, а другая пересекает окружность в точках B и C. Известно, что $BC = 24$, $DC = 20$. Найти радиус окружности.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3 (2x^2 - 9y^2) = 2, \\ \log_3 x^2 + 4\log_9 (-y) = 2. \end{cases}$$

6. Диагональ прямой прямоугольной призмы образует с плоскостью основания и одной из боковых граней соответственно углы β и γ. Высота призмы равна H. Найти объем призмы.

7. В $\triangle KLM$ $KL = LM$, MN — биссектриса, $LN = l$, $KN = k$. Найти MN.

8. Для каждого значения a найти число решений уравнения

$$\cos x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = a \cos 2x,$$

принадлежащих промежутку $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

1997 (март). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin x - \sin 3x = 4\sin^2 x \cdot \cos x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{3x}{x^2 - 9} \leqslant \frac{1}{x+2}.$$

3. Решить уравнение

$$\log_{100}\left(\frac{x^2}{9}\right) + \log_{10}(x + 13) = 1.$$

4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 40, а радиус описанной окружности равен 25. Найти радиус вписанной окружности.

5. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} < 25^{-\frac{1}{x}}.$$

6. На стороне AB треугольника ABC взята точка F, а на продолжении стороны AC за точку C взята точка D, причем $FB = CD$. Отрезки FD и BC пересекаются в точке, которая делит отрезок FD в отношении $m : n$, считая от точки F. Найти отношение $AB : AC$.

7. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_a(x^2 + 2) > 1$$

выполняется для всех значений x.

8. Точка M, не лежащая в плоскости прямоугольника $PQRS$, удалена от трех его вершин на расстояния $MP = 3$, $MQ = 4$, $MR = 5$. Найти MS.

1997 (март). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos x - \cos 3x = 4\sin^3 x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{3x}{x^2 - 25} \geqslant \frac{2}{x+1}\,.$$

3. Решить уравнение

$$\log_{36}\left(x^2\right) + \log_6(x + 5) = 1.$$

4. В треугольнике BCD $BC = CD$, $BC : BD = 5 : 8$, а радиус описанной окружности равен 25. Найти радиус вписанной окружности.

5. Решить неравенство

$$4^{x-1} < \frac{16}{2^{\frac{4}{x}}}\,.$$

6. На сторонах угла KLM взяты точки P и Q так, что точка P лежит между L и K, точка Q лежит между L и M, а отрезки

PM и KQ пересекаются в точке N. Известно, что $PK = QM$, $LP : LM = k$. Найти отношение $KN : NQ$.

7. Найти все значения b, при которых неравенство

$$\log_b(x^2+5) > 1$$

выполняется для всех значений x.

8. В треугольной пирамиде $SKLM$ угол KLM — прямой, $SK = 5$, $SL = 6$, $SM = 7$. Найти расстояние от вершины S до точки N такой, что $KLMN$ — прямоугольник.

1997 (май). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 2x + \cos 6x = -\sqrt{3}\cos 4x.$$

2. Решить уравнение

$$49^{x+1} + 6\cdot 7^x - 6^{-\log_6 7} = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+2x+9} \leqslant x + |\,2x-3\,|.$$

4. Высота правильной треугольной пирамиды в четыре раза больше радиуса окружности, вписанной в ее основание. Объем пирамиды равен 36. Найти сторону основания пирамиды.

5. Решить неравенство

$$\log_6 \log_{\frac{1}{\sqrt[6]{6}}}(x+1) > 1.$$

6. На сторонах острого угла с вершиной N взяты точки L и M. На продолжении луча NL за точку N взята точка P на расстоянии $7\cdot MN$ от прямой MN, а на продолжении луча NM за точку N — точка Q на расстоянии $7\cdot LN$ от прямой LN. Радиус окружности, описанной около треугольника LMN, равен 1. Найти PQ.

7. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x-3a-1}{x+2a-2} \leqslant 0$$

выполняется для всех x из промежутка $2 \leqslant x \leqslant 3$.

8. Двугранный угол между смежными боковыми гранями правильной треугольной пирамиды равен β, а радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен r. Точки касания шара с боковыми гранями пирамиды, а также центр вписанного шара служат вершинами второй пирамиды. Найти объем этой второй пирамиды.

1997 (май). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin 9x - \sin 5x = \sqrt{3}\cos 7x.$$

2. Решить уравнение

$$4^{x+3} - 7 \cdot 2^{x+3} + 2^{\log_2 3} - 11 = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + 3x + 9} + 2x \leqslant 3|\, x + 1\,|.$$

4. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна стороне ее основания. Объем пирамиды равен 12. Найти высоту пирамиды.

5. Решить неравенство

$$\log_7 \log_{\frac{1}{\sqrt[7]{7}}} (x - 4) < 1.$$

6. На сторонах тупого угла с вершиной F взяты точки D и E. На луче FD взята точка S на расстоянии $2 \cdot EF$ от прямой EF, а на луче FE — точка T на расстоянии $2 \cdot DF$ от прямой DF. Радиус окружности, описанной около треугольника DEF, равен 4. Найти ST.

7. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x + 3a - 2}{x - 2a - 1} \leqslant 0$$

выполняется для всех x из промежутка $3 \leqslant x \leqslant 4$.

8. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол между смежными боковыми гранями равен β, а радиус вписанного шара равен r. Точки касания шара с боковыми гранями пирамиды, а также центр вписанного шара служат вершинами второй пирамиды. Найти объем этой второй пирамиды.

1997 (июль). Вариант 1

1. Решить уравнение
$$\cos 6x + 6\cos 2x = 0.$$

2. Решить уравнение
$$6 \cdot \frac{2^{x-3}}{2^x - 3^x} = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

3. Решить неравенство
$$\sqrt{\log_4 (x-5)} > \log_{\frac{1}{4}} \frac{64}{x-5}\,.$$

4. Прямая, параллельная стороне BC треугольника BCD, пересекает сторону CD в точке M, а сторону BD — в точке N. Площадь треугольника MDN в два раза меньше площади трапеции $BCMN$. Найти $DN : NB$.

5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y - |x-3| = 1, \\ |x-y| = 3. \end{cases}$$

6. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 6, 7, 11. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найти высоту пирамиды.

7. Для любых значений a решить неравенство
$$(a+4)\sqrt{5-x} > a+3.$$

8. В трапеции $BCDE$ $CD \| BE$, $\angle BCD = 90°$. Прямая, перпендикулярная стороне DE, пересекает сторону BC в точке M, а сторону DE — в точке N. Известно, что $MD = a$, а расстояния от точек B и E до прямых CN и MD равны соответственно b и c. Найти CN.

1997 (июль). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin 3x - 7\sin x = 0.$$

2. Решить уравнение

$$15 \cdot \frac{3^{x-3}}{3^x - 2 \cdot 5^x} = 1 + 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27(x+4)} > 5\sqrt{\log_3 (x+4)}$$

4. Прямая, параллельная стороне MN треугольника LMN, пересекает сторону LM в точке A, а сторону LN — в точке B. Площадь трапеции $AMNB$ в пять раз больше площади треугольника ABL. Найти $MA : ML$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y - |x+2| = 2, \\ |x+y| = 5. \end{cases}$$

6. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 13. Найти объем пирамиды.

7. Для любых значений a решить неравенство

$$(4-a)\sqrt{4-x} > 3-a.$$

8. В трапеции $KLMN$ $LM \| KN$, $\angle LMN = 90^\circ$. Прямая, перпендикулярная стороне KL, пересекает сторону KL в точке B, а сторону MN — в точке C. Известно, что $KC = a$, а расстояния от точек L и M до прямых KC и BN равны соответственно b и c. Найти BN.

1998 (март). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 3x - \cos 2x \cdot \sin x = 0.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{4x - x^2 - 3} = 3x - 6.$$

3. Решить неравенство

$$3^{\frac{2x-15}{x}} > \sqrt[3]{27^{2x+15}}.$$

4. В трапеции $BCDE$, описанной около окружности, $CD \| BE$, $BC = DE$, $\angle BCD = 135^\circ$. Площадь трапеции равна 30. Найти BC.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5^{\log_4(2x-y)} = 1, \\ 9^{3x-2y} - 6 \cdot 3^{3x-2y} = 27. \end{cases}$$

6. В правильной треугольной пирамиде $SBCD$ площадь сечения, проходящего через боковое ребро SC и высоту SO пирамиды, в два раза меньше площади основания пирамиды. Боковое ребро равно $\sqrt{21}$. Найти площадь боковой грани пирамиды.

7. В $\triangle BCD$ $\angle CBD = \alpha$, $BC = b$. Вписанная окружность касается сторон BD и CD в точках K и L, биссектриса угла CBD пересекает прямую KL в точке M. Найти расстояние от точки M до прямой BC.

8. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \log_5(y+6) - 2\log_{25} x = 0, \\ (x+a)^2 + 2y - a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

1998 (март). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos 2x \cdot \cos 3x - \cos 5x = 0.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{5x - x^2 + 6} = 5 - 2x.$$

3. Решить неравенство

$$5^{\frac{3x-4}{x}} > \sqrt[3]{125^{2x+12}}.$$

4. Окружность вписана в равнобедренную трапецию, у которой площадь равна 40, а тупой угол равен 150°. Найти боковую сторону трапеции.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5^{\log_7(y-x)} = 1, \\ 4^{5y-6x} - 5 \cdot 2^{5y-6x} = 24. \end{cases}$$

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SKLMN$ площадь сечения, проходящего через боковое ребро SM и высоту SH пирамиды, в три раза меньше площади основания пирамиды. Боковое ребро равно $\sqrt{26}$. Найти площадь боковой грани пирамиды.

7. Окружность вписанная в $\triangle LMN$, касается сторон угла MLN в точках B и C. Биссектриса угла LNM пересекает прямую BC в точке K. Известно, что $\angle LNM = \beta$, $MN = a$. Найти расстояние от точки K до прямой MN.

8. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 2\log_9(y+1) - \log_3 x = 0, \\ 2(4y + 5a) - (x + a)^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

1998 (май). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 5x - \sin 2x \cdot \cos 3x + \cos x = 0.$$

2. Решить неравенство

$$|\, x^2 + 3x - 4 \,| > x.$$

3. Решить уравнение

$$81^{\frac{2}{x}} + 12 \cdot 3^{\frac{4}{x}-1} - 21 = 0.$$

4. Окружности радиусов 3 и 5 внешним образом касаются друг друга в точке A и каждая из них касается сторон угла. Их общая касательная, проходящая через точку A, пересекает стороны этого угла в точках B и C. Найти BC.

5. Решить неравенство

$$\log_2 \left\{ \log_{\frac{9}{16}} \left(\left(\frac{5}{4}\right)^x - \frac{1}{4} \right) \right\} \leqslant -1.$$

6. В правильной треугольной пирамиде $SBCD$ S — вершина, SO — высота, $SB = 3$, $BC = 2$. Через точки S, B, C проведена сфера так, что прямая SO лежит в касательной плоскости к сфере. Найти радиус сферы.

7. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - ax + 7) < -1.$$

выполняется для всех x из промежутка $x < 0$.

8. В треугольнике BCD DA — биссектриса, $CD = b$, $BD = c$ $(b < c)$. Через точку A проведена прямая, перпендикулярная DA и пересекающая сторону BD в точке M. Найти DM.

1998 (май). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin 4x + \sin 3x \cdot \sin x + \sin 2x = 0.$$

2. Решить неравенство

$$|\, x^2 + 2x - 3 \,| > x.$$

3. Решить уравнение

$$64^{\frac{1}{x}} + 4 \cdot 2^{\frac{3}{x}-1} - 24 = 0.$$

4. Окружности радиусов 4 и 5 с центрами O_1 и O_2 внешним образом касаются друг друга в точке D. Их общая касательная, проходящая через точку D, пересекает их другие общие касательные в точках M и N. Найти площадь четырехугольника O_1MO_2N.

5. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left\{\log_{\frac{64}{27}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{1}{3}\right)\right\} \geqslant 1.$$

6. В правильной четырехугольной пирамиде SH — высота, боковое ребро SM равно 8, сторона основания MN равна 4. Через точки S, M, N проведена сфера так, что прямая SH лежит в касательной плоскости к сфере. Найти радиус сферы.

7. Найти все значения b, при которых неравенство

$$\log_7(x^2 + 6bx + 10) > 1.$$

выполняется для всех x из промежутка $x > 0$.

8. В треугольнике AMB $AM = MB$, MK — биссектриса. Через точку K проходит прямая, пересекающая стороны угла AMB в точках L и N (N между A и M), $MN = a$, $ML = b$. Найти AN.

1998 (июль). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$4\cos x\cdot\sin 3x\cdot\cos 4x+\sin 2x=0.$$

2. Решить уравнение

$$\log_5(x+1)-\log_{25}(x^2-4x+4)=\log_5 2.$$

3. Решить неравенство

$$25^{\frac{2x+1}{2}}-2^{\frac{2x+3}{2}}<2^{\frac{2x+7}{2}}+5^{2x}.$$

4. Медианы BM и DN треугольника BCD пересекаются в точке O. Известно, что $\angle CBD=\alpha$, $\angle CDB=\beta$, $BD=b$. Найти расстояние от точки O до прямой BD.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+|x+y|=0,\\ y-2+\sqrt{x-y+5}=0. \end{cases}$$

6. На отрезке AC взята точка B, отрезки AC и BC служат диаметрами окружностей. Хорда AN касается меньшей окружности в точке D. Прямая CD пересекает бóльшую окружность в точке M, $\angle DAC=\alpha$, $AC=2R$. Найти площадь четырехугольника $ACNM$.

7. Для любых допустимых значений a решить неравенство

$$\log_a\left(2a^x-5\right)<x+1.$$

8. В правильной треугольной призме $BCDB_1C_1D_1$ ($BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) угол между прямыми BC_1 и B_1D равен α, $BB_1=2$. Найти BC.

1998 (июль). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin 2x = 4\cos 4x \cdot \cos 3x \cdot \sin x.$$

2. Решить уравнение

$$\log_6(x-3) - \log_{36}(x^2 - 12x + 36) = \log_6 2.$$

3. Решить неравенство

$$2^{2x+3} + 3^{\frac{2x+1}{2}} > 3^{\frac{2x+5}{2}} - 4^x.$$

4. В треугольнике LMN $\angle LMN = \alpha$, $\angle MNL = \beta$, $MN = b$. Медианы MA и NB пересекаются в точке O. Найти расстояние от точки O до прямой MN.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2 + |x + y - 2| = 0, \\ y - 2 + \sqrt{x - y + 3} = 0. \end{cases}$$

6. На отрезке AC взята точка B, отрезки AC и AB служат диаметрами окружностей. Хорда CK касается меньшей окружности в точке D. Прямая AD пересекает бóльшую окружность в точке L, $\angle DCA = \alpha$, $AC = 2R$. Найти площадь четырехугольника $AKLC$.

7. Для любых допустимых значений a решить неравенство

$$x + 1 - \log_a(3a^x - 8) > 0.$$

8. В правильной треугольной призме $LMNL_1M_1N_1$ $(LL_1 \parallel MM_1 \parallel \ \parallel NN_1)$ угол между прямыми MN_1 и L_1N равен α, $LM = 2$. Найти NN_1.

1999 (март). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 6x = \cos 5x + \sin 4x.$$

2. Решить уравнение

$$2^{5x-4} - 32^{x-2} + 5 \cdot 64^{\frac{5x-4}{6}} = 383.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+2) - 2\log_{49}(x+8) > -2.$$

4. В $\triangle BCD$ $BC = CD$, $\angle CBD = 45^\circ$. Прямая KL пересекает сторону BD в точке K, а сторону CD — в точке L, $DK = 2 \cdot KB$, $\angle LKD = 30^\circ$. Найти отношение площади треугольника KLD к площади четырехугольника $BCLK$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3x+2} - |y+2| = 0, \\ 2\sqrt{y^2+4y+4} + \sqrt{x^2-x-2} = 0. \end{cases}$$

6. Внутри острого угла BCD взята точка A. Одна окружность проходит через точку A, касается прямой BC в точке C и второй раз пересекает прямую CD в точке D. Вторая окружность проходит через точку A, касается прямой CD в точке C и еще раз пересекает прямую CB в точке B. Известно, что $AD = a$, $CB = b$, $AB = c$. Найти CD.

7. Для любых допустимых значений a решить уравнение

$$\log_a(x^2 - 4a) = \log_a(a^2 + 4x).$$

8. Сфера касается основания $KLMN$ правильной четырехугольной пирамиды $SKLMN$ в его центре и проходит через вершину S. Известно, что $SK = b$, $\angle KSL = \beta$. Найти длину линии пересечения сферы с поверхностью пирамиды.

1999 (март). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos 12x = \sin 5x + \cos 2x.$$

2. Решить уравнение

$$5^{3x-2} + 125^{x-1} + 25^{\frac{3x}{2}} = 131.$$

3. Решить неравенство

$$4\log_{\frac{1}{25}}(3-x) - \log_{\sqrt{5}}(7-x) < -6.$$

4. На стороне LN $\triangle LMN$, в котором $LM = MN$, $\angle MLN = 30^\circ$, взята точка A, а на стороне LM — точка B так, что $NA = 3 \cdot AL$, $\angle BAL = 45^\circ$. Найти отношение площади четырехугольника $ABMN$ к площади треугольника ABL.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x-6} - |3y+2| = 0, \\ 5\sqrt{9y^2+12y+4} + \sqrt{x^2-3x+2} = 0. \end{cases}$$

6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность, и к этой окружности в точке B проведена касательная BD. Другая окружность касается прямой AC в точке C, проходит через точку B и второй раз пересекает прямую BD в точке D. Известно, что $BD = a$, $AC = b$, $AB = c$. Найти CD.

7. Для любых значений a решить уравнение

$$\sqrt{2^{x^2-4a} - 32} = \sqrt{2^{a^2+4x} - 32}\,.$$

8. В правильной треугольной пирамиде $SBCD$ высота SH равна h, $\angle BSC = \alpha$. Сфера проходит через вершину S и касается основания BCD в точке H. Найти длину линии пересечения сферы с поверхностью пирамиды.

1999 (май). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos x - \sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} = 0.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{2x+3} = x+7.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_{25}(x+2)} \leqslant \frac{2}{\log_5(x+6)}\,.$$

4. В треугольнике BCE взяты точка L на стороне BC, а точка K — на стороне BE. Отрезки EL и CK пересекаются в точке O, $BL:LC = 3:5$, $EO:OL = 2:1$. Найти $BK:KE$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\left(\frac{y}{x}+\frac{8x}{y}\right)} = 64, \\ \sqrt{y}-\sqrt{3x} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\,. \end{cases}$$

6. В ромбе $BCDE$ высоты CM и CN пересекают диагональ BD в точках P и Q (P между B и Q), $PQ = p$, $QD = q$. Найти MN.

7. При каких значениях a уравнение

$$\cos 2x + 2\sin x + 2a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $0 \leqslant x < 2\pi$?

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel \parallel CC_1 \parallel DD_1$) $AB = BC = 3a$, $AA_1 = a$. Плоскость сечения проходит через точки B и D_1 параллельно прямой A_1C_1. Найти радиус шара, касающегося этого сечения и трех граней параллелепипеда с общей вершиной D.

1999 (май). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin 2x - \sin\frac{5x}{4}\cdot\cos\frac{3x}{4} = 0.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3} = x+5.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_{16}(x+3)} \geqslant \frac{4}{\log_2(x+9)}\,.$$

4. В треугольнике LMN взяты точка B на стороне MN, а точка D — на стороне LN. Отрезки LB и MD пересекаются в точке O, $LD : DN = 2 : 3$, $LO : OB = 3 : 2$. Найти $MO : OD$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7^{\left(\frac{x}{4y}+\frac{3y}{x}\right)} = 49, \\ \sqrt{7y} - \sqrt{2x} = \dfrac{3}{2+\sqrt{7}}\,. \end{cases}$$

6. Высоты QA и QB ромба $PQRS$ пересекают его диагональ PR в точках M и N (M между P и N), $AB = p$, $MN = q$. Найти PN.

7. При каких значениях a уравнение

$$\cos 2x + 2\,(2a-1)\cos x + 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно три решения на промежутке $0 \leqslant x < 2\pi$?

8. В прямоугольном параллелепипеде $KLMNK_1L_1M_1N_1$ ($KK_1 \parallel \parallel LL_1 \parallel MM_1 \parallel NN_1$) $LM = MN = b$, $MM_1 = 3b$. Плоскость сечения проходит через точки K_1 и M параллельно прямой L_1N_1. Найти радиус шара, касающегося этого сечения и трех граней параллелепипеда с общей вершиной K.

1999 (июль). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 9x + \cos 5x + 2\sin^2 x = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\left|2 - \frac{1}{x-3}\right| < 3.$$

3. Около окружности описана равнобочная трапеция $BCDE$ ($CD \parallel BE$), площадь которой равна $2\sqrt{2}/3$, $CD : BE = 1 : 2$. Найти BC.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{8}{2^{3-x}} + 2 \cdot 5^{y+1} = 25, \\ 3 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{20}{5^{1-y}} = 52. \end{cases}$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{1 - \frac{4}{2-x}} = \frac{1}{2-x}\,.$$

6. Вне окружности с центром O взяты точки B и C так, что $OB = OC$, а касательные к окружности, проходящие через B и C, пересекаются в точке N, $ON < OB$, $BN \neq CN$. Известно, что $OB = a$, $BN = b$, $CN = c$. Найти ON.

7. В правильной треугольной пирамиде $SBCD$ с вершиной S боковое ребро SB равно b. Сфера радиуса $b/3$ касается плоскости SBC в точке B и проходит через точку D. Найти $\angle DSC$.

8. Для любого допустимого значения b решить неравенство

$$\log_{2b}\left(\log_7 x^2\right) > 1$$

и найти, при каком значении b множество точек x, не являющихся решениями неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 14?

1999 (июль). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin 5x - \sin x + 1 = 2\cos^2\left(\frac{3x}{2}\right).$$

2. Решить неравенство

$$\left|3 + \frac{1}{x+2}\right| < 5.$$

3. Около трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) описана окружность, и в ту же трапецию вписана другая окружность, $BC : AD = 1 : 5$, площадь трапеции равна $3\sqrt{5}/5$. Найти высоту трапеции.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 7^{x+1} - \dfrac{27}{3^{2-y}} = 21, \\ \dfrac{21}{7^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 51. \end{cases}$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{6}{x-3} + 1} = \frac{1}{x-3}.$$

6. Из точки K проведены две касательные к окружности с центром O. На одной из этих прямых взята точка L, а на другой прямой взята точка M так, что $OL = OM$, $OL < OK$, $KL \neq KM$. Известно, что $KL = b$, $OK = k$, $OM = m$. Найти‘MK.

7. В правильной четырехугольной пирамиде $SKLMN$ с вершиной S боковое ребро SK равно b. Сфера радиуса $b/2$ касается плоскости SKL в точке K и проходит через точку N. Найти $\angle MSN$.

8. Для любого допустимого значения n решить неравенство

$$\log_{4n}\left(\log_2 x^2\right) > 1$$

и найти, при каком значении n множество точек x, не являющихся решениями неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 4?

2000 (март). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 3x + \sin 4x = \sin 7x.$$

2. Решить уравнение

$$5^{\sqrt{x}-1} - 24 \cdot 5^{-\sqrt{x}-1} = 1.$$

3. Решить неравенство

$$x^2 + \sqrt{3x^3} > x.$$

4. В $\triangle BCD$ CE — медиана, $CE = m$, $BC = a$, $BD = c$. Найти $\angle CBD$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{6}} x + 2\log_6 y = 2, \\ \log_{27}(3y - 3x - 1)^3 + \log_3(3y - 3x + 1) = \log_3 8. \end{cases}$$

6. В правильной треугольной пирамиде высота равна 6, а объем равен $72\sqrt{3}$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду.

7. При каких значениях b уравнение

$$25^{-x} - (2b+5)5^{-x+\frac{1}{x}} + 10b \cdot 5^{\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два решения?

8. Через точки K и L, лежащие на окружности, проведены касательные, пересекающиеся в точке M. Секущая MB пересекает эту окружность в точках A и B, а хорду KL — в точке N. Известно, что $MA : MB = 2 : 5$. Найти $MN : NB$.

2000 (март). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin 3x - \sin 2x = \sin 5x.$$

2. Решить уравнение

$$4 \cdot 3^{-\sqrt{x}} + 1 = 3^{\sqrt{x}-2}.$$

3. Решить неравенство

$$3x - \sqrt{2x^3} < x^2.$$

4. В $\triangle BCD$ BE — биссектриса, $BE = l$, $BD = b$, $\angle CBD = \alpha$. Найти BC.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} y = 2, \\ \log_8(x-y-1)^3 + \log_2(x-y+1) = \log_2 3. \end{cases}$$

6. В правильной треугольной призме боковое ребро равно 2, а объем равен $2\sqrt{3}/3$. Найти радиус сферы, описанной около призмы.

7. При каких значениях a уравнение

$$4^x - (a+2)2^{x-\frac{1}{x}} + 2a \cdot 2^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два решения?

8. На стороне BC $\triangle ABC$ взята точка M. Окружность касается прямых AB и AC в точках B и C и пересекает прямую AM в точках E и D, $AE : ED = 3 : 4$. Найти $EM : MD$.

2000 (май). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\frac{\cos 6x}{\cos 2x} - 6\cos 2x + 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + |3-x| - 10} > x - 3.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{2^x} + \left(\sqrt{2}\right)^x - \sqrt{2} \cdot 2^x + \sqrt{2} = 0.$$

4. В трапеции $PQRS$ $QR \parallel PS$, $PS = 3 \cdot QR$. Прямая пересекает боковые стороны в точках A и B, $PA : AQ = 2 : 5$, $RB : BS = 3 : 7$. Найти отношение площадей четырехугольников $AQRB$ и $PABS$.

5. Решить уравнение

$$2\sqrt{\log_4^2(2x-1)} = 3 - \log_2(x+3).$$

6. В треугольной пирамиде $SBCD$ $SD \perp BC$, $SD \perp BD$, $BC = CD = 4$, $BD = 3$, $SD = 4$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

7. Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$a^x(a-2)^x - 2a^{x+1} - (a-2)^x + 2a \leqslant 0$$

и найти, при каких значениях a множество решений неравенства представляет собой промежуток длины 2.

8. В остроугольном $\triangle BCD$ $BC \neq CD$, высота CE пересекает полуокружность с диаметром BD в точке F, H — точка пересечения высот $\triangle BCD$, $CE = a$, $CH = b$. Найти FE.

2000 (май). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} + 4\sin x + 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + |x-2| - 5} > x - 2.$$

3. Решить уравнение

$$6\sqrt{7^x} + \left(\sqrt{7}\right)^x - \sqrt{7} \cdot 7^x + \sqrt{7} = 0.$$

4. В трапеции $KLMN$ $LM \parallel KN$, $KN = 2 \cdot LM$. На сторонах KL и MN взяты соответственно точки B и C, $KB : BL = 4 : 3$, $MC : CN = 5 : 2$. В каком отношении прямая BC делит площадь трапеции?

5. Решить уравнение

$$3\sqrt{\log_{27}^2(x+1)} = 2 - \log_3(2x+3).$$

6. В треугольной пирамиде $SLMN$ $SL \perp MN$, $SL \perp LN$, $LM = MN = 3$, $LN = 2$, $SL = 2$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

7. Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$a^x(a-1)^x - 3a^{x+1} - (a-1)^x + 3a \leqslant 0$$

и найти, при каких значениях a множество решений неравенства представляет собой промежуток длины 2.

8. Прямая, перпендикулярная диаметру LM некоторой окружности, пересекает его в точке N ($LN \neq NM$), а окружность — в точках A и B. На этой прямой взята точка K (A между K и N), H — точка пересечения высот $\triangle KLM$, $KN = a$, $HN = b$. Найти AN.

2000 (июль). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$5\sin 6x + \frac{2}{\cos 2x} = 5\sin 2x.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x-1}\,.$$

3. Решить неравенство

$$\log_2 \frac{3x-5}{x-2} + 3\log_8 \frac{(x-2)^3}{3x-5} < 1.$$

4. На стороне CD треугольника BCD взята точка D_1, а на продолжении стороны BC взята точка C_1 (C между B и C_1). Длина отрезка CD_1 равна 88 % длины стороны CD, а длина отрезка BC_1 равна 125 % длины стороны BC. Сколько процентов площади $\triangle BCD$ составляет площадь $\triangle BC_1D_1$?

5. Решить уравнение

$$2 \cdot \left|2^{x-1} - 1\right| + \left|4^{\frac{x}{2}} - 3\right| = 1.$$

6. В $\triangle BCD$ $BC = b$, $CD = c$, точка O — центр описанной окружности. Прямая DA, перпендикулярная прямой CO, пересекает сторону BC в точке A. Найти AB.

7. При каких значениях a неравенство

$$(x^2 - (a+8)x - 6a^2 + 24a)\sqrt{3-x} \leqslant 0$$

имеет единственное решение?

8. Радиус основания конуса равен 4, а высота конуса равна 8. Точка B находится на расстоянии 4 от оси конуса и на расстоянии 6 от плоскости основания конуса. Прямая BD имеет с конусом единственную общую точку C и пересекает плоскость основания конуса в точке D. Расстояние от точки C до плоскости основания конуса равно 4. Найти расстояние от точки D до вершины конуса.

2000 (июль). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin 2x} - 5\cos 6x = 5\cos 2x.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{3x-10}\,.$$

3. Решить неравенство

$$\log_3 \frac{4x-7}{2x-3} + 2\log_9 \frac{(2x-3)^3}{4x-7} < 1.$$

4. На продолжении стороны MN треугольника LMN взята точка M_1 (M между M_1 и N), а на стороне LM взята точка L_1. Длина отрезка M_1N равна 110 % длины стороны MN, а длина отрезка L_1M равна 80 % длины стороны LM. Сколько процентов площади $\triangle LMN$ составляет площадь $\triangle L_1M_1N$?

5. Решить уравнение

$$7 \cdot \left| \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 1 \right| + \left| 5 - \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{x}{2}} \right| = 2.$$

6. В $\triangle LMN$ $MN = m$, $LN = n$, точка O — центр описанной окружности. Прямая MK, перпендикулярная прямой NO, пересекает продолжение стороны LN в точке K. Найти KL.

7. При каких значениях a неравенство

$$\left(-x^2 + (2a-6)\,x + 3a^2 + 18a\right)\sqrt{x+4} \geqslant 0$$

имеет единственное решение?

8. Образующая конуса равна $2\sqrt{17}$, а высота конуса равна 8. Точка L находится на расстоянии 4 от плоскости основания конуса и на расстоянии 2 от оси конуса. Прямая LN имеет с конусом единственную общую точку M и пересекает плоскость основания конуса в точке N. Расстояние от точки M до плоскости основания конуса равно 2. Найти расстояние от точки N до вершины конуса.

2001 (март). Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\frac{3^x + 2x - 35}{x - 4} \leqslant 2.$$

2. Решить уравнение

$$2\sin\left(3x^2\right) \cdot \cos 4x + \sin\left(4x - 3x^2\right) = 0.$$

3. Решить уравнение

$$10^x - 2^{x+1} - 5^{x+2} + 50 = 0.$$

4. В $\triangle BCD$ BL и DK — медианы, $\angle BCD = 120^\circ$. Окружность, проходящая через точки K, L и D, проходит также через точку B. Радиус этой окружности равен $2\sqrt{7}$. Найти площадь четырехугольника $BKLD$.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3}{2}\,\log_9(4x^2-3)} > \log_3\sqrt{4x^2-3}\,.$$

6. В правильной треугольной пирамиде $SLMN$, все ребра которой равны $3a$, на ребре SM взята точка A так, что $SA : AM = 2 : 1$. Через точку A проведена плоскость, параллельная ребру SL и высоте MK $\triangle LMN$. Найти периметр сечения пирамиды этой плоскостью.

7. Для любого значения a решить неравенство

$$5\,(2a+x)+9a\sqrt{2a+x}-2a^2>0.$$

8. На стороне острого угла LON взята точка M (M между O и L). Окружность проходит через точки M и L и касается луча ON в точке N. На дуге MN, не содержащей точки L, взята точка K. Расстояния от точки K до прямых LN, LM и MN равны соответственно l, m и n. Найти расстояние от точки K до прямой ON.

2001 (март). Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{3x+7^x-25}{x+8}\geqslant 3.$$

2. Решить уравнение

$$2\sin 3x\cdot\sin\left(4x^2\right)+\cos\left(4x^2+3x\right)=0.$$

3. Решить уравнение

$$20^x-4^{x+2}-5^{x+1}+80=0.$$

4. В $\triangle LMN$ точки B и C — середины сторон LM и MN, $\angle MNL=30^\circ$, $BC=2\sqrt{21}$. Точка N лежит на окружности, проходящей через точки L, B и C. Найти радиус этой окружности.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{5}{2}\log_4(5x^2-2)}>\log_2\sqrt{5x^2-2}\,.$$

6. В правильной треугольной пирамиде $SBCD$, все ребра которой равны $5a$, на ребре SD взята точка M так, что $SM : MD = 2:3$. Через точку M проведена плоскость, параллельная ребру SC

и биссектрисе DA $\triangle BCD$. Найти периметр сечения пирамиды этой плоскостью.

7. Для любого значения a решить неравенство

$$4\,(a-3x)-3a\sqrt{a-3x}-a^2>0.$$

8. Окружность пересекает одну сторону острого угла BOC в точках D и B (D между O и B) и касается другой стороны угла в точке C. На дуге BC, не содержащей точки D, взята точка A. Длины перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые CD, OC и BC, равны соответственно a, c и d. Найти расстояние от точки A до прямой BD.

2001 (май). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 3x=\frac{1}{2}\,\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin x.$$

2. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}\cdot 3^{\sqrt{2-x}}>\frac{1}{9}\,.$$

3. Решить неравенство

$$\log_5(x^3-x^2-6x)-2\log_{25}(x^2-3x)<\log_5 7.$$

4. В $\triangle BCD$ $\angle D$ — тупой, продолжения высот BM и DN пересекаются в точке O, $\angle BCD=\alpha$, $\angle CBD=\gamma$, $CD=b$. Найти расстояние от точки O до прямой CD.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |\cos y|\cos y=\dfrac{|\sin x|}{4\sin x}\,,\\ |\sin x-2|^2+|\cos y|^2=9. \end{cases}$$

6. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$, высота равна 6, а сторона основания равна 3. Шар, вписанный в пирамиду, касается граней LSM и MSK соответственно в точках A и B. Найти длину отрезка AB.

7. Для каждого целого значения m найти все решения уравнения

$$\log_{\left(2x^2+\frac{m^2}{2}\right)}(6x)^{m^2+2} = m^2 + 2.$$

8. На прямой взяты три различные точки K, L и M (L между K и M, $KL \neq LM$). На отрезках KL, LM и KM как на диаметрах построены полуокружности, середины которых — соответственно точки A, B и C. Точки A, B и C лежат по одну сторону от прямой KM. Найти отношение площади фигуры, ограниченной этими тремя полуокружностями, к площади $\triangle ABC$.

2001 (май). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x.$$

2. Решить неравенство

$$6^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{\sqrt{x+2}} < \frac{1}{36}.$$

3. Решить неравенство

$$2\log_{36}(x^2 - x) - \log_6(x^3 + 2x^2 - 3x) > \log_6\left(\frac{1}{5}\right).$$

4. В $\triangle LMN$ $\angle N$ — тупой, продолжения высот LA и NB пересекаются в точке O, $\angle LMN = \alpha$, $\angle LNM = \beta$, $LN = m$. Найти расстояние от точки O до прямой LN.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4|\sin x|\sin x = \dfrac{|\cos y|}{\cos y}, \\ |\sin x|^2 + |\cos y - 2|^2 = 9. \end{cases}$$

6. В правильной треугольной пирамиде $SLMN$ высота равна 8 и сторона основания равна 8. Шар касается боковых ребер LS, MS и NS соответственно в точках A, B и C, а также касается плоскости основания. Найти длину отрезка BC.

7. Для каждого целого значения n найти все решения уравнения

$$\frac{1}{4+n^2}\log_{\left(\frac{n^2}{2}+2x^2\right)}(4x)^{4+n^2}=1.$$

8. На прямой взяты три различные точки B, C и D (C между B и D, $BC \neq CD$). На отрезках BC, CD и BD как на диаметрах построены полуокружности, середины которых — соответственно точки L, M и N. Точка L лежит по одну сторону, а точки M и N — по другую сторону от прямой BD. Найти отношение площади фигуры, ограниченной этими тремя полуокружностями, к площади $\triangle LMN$.

2001 (июль). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(2x+5)\cdot\operatorname{ctg}(x+2)=1.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}}>\frac{1}{2x-1}\,.$$

3. Решить уравнение

$$2\cdot 4^{3x^2+5x}-4=7\cdot 8^{x^2+\frac{5x}{3}}.$$

4. В трапеции $PQRS$ $QR \parallel PS$, $\angle PQR=\pi/2$, $QR=q$, $PS=p$, $RS=b$. Через точки R и S проведена окружность, касающаяся прямой PQ в точке B. Найти площадь $\triangle BRS$.

5. Решить неравенство

$$\log_7\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)<\log_{\frac{1}{49}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right).$$

6. В пирамиде $SBCD$ $BC=5$, $CD=8$, $DB=11$. Радиус сферы, вписанной в пирамиду, равен $\sqrt{21}/6$. Высоты боковых граней, проведенные из вершины S, касаются этой вписанной сферы. Найти объем пирамиды.

7. Для каждого значения a найти все решения уравнения

$$\cos 2x + 2\sin^2(x+a) + 2 + \sin a = 0,$$

принадлежащие промежутку $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

8. В треугольнике BCD $\angle CBD = \pi/3$. Прямая, параллельная стороне BD, пересекает стороны BC и CD соответственно в точках K и L. На отрезках BL и DK как на диаметрах построены окружности. Их общая хорда пересекает отрезок KL в точке M, $KM : ML = 1 : \sqrt{3}$. Найти $\angle CDB$.

2001 (июль). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(3x+4) \cdot \operatorname{ctg}(7-x) = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3x-5}} > \frac{1}{4-x}.$$

3. Решить уравнение

$$9^{2x^2+5x} - 54 = 25 \cdot 9^{x^2+\frac{5x}{2}}.$$

4. Через вершину B $\triangle ABC$ проведена прямая, касательная к окружности, описанной около $\triangle ABC$. Расстояния от точек A и C до этой прямой равны a и c, $AC = b$. Найти площадь $\triangle ABC$.

5. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{27}}\left(\log_2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) > \log_3\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\right)\right).$$

6. Сфера радиуса $\sqrt{10}/6$, вписанная в пирамиду $SLMN$, касается боковых граней пирамиды в точках, лежащих на высотах, проведенных в боковых гранях из вершины S, $LM = 6$, $MN = 7$, $LN = 11$. Найти объем пирамиды.

7. Для каждого значения a найти все решения уравнения

$$\cos 2x + 2\cos^2(x+a) - 4 + \cos a = 0,$$

принадлежащие промежутку $\dfrac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{2}$.

8. В треугольнике LMN $\angle LMN = \pi/6$, $\angle NLM = \pi/4$. Прямая, параллельная стороне LM, пересекает стороны LN и NM соответственно в точках B и C. Отрезки LC и MB служат диаметрами окружностей, общая хорда которых пересекает отрезок BC в точке A. Найти $CA : AB$.

2002 (март). Вариант 1

1. Решить уравнение
$$2\cos^2 2x \cdot \operatorname{tg}(\sin x) - \cos 4x = 1.$$

2. Решить уравнение
$$2^{\log_x[x(9x^2-12x+4)]} - 2^{(\log_2 9)+\log_x(3x-2)} + 4 = 0.$$

3. Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{9-4x-x^2}}{x+3} < 1.$$

4. Хорда BC окружности радиуса 12 разделена точкой D на отрезки $BD = 8$ и $DC = 10$. Найти минимальное из расстояний от точки D до точек окружности.

5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3\sqrt{3x^2-y^4} = 2x - 7y, \\ 6\sqrt{3x^2-y^4} = x - 8y. \end{cases}$$

6. Конус вложен в двугранный угол так, что каждой грани двугранного угла принадлежит только одна образующая конуса. Двугранный угол равен β, а угол между осью конуса и ребром двугранного угла равен $\beta/2$. Найти угол в осевом сечении конуса при его вершине.

7. Для каждого значения a решить систему
$$\begin{cases} 9\log_{27}^2 x + 4\log_9^2 y \leqslant 4\,(a^2+2a), \\ \log_3^2 xy \geqslant 8\,(a^2+2a). \end{cases}$$

8. В прямоугольном $\triangle BCD$ ($\angle C$ — прямой) CA — высота. Вне $\triangle BCD$ взята точка O так, что $OB = OD = b$ и отрезок OC пересекает отрезок BD. Точка E — середина отрезка OC, $AE = a$. Найти CE.

2002 (март). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\sqrt{3}\sin^2 6x \cdot \operatorname{tg}(\cos x) + \cos 12x = 1.$$

2. Решить уравнение

$$3^{\log_{(x+2)}[(x+2)(9x^2+24x+16)]} - 7 \cdot 3^{(\log_3 4)+\log_{(x+2)}(3x+4)} + 9 = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{4+6x-x^2}}{x-4} > 1.$$

4. На хорде LM взята точка N, $LN = 3$, $NM = 4$, радиус окружности равен 5. Найти максимальное из расстояний от точки N до точек окружности.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt{2y^2 - x^4} = 3x + 2y, \\ 7\sqrt{2y^2 - x^4} = 2x + 3y. \end{cases}$$

6. В двугранный угол помещен конус так, что каждой грани двугранного угла принадлежит только одна образующая конуса. Двугранный угол равен α, а угол между осью конуса и его образующей равен $\alpha/4$. Найти угол между осью конуса и ребром двугранного угла.

7. Для каждого значения a решить систему

$$\begin{cases} 4\log_{25}^2 x + 9\log_{125}^2 y \leqslant 9\,(a^2 - 2a), \\ \log_5^2 \dfrac{x}{y} \geqslant 18\,(a^2 - 2a). \end{cases}$$

8. В прямоугольном $\triangle LMN$ ($\angle M$ — прямой) MK — высота. Вне $\triangle LMN$ взята точка O так, что $OL = ON = l$ и отрезок OK пересекает отрезок LM. Точка E — середина отрезка OM, $KE = k$. Найти ME.

2002 (май). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\frac{\log_3(6x-5)}{\log_2 x} = \frac{2}{\log_2 3}\,.$$

2. Решить уравнение

$$2\cos^2\frac{3x}{2} - \cos 3x\cdot\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x.$$

3. Решить уравнение

$$2+\sqrt{x+5} = |x+3|.$$

4. В $\triangle BCD$ $BC=7$, $CD=3$, $BD=5$. Биссектрисы CM и DN пересекаются в точке O. Найти OM.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-1}\log_3 y + 2^{2x} = -1, \\ 9\cdot 2^x\log_{27} y + 4\log_9^2 y = -5. \end{cases}$$

6. Окружность касается стороны BD $\triangle BCD$ в ее середине A, проходит через вершину C и пересекает стороны BC и CD в точках K и L соответственно, $BC:CD = 2:3$. Найти отношение площади $\triangle BKA$ к площади $\triangle ALD$.

7. Для каждого значения a решить неравенство

$$(x^2+4x-a^2-2a+3)(\sin x+3x) > 0.$$

8. В треугольной пирамиде $SBCD$ ребро SD перпендикулярно к грани BCD, $\angle BDC$ — прямой, $BD=2$, $DC=4$, $SD=8\sqrt{5}/5$. Сфера касается плоскостей SDB, SDC и BCD, причем плоскости BCD она касается в точке, лежащей на отрезке BC. Найти:

1) радиус сферы;

2) радиус окружности, по которой пересекаются сфера и грань BSC.

2002 (май). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\frac{\log_5(3x-2)}{\log_2 x} = \frac{2}{\log_2 5}.$$

2. Решить уравнение

$$2\cos^2 3x - \cos 6x \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x.$$

3. Решить уравнение

$$6 + 2\sqrt{x+15} = |x+9|.$$

4. Биссектрисы MA и LB $\triangle LMN$ пересекаются в точке O, $LM = 4$, $MN = 5$, $LN = 6$. Найти OB.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+1} \log_{125} y + 3^{2x} = 3, \\ 3^x \log_5 y + 4 \log_{25}^2 y = -2. \end{cases}$$

6. Медиана LK $\triangle LMN$ является хордой окружности, касающейся стороны MN в точке K и пересекающей стороны LM и LN в точках A и B соответственно, $LM : LN = 4 : 3$. Найти отношение площади $\triangle AMK$ к площади $\triangle BKN$.

7. Для каждого значения a решить неравенство

$$\left(x^2 - 2x - a^2 + 4a - 3\right)\left(\sin x + \frac{x}{3}\right) < 0.$$

8. В треугольной пирамиде $SLMN$ углы SNL, SNM, и LNM — прямые, $LN = \sqrt{5}$, $NM = \sqrt{5}/2$, $SN = 2$. Сфера касается граней двугранного угла с ребром SN, а плоскости LMN она касается в точке, лежащей на отрезке LM. Найти:

1) радиус сферы;

2) радиус окружности, по которой пересекаются сфера и грань LSM.

2002 (июль). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos x - \cos 3x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{5-x}}{3-x} < 1.$$

3. Решить неравенство

$$8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

4. В трапеции $BCDE$ $CD \parallel BE$, $BC = DE$, площадь трапеции равна 96, а высота трапеции равна 6. Окружность, вписанная в трапецию, касается сторон BC и DE в точках M и N. Найти MN.

5. Три числа, сумма которых равна 39, образуют геометрическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 1, от второго числа отнять 1, а от третьего числа отнять 15, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

6. В пирамиде $SABC$ каждое ребро равно 4. На ребре SC взята точка D так, что $SD : DC = 1 : 3$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SADB$.

7. Для каждого значения a решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 6x - a^2 - 2a + 21\right) < -2$$

и найти, при каких значениях a множество чисел x, не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок числовой оси, длина которого меньше $2\sqrt{2}$.

8. В треугольнике LMN отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно 6. Вписанная окружность касается сторон $\triangle LMN$ в точках B, C и D. Найти отношение площади $\triangle LMN$ к площади $\triangle BCD$.

2002 (июль). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin 9x + \sin 3x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} 3x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1.$$

3. Решить неравенство

$$99 \cdot \frac{5^{x-2}}{2 \cdot 5^x - 3^x} > 2 + \left(\frac{3}{5}\right)^x.$$

4. Окружность радиуса 2, вписанная в равнобедренную трапецию, касается ее боковых сторон в точках A и B, $AB = 16/5$. Найти площадь трапеции.

5. Три числа, сумма которых равна 27, образуют арифметическую прогрессию. Если от первого числа отнять 2, от второго числа отнять 1, а к третьему числу прибавить 4, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

6. В пирамиде $SKLM$ каждое ребро равно 9. На ребре SL взята точка N так, что $SN : NL = 2 : 1$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SKMN$.

7. Для каждого значения a решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2 - 4x - a^2 - 2a + 23\right) < -2$$

и найти, при каких значениях a множество чисел x, не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок числовой оси, длина которого меньше 4.

8. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках K, L и M. Площадь $\triangle ABC$ в 5 раз больше площади $\triangle KLM$. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей для $\triangle ABC$.

2003 (март). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 4x + 2\sin 3x - \cos 2x + \sin x - 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$9\log_5(3+x)^4 < 4\log_3(-x-1)^9 \cdot \log_5 3.$$

3. Решить неравенство

$$\left(25^x - 5^{x+1} - 6\right)\log_5 x - 6 \geqslant 25^{\frac{x+1}{2}} - 5^{2x}.$$

4. В треугольнике BCD $BC = CD$, $BD = 8\sqrt{3}$, радиус вписанной окружности равен 3. Прямая BF пересекает высоту CE в точке F, а вписанную окружность — в точках M и N (M между B и F), $FE = 4$. Найти FN.

5. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{18}{3x^2+2y} - \dfrac{14}{2x^2-5y} = 3, \\ \dfrac{7}{2x^2-5y} + \dfrac{36}{3x^2+2y} = 1 \end{cases}$$

и изобразить на координатной плоскости Oxy ее решения.

6. Площадь треугольника равна $12\sqrt{5}$, периметр его равен 24, расстояние от одной из вершин до центра вписанной окружности равно $\sqrt{14}$. Найти наименьшую сторону треугольника.

7. Для каждого допустимого значения b в уравнении

$$\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{b} - x} = b$$

1) найти число различных решений уравнения;
2) найти эти решения.

8. В правильной треугольной призме $BCDB_1C_1D_1$ ($BB_1 \parallel CC_1 \parallel \parallel DD_1$), объем которой равен $27/2$, проведено сечение плоскостью BD_1C. В пирамиду $D_1BB_1C_1C$ вписан шар. Найти:
1) площадь сечения BD_1C;
2) радиус сферы, описанной около данной призмы.

2003 (март). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin 4x - \sin 3x + \sin 2x - 2\cos x + 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$10\log_6(1+x)^3 > 3\log_7(2-x)^{10}\cdot\log_6 7.$$

3. Решить неравенство

$$(9^x - 7\cdot 3^x - 8)\log_3 x + 8 \geqslant 3^{2x} - 7\cdot 9^{\frac{x}{2}}.$$

4. В равнобедренную трапецию $KLMN$ ($LM \parallel KN$) вписана окружность, касающаяся сторон LM и KN в точках P и Q соответственно, $KN = 4\sqrt{6}$, $PQ = 4$. Прямая NC пересекает отрезок PQ в точке C, а вписанную окружность — в точках A и B (A между N и C), $PC : CQ = 3$. Найти AC.

5. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{33}{5y^2-3x} - \dfrac{24}{3y^2+4x} = 2, \\ \dfrac{48}{3y^2+4x} + \dfrac{11}{5y^2-3x} = 3 \end{cases}$$

и изобразить на координатной плоскости Oxy ее решения.

6. Площадь треугольника равна $4\sqrt{21}$, периметр его равен 24, отрезок биссектрисы от одной из вершин до центра вписанной окружности равен $\sqrt{30}/3$. Найти наибольшую сторону треугольника.

7. Для каждого допустимого значения b в уравнении

$$\sqrt{\sqrt{2b} - x} - 2b + \sqrt{x} = 0$$

1) найти число различных решений уравнения;
2) найти эти решения.

8. В правильной треугольной призме $LMNL_1M_1N_1$ ($LL_1 \parallel MM_1 \parallel NN_1$) проведено сечение плоскостью LM_1N. Площадь боковой грани призмы равна $6\sqrt{3}$. В пирамиду $M_1LL_1N_1N$

вписан шар. Найти:

1) объем данной призмы;
2) радиус сферы, описанной около данной призмы.

2003 (май). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2\sin(3\cos 3x + 6\sin 2x \cdot \sin x) = 1.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^x \cdot 11^y = 27, \\ 7^{2y} \cdot 4^{x+2} = 128. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\left[\log_7(x^2 + 5x + 6)\right]^{-1} < \log_{30} 7.$$

4. В треугольнике LMN даны стороны: $LM = n$, $MN = l$, $NL = m$. Биссектрисы LB и NC пересекаются в точке O, диагонали четырехугольника $BOCM$ пересекаются в точке A. Найти $CA : AB$.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{12x^2 + 54x + 6} + |2x^2 + 9x| \geqslant 11.$$

6. Окружность проходит через вершину угла BCD и отсекает на его сторонах равные отрезки CB и CD, $\angle BCD = \alpha$. Другая окружность касается отрезков CB и CD в точках K и L соответственно, а также касается первой окружности. Найти $KL : BD$.

7. Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$\sqrt{17 - \log_a x^4} > (\log_{|a|} x)(1 - 3\log_x a).$$

8. Сфера касается плоскости основания BCD правильной треугольной пирамиды $SBCD$ в точке D, а также касается бокового ребра SC в точке M, $SM : MC = 1 : 2$, $BC = a$. Найти радиус сферы.

2003 (май). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\cos\left(8\sin 4x\cdot\cos 3x-4\sin 7x\right)+1=0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{3y+1}\cdot 7^{2x}=32,\\ 13^{x}\cdot 9^{2y+1}=81. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\left[\log_3(x^2-7x+12)\right]^{-1}<\log_{42}3.$$

4. В треугольнике BCD даны стороны: $BC=d$, $CD=b$, $DB=$ $=c$. Биссектриса CK пересекает биссектрису DL в точке M. Отрезки KL и BM пересекаются в точке N. Найти $LN:NK$.

5. Решить неравенство

$$6-|2x^2-5x|\leqslant\sqrt{4-12x^2+30x}\,.$$

6. Около равнобедренного треугольника LMN ($LM=MN$) описана окружность, $\angle LMN=\beta$. Другая окружность касается сторон LM и MN в точках P и Q соответственно, а также касается первой окружности. Найти отношение площади $\triangle PMQ$ к площади $\triangle LMN$.

7. Для каждого допустимого значения b решить неравенство

$$\sqrt{17+\log_b x^4}+(\log_b x)(1+3\log_x|b|)>0.$$

8. В правильной треугольной пирамиде $SLMN$ (S — вершина) $LM=b$. Сфера касается плоскости основания LMN пирамиды в точке M, а также касается бокового ребра SN в точке A, $SA:AN=2:1$. Найти радиус сферы.

2003 (июль). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\cos 2x = 1.$$

2. Решить неравенство

$$|x^2 + 2x| + x^2 - \frac{3}{2} \geqslant 0.$$

3. Решить неравенство

$$\log_9(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) < 3.$$

4. В трапеции $PQRS$ ($QR \parallel PS$) RT — биссектриса $\angle QRS$, точка T — середина отрезка PQ, средняя линия равна $2\sqrt{5}$, $ST = 4$. Найти RT.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x + 2y|, \\ x\,(4y + x - 3) + y\,(4y + 3) = 61. \end{cases}$$

6. В $\triangle LMN$ радиус описанной окружности равен R, $\angle N = \alpha$, точка O — центр окружности, вписанной в этот треугольник. Прямая NO пересекает окружность, описанную около $\triangle LMN$, в точке K. Найти OK.

7. Для каждого значения a решить неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 3^{|3a-1|} - 2x + 1}{x^2 - (a-3)\,x - 3a} > 0.$$

8. В пирамиде $SKLM$ даны ребра: $KL = 5$, $LM = 6$, $MK = 7$. Сфера радиуса $7/(4\sqrt{6})$ касается плоскости основания KLM и боковых ребер пирамиды. Точки касания делят эти ребра в равных отношениях, считая от вершины S. Найти объем пирамиды.

2003 (июль). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\cos 2x + 9\,\mathrm{tg}^2\, x = 4.$$

2. Решить неравенство

$$|x^2 - 5x| + x^2 - \frac{11}{8} \leqslant 0.$$

3. Решить неравенство

$$\log_2(2^x - 2) \cdot \log_4(2^{x+3} - 16) < 5.$$

4. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M — середина отрезка CD, AM — биссектриса $\angle BAD$, $AM = 8$, $BC + AD = 10$. Найти BM.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x - 2y| = 11 - \sqrt{x + y}, \\ x\,(x - 3) - y\,(4x - 4y + 3) = 97. \end{cases}$$

6. В $\triangle ABC$ точка O — центр вписанной окружности, $\angle B = \beta$. Прямая BO пересекает окружность, описанную около $\triangle ABC$, в точке D, $OD = a$. Найти радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

7. Для каждого значения a решить неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 5^{|1-5a|} - 4x + 4}{x^2 + (5 - a)\,x - 5a} > 0.$$

8. В пирамиде $SBCD$ даны ребра: $BC = 5$, $CD = 7$, $DB = 8$. Сфера радиуса $\sqrt{3}/3$ касается боковых ребер SB, SC и SD в точках L, M и N, а также касается плоскости основания. Плоскость LMN параллельна плоскости BCD. Найти объем пирамиды.

2004 (март). Вариант 1

1. Решить уравнение

$$8\sin\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-4\cos x-3=0.$$

2. Решить систему неравенств

$$-2<\frac{6}{x^2-x-6}<-1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{27}(x^2+4x+3)^3+\log_3(x^2-4x+3)<2.$$

4. Окружность с центром O вписана в $\triangle BCD$, $BC=6$, $CD=7$, $BD=8$. Прямые BO, CO и DO пересекают стороны CD, BD, и BC в точках L, M и N соответственно. Найти отношение площади $\triangle CNL$ к площади $\triangle BMN$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}|3^x-3^y|+3^x+3\cdot 3^y=8\sqrt{3},\\ |3^x+3^{-y}|+2\cdot 3^x-28\cdot 3^{-y}=0.\end{cases}$$

6. В $\triangle BCD$ даны стороны $BC=5$, $CD=6$, $BD=7$. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках B, C и D. Найти радиус наибольшей окружности.

7. Для каждого значения a решить уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{x-5a}{x}\right)+4\left[\log_4(x-5a)\right]\log_2 x-8\log_4^2 x=0.$$

8. В правильной треугольной призме $BCDB_1C_1D_1$ ($BB_1\parallel CC_1\parallel DD_1$) $BB_1:BC=5:3$. На боковых ребрах BB_1, CC_1 и DD_1 взяты точки L, M, и N соответственно, так что $BL:LB_1=3:2$, $CM:MC_1=2:3$, $DN:ND_1=1:4$. Найти двугранный угол между плоскостями LMN и BCD.

2004 (март). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$14\cos\left(x+\frac{3\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+7\sin x-4=0.$$

2. Решить систему неравенств

$$-4<\frac{16}{x^2-2x-8}<-2.$$

3. Решить неравенство

$$\log_4(x^2-5x+4)+2\log_{16}(x^2+5x+4)<2.$$

4. В $\triangle LMN$ даны стороны $LM=4$, $MN=6$, $LN=7$, точка O — центр вписанной окружности. Прямые LO, MO и NO пересекают стороны MN, LN и LM в точках B, C и D соответственно. Найти отношение площади $\triangle BCN$ к площади $\triangle MDN$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |7^y-7^x|+7^y+3\cdot 7^x=16\sqrt{7}, \\ |7^{y-1}+7^{-x}|+6\cdot 7^{y-1}-50\cdot 7^{-x}=0. \end{cases}$$

6. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках L, M и N; $LM=5$, $MN=7$, $LN=8$. Найти радиус наименьшей окружности.

7. Для каждого значения a решить уравнение

$$18\log_{27}^2 x-6\left[\log_{27}(x-6a)\right]\log_3 x-\log_3^2\left(\frac{x-6a}{x}\right)=0.$$

8. В правильной треугольной призме $LMNL_1M_1N_1$ ($LL_1\parallel MM_1\parallel NN_1$) $LL_1:LM=9:2$. На боковых ребрах LL_1, MM_1 и NN_1 взяты точки B, C и D соответственно, так что $LB:BL_1=2:7$, $MC:CM_1=6:3$, $ND:DN_1=4:5$. Найти двугранный угол между плоскостями BCD и LMN.

2004 (июль). Вариант 1

1. Решить уравнение
$$\sin 3x \cdot \sin 2x + \sin 3x \cdot \sin 4x - \cos x = 0.$$

2. Решить неравенство
$$\frac{|x-3|}{2 - \dfrac{8}{|x-3|}} < -1.$$

3. Решить неравенство
$$\log_2\big((3+2x-x^2)(x-2)\big) - \log_8\big((4-4x+x^2)(8x-16)\big) + 1 > 0.$$

4. В окружности с радиусом 3 через точку C диаметра AB ($AC : CB = 5 : 1$) проведена хорда DE, перпендикулярная к этому диаметру. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AC, CE и дуги AE.

5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 7 \cdot 2^{2x-y} - 5\sqrt{4x-y} = 56 - 10x, \\ 2 \cdot 2^{2x-y} + 3\sqrt{4x-y} = 6x + 16. \end{cases}$$

6. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AB \perp AD$, $BC = 5$, $AD = 7$, KM — средняя линия (точка K на стороне AB). Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к стороне CD, пересекает отрезок KM в точке L, $KL : LM = 2 : 1$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

7. При каких значениях a уравнение
$$(1 + \sin(4ax))\sqrt{5\pi x - x^2} = 0.$$
имеет ровно 5 различных корней?

8. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$ с вершиной S проведена медиана MP в $\triangle SLM$ и даны $KL = 1$, $SK = 3$. Через середину N ребра SM проведена прямая NE, параллельная ребру KL. Через точку K проведена прямая, пересекающая прямые MP и NE в точках A и B соответственно. Найти длину отрезка AB.

2004 (июль). Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos x \cdot \sin 4x + \cos 2x \cdot \sin 5x - \sin 3x = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{|x-2|}{\dfrac{2}{|x-2|} - 1} > 1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_3\bigl((-x^2+4x+2)(x-3)\bigr) - \log_{27}\bigl((9-6x+x^2)(27x-81)\bigr) + 1 > 0.$$

4. Прямая, перпендикулярная к диаметру KL полукруга с радиусом 5, пересекает этот диаметр в точке M ($KM : ML = 3 : 7$), а дугу полуокружности — в точке N. Найти радиус окружности, касающейся отрезков NM, ML и дуги NL.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{x-4y} + 7x = 54 - 7\sqrt{2x-4y}, \\ 3^{x-4y} - 2x = 27 + 2\sqrt{2x-4y}. \end{cases}$$

6. В трапеции $KLMN$ ($LM \parallel KN$) $KL \perp KN$, $LM = 4$, $KN = 6$, точки P и R — середины сторон KL и MN соответственно, точка Q на отрезке PR, такая что $PQ : QR = 4 : 1$. Прямая KQ перпендикулярна к стороне MN. Найти площадь трапеции $KLMN$.

7. При каких значениях a уравнение

$$(1 - \sin(2ax))\sqrt{3\pi x - x^2} = 0.$$

имеет ровно 4 различных корня?

8. В правильной треугольной пирамиде $SBCD$ с вершиной S проведена медиана CK в $\triangle SBC$ и даны $BC = 2$, $SB = 4$. Через середину A ребра SC проведена прямая AE, параллельная ребру BD. Через точку D проведена прямая, пересекающая прямые CK и AE в точках P и Q соответственно. Найти длину отрезка PQ.

Часть 2

РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В Части 2 знак $\Rightarrow$ употребляется для сокращения записи решения задачи, заменяя слова «откуда» или «следовательно». Здесь в этот знак не вкладывается смысл перехода к задаче-следствию.

1993 (май)

Задача № 6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AD. Известно, что $BD/DC = k$. Найти отношение длины отрезка DC к радиусу окружности, описанной около треугольника ADC.

Решение (Рис. 1). Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, $CD = a \Rightarrow BD = ka$ (по условию), $AC = 2 \cdot BC \cdot \cos 2\alpha = 2(k+1)\,a \cdot \cos 2\alpha$. В $\triangle ABC$ по свойству биссектрисы $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{DB} \Rightarrow \dfrac{2(k+1)\,a \cdot \cos 2\alpha}{(k+1)\,a} = \dfrac{a}{ka} \Rightarrow \cos 2\alpha = 1/2k$. По теореме синусов в $\triangle ADC$ имеем $\dfrac{DC}{\sin\alpha} = 2R_{ADC} \Rightarrow \dfrac{DC}{R_{ADC}} = 2\sin\alpha = 2\sqrt{(1-\cos 2\alpha)/2} = \sqrt{2 - 1/k}$.

Ответ: $\sqrt{2-1/k}$.

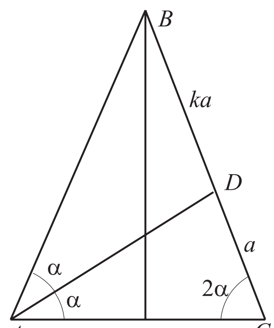

Рис. 1

Задача № 8. В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине S — прямые, SO — высота пирамиды. Известно, что отношение площади треугольника AOB к площади треугольника BOC равно k. Найти отношение площади треугольника ASB к площади треугольника BSC.

Решение (Рис. 2). Пусть SO — высота пирамиды, проведем $SD \perp AB \Rightarrow OD \perp AB$ $(*)$ по теореме, обратной к теореме о трех перпендикулярах.

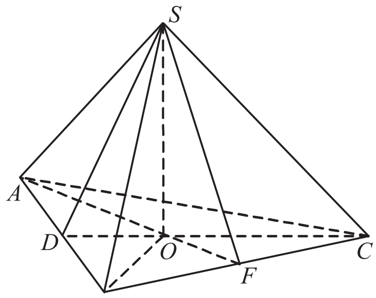

Рис. 2

Далее: по условию $SC \perp SA$ и $SC \perp SB \Rightarrow SC \perp$ пл. ASB, $SD \perp AB$, SD — проекция CD на пл. $ASB \Rightarrow CD \perp AB$ $(**)$ по теореме о трех перпендикулярах.

Из $(*)$ и $(**)$ $\Rightarrow$ точки D, O, C — на одной прямой. Аналогично: точки F, O, A — на одной прямой.
Так как боковые ребра взаимно перпендикулярны, то $\triangle ACB$ проектируется на $\triangle ASB$, а затем — на $\triangle AOB \Rightarrow S_{ABC} \cdot \cdot \cos\angle SDO = S_{ASB}$ $(3*)$, $S_{ASB} \cdot \cos\angle SDO = S_{AOB} \Rightarrow S_{AOB} = = S_{ABC} \cdot \cos^2\angle SDO$.
Аналогично $S_{ABC} \cdot \cos\angle SFO = S_{BSC}$ $(4*)$, $S_{BOC} = S_{ABC} \cdot \cdot \cos^2\angle SFO \Rightarrow \dfrac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \dfrac{\cos^2\angle SDO}{\cos^2\angle SFO} = k$ $(5*)$ (по условию).

Из $(3*)$, $(4*)$ и второго равенства в $(5*)$ следует: $\dfrac{S_{ASB}}{S_{BSC}} = = \dfrac{S_{ABC} \cdot \cos\angle SDO}{S_{ABC} \cdot \cos\angle SFO} = \sqrt{k}$.

Ответ: $\sqrt{k}$.

1993 (июль)

Задача № 6. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найти расстояние от точки C до хорды AB.

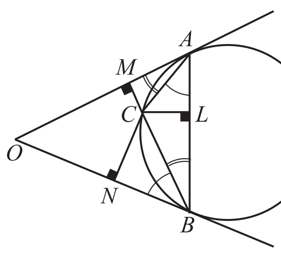

Рис. 3

Р е ш е н и е (Рис. 3). Проведем из точки C перпендикуляры CM, CN и CL к прямым OA, OB и AB. В прямоугольных треугольниках CMA и CLB $\angle CAM = \angle CBL$ (измеряются половиной дуги AC) $\Rightarrow \triangle CMA \sim \triangle CLB$. Аналогично: $\triangle CAL \sim \triangle CBN \Rightarrow$ $\dfrac{CM}{CA} = \dfrac{CL}{CB}$ $(*)$ и $\dfrac{CL}{CA} = \dfrac{CN}{CB}$ $(**)$.

Деля $(*)$ на $(**)$, получаем: $\dfrac{CM}{CL} = \dfrac{CL}{CN} \Rightarrow CM \cdot CN = CL^2$.
По условию $CM = a$, $CN = b \Rightarrow CL = \sqrt{ab}$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Задача № 8. На плоскости лежат два шара радиуса r и цилиндр радиуса R $(R > r)$. Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найти радиус шара, большего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

Решение (Рис. 4). Пусть x $(x > r)$ — радиус искомого шара. Шары касаются плоскости в точках K, L, M; AB — образующая цилиндра, по которой он касается плоскости $\Rightarrow$ $AK = BL = 2\sqrt{Rr}$, $KM = LM = 2\sqrt{rx}$, $CM = 2\sqrt{Rx}$ (см., например, прямоугольный треугольник с гипотенузой $R + r$ и катетом $R - r$), $KL = 2r$.

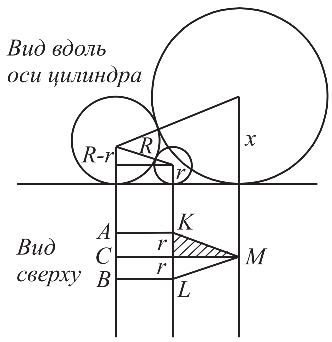

Рис. 4

Уравнение для определения радиуса x получаем, записав теорему Пифагора для заштрихованного треугольника: $\left(2\sqrt{Rx} - 2\sqrt{Rr}\right)^2 + r^2 = \left(2\sqrt{rx}\right)^2 \Rightarrow 4(R-r)\,x - 8R\sqrt{r}\sqrt{x} + (4Rr + r^2) = 0$ $(*)$ $\Rightarrow (\sqrt{x})_{1,2} = \dfrac{2R\sqrt{r} \pm r\sqrt{3R+r}}{2(R-r)}$.

Нужно найти $x_1 > r$. Этому условию удовлетворяет корень уравнения $(*)$ $(\sqrt{x})_1 = \dfrac{2R\sqrt{r} + r\sqrt{3R+r}}{2(R-r)}$.

Действительно, $(\sqrt{x})_1 - \sqrt{r} = \dfrac{2r\sqrt{r} + r\sqrt{3R+r}}{2(R-r)} > 0$, тогда как $(\sqrt{x})_2 - \sqrt{r} = \dfrac{r\left(\sqrt{4r} - \sqrt{3R+r}\right)}{2(R-r)} < 0$, так как $4r < 3R + r$ (напомним, что $R > r$).

Ответ: $\left[\dfrac{2R\sqrt{r} + r\sqrt{3R+r}}{2(R-r)}\right]^2$.

1994 (май)

Задача № 6. В треугольнике ABC медианы AD и CE взаимно перпендикулярны, $AB = c$, $BC = a$. Найти AC.

Решение (Рис. 5). Достроим данный треугольник до двух параллелограммов, в которых диагоналями служат стороны AB, BC и удвоенные медианы.

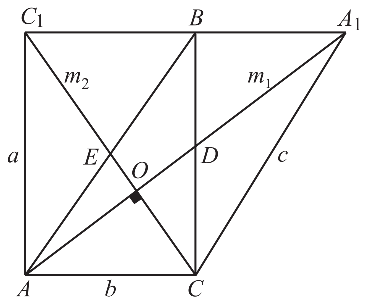

Рис. 5

Пусть $AA_1 = 2m_1$, $CC_1 = 2m_2$, $AC = b$. Тогда по известной теореме («сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон») имеем в параллелограммах ABA_1C и AC_1BC:

$$\begin{cases} 4m_1^2 + a^2 = 2c^2 + 2b^2, & (1) \\ 4m_2^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2. & (2) \end{cases}$$

Условие перпендикулярности медиан позволяет записать теорему Пифагора в $\triangle AOC$, учитывая, что $AO = 2m_1/3$, $CO = 2m_2/3$:

$$\frac{4}{9}\,(m_1^2 + m_2^2) = b^2. \tag{3}$$

Складывая (1) и (2) и подставляя $m_1^2 + m_2^2$ в (3), находим связь между сторонами треугольника с перпендикулярными медианами:

$$a^2 + c^2 = 5b^2 \Rightarrow b = AC = \sqrt{(a^2+c^2)/5}\,.$$

Вариант решения. Можно не достраивать треугольник ABC до параллелограммов. Записывая теоремы Пифагора для $\triangle AOE$, $\triangle COD$ и $\triangle AOC$, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{9}\,m_1^2 + \dfrac{1}{9}\,m_2^2 = \dfrac{c^2}{4}\,, \\ \dfrac{1}{9}\,m_1^2 + \dfrac{4}{9}\,m_2^2 = \dfrac{a^2}{4}\,, \\ \dfrac{4}{9}\,m_1^2 + \dfrac{4}{9}\,m_2^2 = b^2, \end{cases}$$

откуда, исключая $m_1^2 + m_2^2$, находим $a^2 + c^2 = 5b^2$ (умножаем первые два уравнения на 4, третье — на -5 и складываем).

З а м е ч а н и е . Таким образом доказана теорема: «Если в треугольнике медианы, проведенные к сторонам a и c, взаимно перпендикулярны, то стороны a, b и c связаны соотношением $a^2 + c^2 = 5b^2$».

Верна и обратная теорема: «Если в треугольнике стороны связаны соотношением $a^2 + c^2 = 5b^2$, то медианы, проведенные к сторонам a и c, взаимно перпендикулярны». Докажите ее самостоятельно, подставляя данное теперь соотношение $a^2 + c^2 = 5b^2$ в сумму уравнений (1) и (2).

Ответ: $\sqrt{(a^2 + c^2)/5}$.

Задача № 8. Наклонная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет своими основаниями трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Сумма площадей параллельных боковых граней призмы равна S, а расстояние между этими гранями равно d. Найти объем многогранника $BDA_1B_1C_1D_1$.

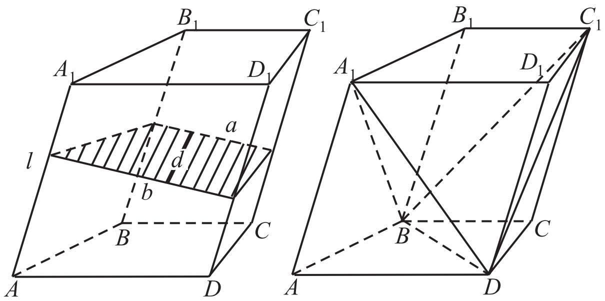

Рис. 6

Р е ш е н и е (Рис. 6). 1. Объем многогранника $BDA_1B_1C_1D_1$ равен $2/3$ объема данной призмы, так как от призмы отсекаются плоскостями A_1BD и C_1BD две пирамиды A_1ABD и C_1BCD. Сумма площадей оснований этих пирамид равна площади основания $ABCD$ призмы, а высота каждой из пирамид равна высоте призмы. Поэтому на обе пирамиды приходится $1/3$ объема призмы.

2. Объем призмы равен произведению площади перпендикулярного к боковым ребрам сечения призмы (заштрихованная трапеция) на длину бокового ребра.

Пусть параллельные стороны этого сечения равны a и b, S_1 — его площадь, V— объем призмы, l — длина бокового ребра. Высота сечения равна d по условию (это расстояние между параллельными боковыми гранями призмы). Тогда

$$V = S_1 \cdot l = \left[\frac{1}{2}\,(a+b)\,d\right]\, l = \left[\frac{1}{2}\,al + \frac{1}{2}\,bl\right]\, d = \frac{1}{2}\,Sd$$

(в последних квадратных скобках — полусумма площадей параллельных боковых граней призмы, равная по условию $S/2$).

Итак, $V_{BDA_1B_1C_1D_1} = \dfrac{2}{3}\,V = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}\,Sd = \dfrac{1}{3}\,Sd.$

Ответ: $Sd/3$.

1994 (июль)

Задача № 6. В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найти диаметр окружности.

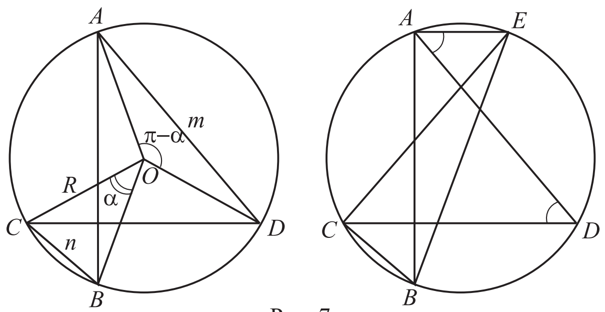

Рис. 7

Р е ш е н и е (Рис. 7). Сумма центральных углов, стягиваемых хордами m и n при взаимной перпендикулярности хорд AB и CD равна π. По теореме косинусов в $\triangle AOD$ и $\triangle COB$:

$$\begin{cases} n^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha, \\ m^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\pi - \alpha), \end{cases}$$

откуда $m^2 + n^2 = 4R^2 \Rightarrow 2R = \sqrt{m^2 + n^2}$.

В а р и а н т р е ш е н и я (более «геометрический»). Проведем хорду AE, $AE \perp AB \Rightarrow AE \parallel CD$. Параллельные хорды высекают на окружности равные дуги CA и ED (отмеченные равные накрест лежащие углы при параллельных прямых опираются как вписанные углы на равные дуги).

Значит, дуги CAE и AED равны $\Rightarrow CE = AD = m$.

Из того, что вписанный угол BAE прямой, следует, что BE — диаметр $\Rightarrow$ вписанный угол BCE, опирающийся на диаметр, также прямой.

Так как $CE = m$, то $BE = 2R = \sqrt{m^2 + n^2}$.

Ответ: $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Задача № 8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α, сторона основания равна a, SH — высота пирамиды. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC.

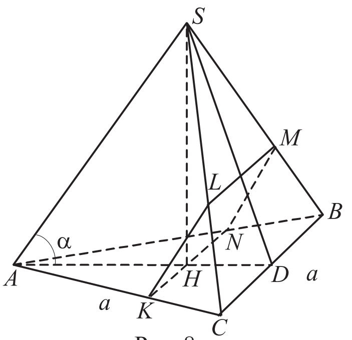

Рис. 8

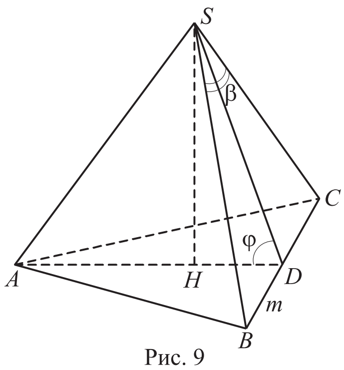

Рис. 9

Р е ш е н и е (Рис. 8). Искомое сечение — прямоугольник так как:

1) плоскость сечения параллельна ребрам SA и BC двугранных углов, а значит, пересекает их грани по параллельным прямым,

2) в правильной пирамиде прямая BC перпендикулярна проекции AH наклонной SA, а значит, по теореме о трех перпендикулярах $BC \perp SA \Rightarrow$ угол между парами параллельных сторон сечения прямой.

Далее: $\triangle SAC \sim \triangle LKC$, $KH \parallel CD \Rightarrow \dfrac{KL}{SA} = \dfrac{CK}{CA} = \dfrac{DH}{DA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow KL = \dfrac{1}{3}SA$, $KN = \dfrac{2}{3}BC = \dfrac{2}{3}a$.

В $\triangle SAH$ получаем: $AH = \dfrac{2}{3}AD = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = \dfrac{AH}{\cos\alpha} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3\cos\alpha}$.

Площадь сечения $KLMN$ $S = KL \cdot KN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3\cos\alpha} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{27\cos\alpha}$.

Ответ: $\frac{2a^2\sqrt{3}}{27\cos\alpha}$.

1995 (март)

Задача № 6. В правильной треугольной пирамиде угол при вершине между двумя боковыми ребрами равен β. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

Решение (Рис. 9). Пусть φ — двугранный угол при основании пирамиды, а $BD = m$. Тогда $\angle SDH$ — линейный угол этого двугранного угла, так как $AD \perp BC$ (высота в правильном $\triangle ABC$) и $SD \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах (HD — проекция SD), $HD = \frac{1}{3}AD = \frac{m\sqrt{3}}{3}$.

Выражая SD из $\triangle SHD$ и $\triangle SBD$, имеем $SD = \frac{m\sqrt{3}}{3\cos\varphi} = m \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$.

Задача № 8. Трапеция $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ вписана в окружность. Известно, что $BC = a$, $AD = b$, $\angle CAD = \alpha$. Найти радиус окружности.

Решение (Рис. 10). Параллельные хорды BC и AD высекают из окружности равные дуги (отмеченные накрест лежащие углы при параллельных прямых опираются как вписанные углы на равные дуги) $\Rightarrow AB = CD$ (трапеция равнобедренная). Если $CE \perp AD$, то $ED = \frac{b-a}{2}$, $AE = \frac{b+a}{2}$.

Пусть R — радиус окружности, описанной около трапеции. По теореме синусов в $\triangle ACD$ $CD = 2R\sin\alpha$ $(*)$.

С другой стороны, в $\triangle CED$ находим

$$CD^2 = CE^2 + ED^2 = (AE \cdot \operatorname{tg}\alpha)^2 + ED^2 = \left(\frac{b+a}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2. \quad (**)$$

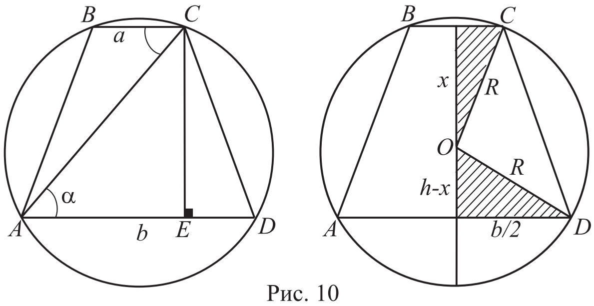

Рис. 10

Исключая CD из $(*)$ и $(**)$, имеем $\left(\frac{b+a}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha\right)^2 +$ $+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = (2R\sin\alpha)^2$, откуда $R = \frac{\sqrt{(b+a)^2\operatorname{tg}^2\alpha + (b-a)^2}}{4\sin\alpha}$.

В а р и а н т р е ш е н и я. Пусть O — центр окружности, описанной около трапеции. Точка O равно удалена от вершин A, B, C и D, поэтому лежит на серединном перпендикуляре к основаниям трапеции. Обозначения x, h и R ясны на Рис. 10, $h = CE = AE\cdot$ $\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{b+a}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Выражая R^2 из двух заштрихованных прямоугольных треугольников, имеем

$$R^2 = x^2 + \frac{a^2}{4} = \left[\left(\frac{b+a}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha\right) - x\right]^2 + \frac{b^2}{4}. \qquad (3*)$$

Из второго равенства $(3*)$ находим $x = \frac{(b+a)\ \operatorname{tg}^2\alpha + (b-a)}{4\operatorname{tg}\alpha}$ и подставляем x в первое из равенств $(3*)$. Получаем:

$$R^2 = x^2 + \frac{a^2}{4} = \left[\frac{(b+a)\ \operatorname{tg}^2\alpha + (b-a)}{4\operatorname{tg}\alpha}\right]^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Полезно сравнить полученные выражения для R^2, приведя их оба, например, к виду $R^2 = \frac{(b+a)^2}{16\cos^2\alpha} + \frac{(b-a)^2}{16\sin^2\alpha}$.

Ответ: $R = \frac{\sqrt{(b+a)^2\operatorname{tg}^2\alpha + (b-a)^2}}{4\sin\alpha}$.

1995 (май)

Задача № 6. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали пересекаются в точке M, $BC = b$, $AD = a$. Найти отношение площади треугольника ABM к площади трапеции $ABCD$.

Решение (Рис. 11). Так как $BC \parallel AD$, то $\triangle BMC \sim \sim \triangle AMD \Rightarrow \dfrac{S_{BMC}}{S_{ABM}} = \dfrac{CM}{MA} = \dfrac{b}{a}$ $(*)$, $\dfrac{S_{AMD}}{S_{ABM}} = \dfrac{DM}{MB} = \dfrac{a}{b}$ $(**)$, $S_{DCM} = S_{ABM}$ $(3*)$ (от равновеликих $\triangle BAC$ и $\triangle BDC$ отнимается $\triangle BMC$).

Складываем площади всех треугольников и, учитывая $(*)$, $(**)$ и $(3*)$, имеем: $S_{ABM}\left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} + 1 + 1\right) = S_{ABCD}$, откуда $S_{ABM} : S_{ABCD} = ab/(a+b)^2$.

Ответ: $ab/(a+b)^2$.

Задача № 8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) проведено сечение плоскостью, проходящей через точки B и C и делящей ребро SA в отношении $m : n$, считая от вершины S. Известно, что объем пирамиды $SABC$ равен V, а расстояние от центра основания ABC до плоскости сечения равно d. Найти площадь сечения.

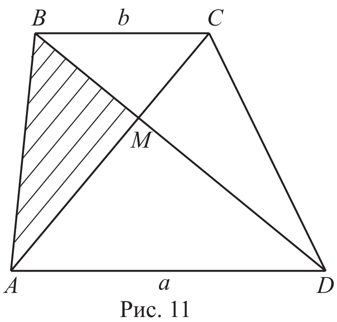

Рис. 11

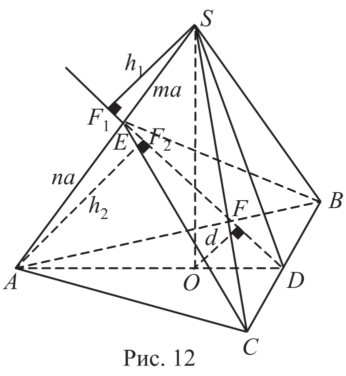

Рис. 12

Решение (Рис. 12). В правильной пирамиде плоскость BEC сечения перпендикулярна плоскости ASD, так как проходит через перпендикуляр BC к плоскости ASD ($BC \perp SD$ и $BC \perp AD$).

Поэтому перпендикуляры $SF_1 = h_1$, $AF_2 = h_2$ и $OF = d$, проведенные из точек S, A и O к плоскости BEC, лежат в плоскости ASD, $\triangle AF_2D \sim \triangle OFD \Rightarrow \dfrac{h_2}{d} = \dfrac{AD}{OD} = 3 \Rightarrow h_2 = 3d$ $(*)$.

Пусть $SE = ma$, $EA = na$, $S_{BEC} = S \Rightarrow h_1 = \dfrac{m}{n}h_2$ $(**)$. Сечение делит пирамиду $SABC$ на две пирамиды с вершинами S и A и общим основанием BEC, пусть $V_{SBEC} = V_1$, $V_{ABEC} = V_2$, $V_{SABC} = V \Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{3}\,S \cdot h_1$, $V_2 = \dfrac{1}{3}\,S \cdot h_2 \Rightarrow V = V_1 + V_2 = \dfrac{1}{3}\,S\,(h_1 + h_2) \Rightarrow$ (с учетом $(**)$ и $(*)$) $V = \dfrac{1}{3}\,S \cdot \left(\dfrac{m}{n}\,3d + 3d\right) = S \cdot \dfrac{m+n}{n} \cdot d \Rightarrow S = \dfrac{n}{m+n}\,\dfrac{V}{d}$.

Ответ: $\dfrac{n}{m+n}\,\dfrac{V}{d}$.

1995 (июль)

Задача № 6. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна H, а двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти объем пирамиды.

Р е ш е н и е (Рис. 13). Проведем $OE \perp SC$ и соединим точку E с B и D. Ребро $SC \perp$ пл. BED, так как $SC \perp OE$ и $SC \perp BD$ (по теореме о трех перпендикулярах прямая BD, перпендикулярная к проекции OC прямой SC, перпендикулярна и к самой наклонной SC). Значит, $\angle BED$ — линейный угол двугранного угла с ребром SC, $\angle BED = \alpha$.

Пусть $OE = a \Rightarrow OD = OC = a\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, в $\triangle OEC$ имеем $EC = a\sqrt{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - 1}$.

Далее: $\triangle SOE \sim \triangle OCE \Rightarrow \dfrac{OE}{SO} = \dfrac{EC}{OC} \Rightarrow \dfrac{a}{H} = \dfrac{a\sqrt{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - 1}}{a\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow a = H \cdot \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - 1}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$ $(*)$, $DC = OD\sqrt{2} = a\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ $(**)$.

Подставляя (*) в (**), получаем $V_{SABCD} = \frac{1}{3} DC^2 \cdot SO = $ $= \frac{2}{3} H^3 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)$.

Ответ: $\frac{2}{3} H^3 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)$.

Задача № 8. В окружности проведены диаметр MN и хорда AB, параллельная диаметру MN. Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q. Известно, что $MP = p$, $MQ = q$. Найти MN.

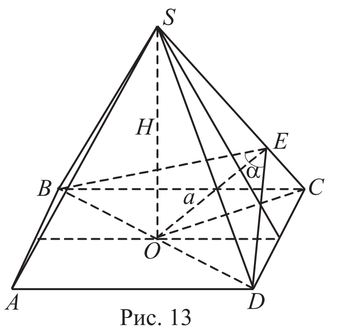

Рис. 13

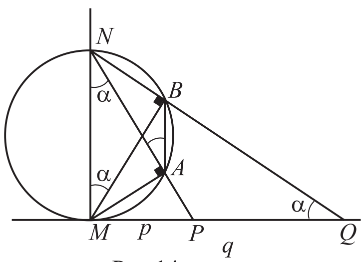

Рис.14

Р е ш е н и е (Рис. 14). Проведем хорды MA и MB. Так как MN — диаметр, то $\angle MAN = \angle MBN = \pi/2$.

Пусть $\angle MNA = \alpha$. Параллельные хорды высекают из окружности равные дуги (равные накрест лежащие углы BAN и ANM при параллельных прямых опираются как вписанные углы на равные дуги) $\Rightarrow \angle BMN = \alpha$ и $\angle NQM = \alpha$ ($MB \perp NQ$ и $NM \perp MQ$) $\Rightarrow \triangle PNM \sim \triangle NQM \Rightarrow \frac{PM}{MN} = \frac{MN}{MQ} \Rightarrow \frac{p}{MN} = $ $= \frac{MN}{q} \Rightarrow MN = \sqrt{pq}$.

Ответ: $\sqrt{pq}$.

1996 (март)

Задача № 6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S боковое ребро равно b, а двугранный угол между смежными боковыми гранями равен α. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ BD основания и середину бокового ребра SC.

Р е ш е н и е (Рис. 15). Пусть F — середина ребра SC. Проведем $OE \perp SC$ и соединим точку E с B и D. Ребро $SC \perp$ пл. BED, так как $SC \perp OE$ по построению и $SC \perp BD$ (по теореме о трех перпендикулярах прямая BD, перпендикулярная к проекции OC прямой SC, перпендикулярна и к самой наклонной SC). Значит, $\angle BED$ — линейный угол двугранного угла с ребром SC, $\angle BED = \alpha$.

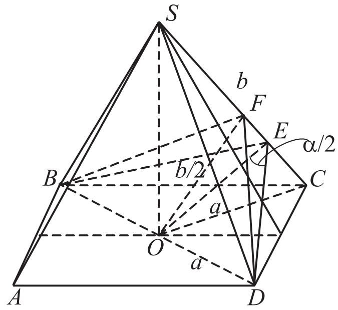

Рис. 15

Пусть $OD = OC = a \Rightarrow OE = a \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}$, $SO = \sqrt{b^2 - a^2}$ (в $\triangle SOC$).

Далее: $\triangle OEC \sim \triangle SOC \Rightarrow \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{SO}{SC} \Rightarrow \dfrac{a \operatorname{ctg}(\alpha/2)}{a} = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \Rightarrow a = b\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(\alpha/2)}$ $(*)$.

В прямоугольном $\triangle SOC$ OF — медиана (равна половине гипотенузы) $\Rightarrow OF = \dfrac{1}{2} SC = b/2$ $(**)$.

С учетом $(**)$ и $(*)$ находим искомую площадь сечения: $S_{BFD} = \dfrac{1}{2} BD \cdot OF = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot \dfrac{b}{2} = \dfrac{b^2}{2}\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(\alpha/2)}$.

Ответ: $\dfrac{b^2}{2}\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(\alpha/2)}$.

Задача № 8. В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC. Известно, что $MN = a$, $BD = b$. Найти угол $\angle ABC$.

Р е ш е н и е (Рис. 16). В четырехугольнике $MBND$ сумма противоположных прямых углов BMD и BND равна $\pi \Rightarrow$ около него можно описать окружность. Прямые углы опираются на диаметр BD этой окружности.

По теореме синусов в $\triangle MBN$ $\dfrac{MN}{\sin B} = BD \Rightarrow \sin B = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \angle B = \arcsin\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

Ответ: $\arcsin\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

1996 (май)

Задача № 6. В окружности радиуса R проведены хорда AB и диаметр AC. Хорда PQ, перпендикулярная диаметру AC, пересекает хорду AB в точке M. Известно, что $AB = a$, $PM : MQ = 3$. Найти AM.

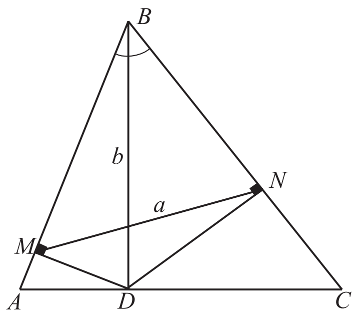

Рис. 16

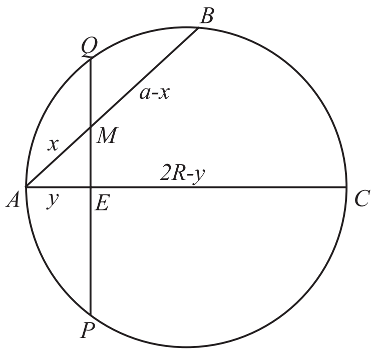

Рис.17

Решение (Рис. 17). Пусть $AM = x$, $AE = y \Rightarrow ME = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Произведения отрезков хорд, проходящих через одну точку, равны:

$$\begin{cases} AM \cdot MB = PM \cdot MQ, \\ AE \cdot EC = PE \cdot EQ, \end{cases} \tag{$*$}$$

где $ME = MQ = \sqrt{x^2 - y^2}$, $PM = 3 \cdot ME = 3\sqrt{x^2 - y^2}$, $PE = EQ = 2\sqrt{x^2 - y^2}$.

Система $(*)$ в переменных x и y принимает вид

$$\begin{cases} x\,(a - x) = 3\sqrt{x^2 - y^2} \cdot \sqrt{x^2 - y^2}, \\ y\,(2R - y) = 2\sqrt{x^2 - y^2} \cdot 2\sqrt{x^2 - y^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 3y^2 = ax, \\ 4x^2 - 3y^2 = 2Ry \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a}{2R}x, \\ AM = x = \dfrac{4aR^2}{16R^2 - 3a^2}. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{4aR^2}{16R^2 - 3a^2}$.

Задача № 7. В правильной четырехугольной пирамиде отношение бокового ребра к стороне основания равно $\sqrt{2}$, а радиус сферы, описанной около пирамиды, равен 2. Найти объем пирамиды.

Р е ш е н и е (Рис. 18). Центр O сферы, описанной около правильной пирамиды, лежит на высоте SH, $OS = OC = 2$.

Пусть $DC = 2a$, тогда по условию $SC = 2a\sqrt{2}$, $HC = a\sqrt{2}$, $OH = \sqrt{4-2a^2}$ (в $\triangle OHC$).

В $\triangle SHC$ $(SO+OH)^2 + HC^2 = SC^2 \Rightarrow (2+\sqrt{4-2a^2})^2 + 2a^2 = 8a^2 \Rightarrow a = \sqrt{6}/2$, $DC = 2a = \sqrt{6}$ $(*)$, $SH = 2 + \sqrt{4-2a^2} = 2 + \sqrt{4 - 2\cdot 6/4} = 3$ $(**)$.

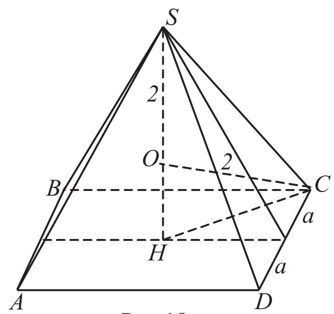

Рис.18

Учитывая $(*)$ и $(**)$, находим объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}\cdot DC^2 \cdot SH = \dfrac{1}{3}\cdot 6\cdot 3 = 6$.

Ответ: 6.

1996 (июль)

Задача № 6. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная m, образует с боковыми гранями углы α и β. Найти объем параллелепипеда.

Р е ш е н и е (Рис. 19). В прямоугольном параллелепипеде ребра перпендикулярны граням: $A_1B_1 \perp AA_1D_1D$, $B_1C_1 \perp DD_1C_1C \Rightarrow$ углы B_1DC_1 и B_1DA_1 (углы между диагональю B_1D и ее проекциями на боковые грани) суть данные углы α и β.

Далее выражаем ребра параллелепипеда через диагональ $BD = m$ и углы α и β : $D_1C_1 = A_1B_1 = m\sin\beta$, $B_1C_1 = m\sin\alpha$, $B_1D_1 = \sqrt{B_1C_1^2 + D_1C_1^2} = m\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$, $D_1D = \sqrt{B_1D^2 - B_1D_1^2} = \sqrt{m^2 - m^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)} = m\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

Искомый объем параллелепипеда

$$V = A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot D_1D = m^3\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}\,.$$

Ответ: $m^3\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}\,.$

Д в а в о п р о с а:

1) видно, что в ответе при перемене ролей α и β произведение их синусов не меняется. А подкоренное выражение?

2) не может ли в ответе подкоренное выражение при некоторых α и β стать отрицательным?

Задача № 7. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ делит сторону BC на отрезки $BD = b$ и $DC = c$. Найти AD.

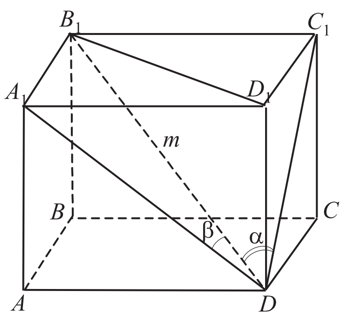

Рис. 19

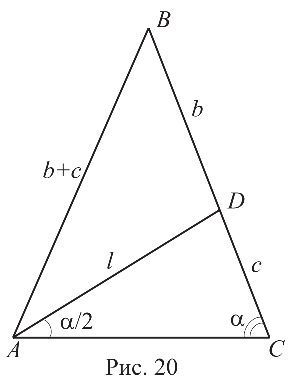

Рис. 20

Р е ш е н и е (Рис. 20). Пусть биссектриса AD равна l. В $\triangle ADC$ $\dfrac{l}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin(\alpha/2)} \Rightarrow l = 2c \cdot \cos(\alpha/2)$ $(*)$.

В $\triangle ABC$ $AC = 2(b+c)\cos\alpha$ и по свойству биссектрисы $\dfrac{b+c}{2(b+c)\cos\alpha} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{c}{2b}$ $(**)$.

Используя в равенстве $(*)$ формулу $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$ (в треугольнике $\dfrac{\alpha}{2}$ — угол острый), где $\cos\alpha$ имеет вид $(**)$, получаем $l = 2c\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{c}{2b})} = c\sqrt{2+\dfrac{c}{b}}$.

В а р и а н т р е ш е н и я. Применяя менее известную в школе формулу для вычисления биссектрисы (при этом на экзамене стоит пояснить ее вывод)

$$l^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC = (b+c) \cdot AC - bc,$$

подставляем в последнее выражение $AC = \dfrac{(b+c)\cdot c}{b}$ из упомянутого выше свойства биссектрисы $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$. Получаем тот же результат.

Ответ: $c\sqrt{2+\dfrac{c}{b}}$.

1997 (март)

Задача № 6. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR — точка L, причем $NQ = LR$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m : n$, считая от точки Q. Найти отношение $PN : PR$.

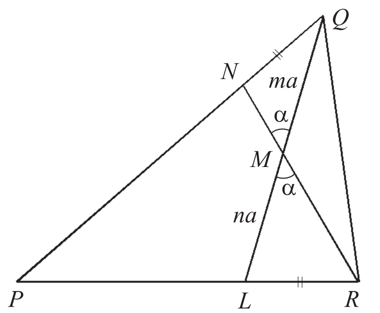

Рис. 21

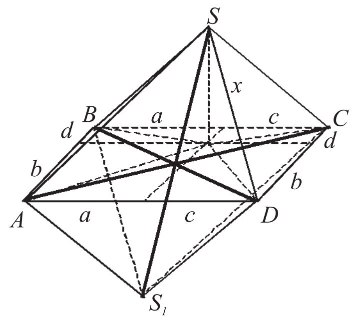

Рис. 22

Р е ш е н и е (Рис. 21). Пусть $QM = ma$, $ML = na$, $\angle QMN = \angle RML = \alpha$. В $\triangle MNQ$ $\dfrac{ma}{\sin\angle QNM} = \dfrac{NQ}{\sin\alpha}$, а в $\triangle MLR$ $\dfrac{na}{\sin\angle MRL} = \dfrac{LR}{\sin\alpha}$. Учитывая, что $NQ = LR$, и деля предыдущие равенства друг на друга, получаем $\dfrac{m\sin\angle MRL}{n\sin\angle QNM} = 1$ $(*)$. В $\triangle PNR$ $\dfrac{\sin\angle MRL}{\sin\angle PNR} = \dfrac{PN}{PR}$, и с учетом того, что $\sin\angle QNM = \sin\angle PNR$, из $(*)$ находим $\dfrac{m\sin\angle MRL}{n\sin\angle PNR} = \dfrac{mPN}{nPR} = 1$, откуда $\dfrac{PN}{PR} = \dfrac{n}{m}$.

В а р и а н т р е ш е н и я. Применяя к $\triangle PQL$, где сторону PQ и продолжение стороны PL пересекает прямая NR, теорему

Менелая, получаем $\frac{PN}{NQ}\frac{QM}{ML}\frac{LR}{RP} = 1$, откуда с учетом того, что $NQ{=}LR$ и $\frac{QM}{ML} = \frac{m}{n}$, следует $\frac{PN}{PR} = \frac{n}{m}$.

Ответ: $n : m$.

Задача № 8. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — прямоугольник, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Найти SD.

Решение (Рис. 22). Соединим основание высоты пирамиды с точками A, B, C, D и спроектируем полученные отрезки на стороны основания. Пусть a, b, c, d — длины этих проекций, h — высота пирамиды, x — искомое боковое ребро. Выражая через a, b, c, d, h, x длины боковых ребер, получаем систему

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + h^2 = 2^2, \\ c^2 + d^2 + h^2 = 4^2, \\ a^2 + d^2 + h^2 = 3^2, \\ c^2 + b^2 + h^2 = x^2. \end{cases}$$

Складывая первое уравнение со вторым, а третье — с четвертым, получаем в левых частях одинаковые выражения, следовательно, $2^2 + 4^2 = 3^2 + x^2$, откуда $x^2 = 11$.

Вариант решения. Рассмотрим точку S_1, симметричную S относительно точки пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$, и соединим ее с A, B, C, D. В параллелограммах SAS_1C и SBS_1D общая диагональ SS_1 и равные диагонали AC и BD. Следовательно, суммы квадратов сторон в этих параллелограммах равны: $2 \cdot x^2 + 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2$. Отсюда $x^2 = 11$.

Ответ: $\sqrt{11}$.

1997 (май)

Задача № 6. На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3 \cdot OA$ от прямой OA, а на луче OA — точка N на расстоянии $3 \cdot OB$ от прямой OB. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 3. Найти MN.

Решение (Рис. 23). Пусть $\angle AOB = \alpha$, $OA = a$, $OB = b$, $MK \perp ON$, $NL \perp OM$, тогда $MK = 3a$, $NL = 3b$. В $\triangle OKM$ и в

$\triangle OLN$ имеем: $OM = \dfrac{3a}{\sin\alpha}$, $ON = \dfrac{3b}{\sin\alpha} \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OMN$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{3}{\sin\alpha} \Rightarrow MN = AB\,\dfrac{3}{\sin\alpha} = \dfrac{AB}{\sin\alpha}\cdot 3 = 2\cdot 3\cdot 3 = 18$, так как по теореме синусов $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = 2R$, $R = 3$, где R — радиус окружности, описанной около $\triangle AOB$.

Ответ: 18.

Задача № 8. Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, равен r, а двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти объем пирамиды, вершины которой находятся в центре вписанного шара и точках его касания с боковыми гранями исходной пирамиды.

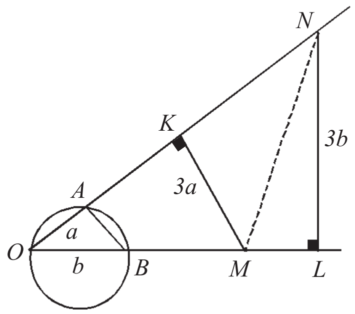

Рис. 23

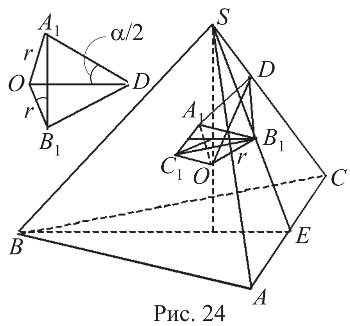

Рис. 24

Р е ш е н и е (Рис. 24). Центр O вписанного шара лежит на высоте правильной пирамиды. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанного шара с боковыми гранями пирамиды. Они лежат на апофемах пирамиды. Действительно, например, радиус OB_1 шара перпендикулярен к касательной плоскости ASC, а значит, лежит в плоскости BSE, так как эта плоскость перпендикулярна грани ASC ($AC \perp BE$ и $AC \perp SE$).

Два радиуса OA_1 и OB_1 перпендикулярны граням двугранного угла с ребром SC, а значит, плоскость OA_1B_1 перпендикулярна SC. Значит, в этой же плоскости $OD \perp SC$ и $\angle A_1DB_1 = \alpha$ — линейный угол двугранного угла с ребром SC.

Пусть O_1 — центр $\triangle A_1B_1C_1$. Тогда $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$, $C_1O_1 = \frac{2r}{\sqrt{3}}\cos\frac{\alpha}{2}$, OO_1 (высота пирамиды $OA_1B_1C_1$) $= \sqrt{OC_1^2 - C_1O_1^2} = r\sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Искомый объем находится прямым вычислением

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}A_1B_1^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot OO_1 =$$
$$= \frac{1}{3}r^3\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{3}r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-2\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-2\cos\alpha}$.

1997 (июль)

Задача № 6. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найти высоту пирамиды.

Решение (Рис. 25). Если боковые ребра пирамиды равно наклонены к плоскости основания пирамиды, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания. При заданных сторонах основания $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$ радиус описанной окружности находится по формуле $R = \frac{abc}{4S}$, где $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, откуда $p = 12$, $S = \sqrt{12\cdot 5\cdot 4\cdot 3} = 12\sqrt{5}$, $R = \frac{21}{10}\sqrt{5}$. Наконец, высота пирамиды $h = R\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания, откуда $h = \frac{21}{10}\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} = \frac{21}{10}\sqrt{15}$.

Ответ: $\frac{21}{10}\sqrt{15}$.

Задача № 8. В трапеции $ABCD$ $BC \| AD$, $\angle ABC = 90°$. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD — в точке N. Известно, что $MC = a$, $BN = b$, а расстояние от точки D до прямой MC равно c. Найти расстояние от точки A до прямой BN.

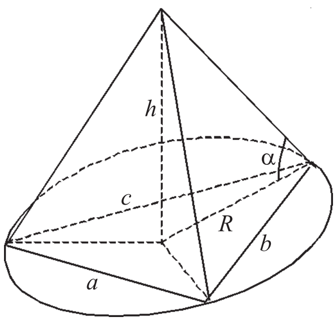

Рис. 25

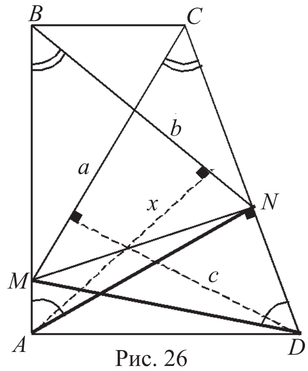

Рис. 26

Р е ш е н и е (Рис. 26). Пусть искомое расстояние от точки A до прямой BN равно x. Соединим A с N и D с M. Около четырехугольников $MBCN$ и $AMND$ можно описать окружности (в каждом из них есть пара прямых противоположных углов). Отмеченные одинаково на рисунке углы равны как вписанные в эти окружности и опирающиеся на дуги с хордой MN. Следовательно, $\triangle ANB \sim \triangle DMC$ по двум углам. Высоты в этих треугольниках, проведенные из точек A и D, относятся как соответствующие стороны: $\dfrac{x}{c} = \dfrac{b}{a}$, откуда искомое расстояние от точки A до прямой BN есть $x = \dfrac{bc}{a}$.

Ответ: bc/a.

1998 (март)

Задача № 6. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$ площадь сечения, проходящего через боковое ребро SK и высоту SO, в два раза больше площади основания пирамиды. Боковое ребро равно $\sqrt{13}$. Найти площадь боковой грани пирамиды.

Р е ш е н и е (Рис. 27). Пусть SO — высота пирамиды $SKLM$, SN — апофема, x — сторона основания. Тогда в $\triangle SKN$ $KO = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$, $SO = \sqrt{13 - \dfrac{x^2}{3}}$, $SN = \sqrt{13 - \dfrac{x^2}{4}}$ (из $\triangle SLN$) $\Rightarrow$ площадь сечения $S_{KSN} = \dfrac{1}{2}\, x\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{13 - \dfrac{x^2}{3}}$, площадь основания

$S_{KLM} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$. По условию $S_{KSN} = 2S_{KLM}$, откуда $x = \sqrt{3}$, площадь боковой грани $S_{MSL} = \frac{1}{2} x \sqrt{13 - \frac{x^2}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{7}{4}\sqrt{3}$.

Задача № 7. В $\triangle ABC$ даны: $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$. Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках M и N, биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке K. Найти расстояние от точки K до прямой AC.

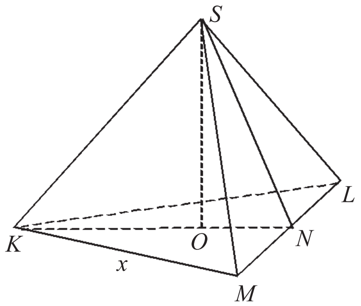

Рис. 27

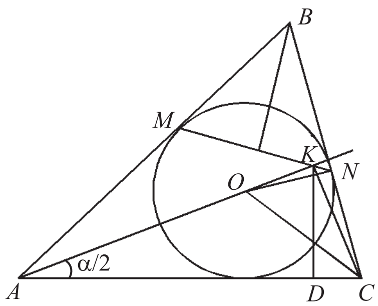

Рис. 28

Р е ш е н и е (Рис. 28). Пусть O — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Соединим точки O и K с точкой C и проведем из точки K перпендикуляр KD к AC. Длину KD надо найти.

Пусть A, B, C — углы треугольника ABC. Угол KOC равен $\frac{A}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$ как внешний угол $\triangle AOC$. В равнобедренном треугольнике MBN (MB и NB — равные отрезки касательных) $\angle BNM = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$. Значит, $\angle KNC = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$. Таким образом, в четырехугольнике $OKNC$ сумма противоположных углов KOC и KNC равна π и около четырехугольника $OKNC$ можно описать окружность. Кроме того, $ON \perp BC$ (N — точка касания). Вписанный в окружность прямой угол ONC опирается на диаметр $\Rightarrow$ $\angle OKC$ также прямой. Итак, в прямоугольном $\triangle AKC$ имеем $AC \cos\angle KAC \sin\angle KAC = b \cos(\alpha/2) \sin(\alpha/2) = (b/2)\sin\alpha = KD$.

Рассмотрите случай, когда точка K лежит вне $\triangle ABC$.

Ответ: $(b/2)\sin\alpha$.

1998 (май)

Задача № 6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ S — вершина, SO — высота, $SA = 4$, $AB = 2$. Через точки S, A, B проведена сфера так, что прямая SO лежит в касательной плоскости к сфере. Найти радиус сферы.

Решение (Рис. 29). Пусть O_1 — центр искомой сферы из условия задачи, O_2 — центр окружности, описанной около $\triangle ASB$. Центр любой сферы, проходящей через точки A, S, B лежит на перпендикуляре к плоскости ASB, проходящем через центр окружности, описанной около $\triangle ASB$. Этот перпендикуляр лежит также в плоскости CSD, так как она, в свою очередь, перпендикулярна грани ASB (плоскость ASB проходит через перпендикуляр AB к плоскости CSD). В этой же плоскости CSD находится прямая SO, и если сфера касается прямой SO в точке S, то точка O_1 лежит на перпендикуляре к SO в точке S. Искомый радиус сферы определяется, таким образом, из подобия $\triangle SOD$ (известен в заданной пирамиде) и $\triangle O_1O_2S$, в котором отрезок SO_2 также известен.

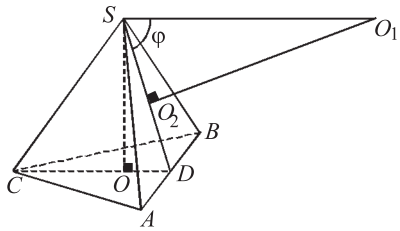

Рис. 29

Далее: пусть $\angle SDO = \angle O_1SO_2 = \varphi$, $OD = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $SD = \sqrt{15}$ (из $\triangle SAD$) $\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{OD}{SD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{15}}$, $R = SO_2 = \dfrac{8}{\sqrt{15}}$ (радиус окружности, описанной около известного $\triangle ASB$). Искомый радиус сферы $SO_1 = \dfrac{R}{\cos\varphi} = 8\sqrt{3}$.

Ответ: $8\sqrt{3}$.

Задача № 8. В треугольнике ABC дано: $AB = c$, $AC = b\,(b > c)$, AD — биссектриса. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AC в точке E. Найти AE.

Решение (Рис. 30). Пусть $\angle BAD = 2\alpha$, $AE = AF = x$,

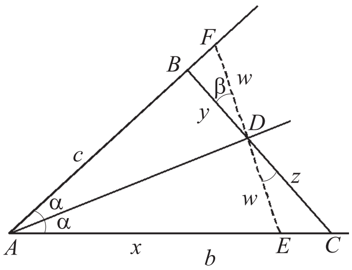

Рис. 30

$BD = y$, $DC = z$, $FD = DE = w$. Тогда (на данном рисунке!) $BF = x - c$, $EC = b - x$, $AD = x\cos\alpha$. Применяя к $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ теорему косинусов и деля полученные равенства друг на друга, получаем $\dfrac{c^2 + (x\cos\alpha)^2 - 2cx\cos^2\alpha}{b^2 + (x\cos\alpha)^2 - 2bx\cos^2\alpha} = \dfrac{y^2}{z^2}$. По свойству биссектрисы в $\triangle ABC$ имеем $\dfrac{y}{z} = \dfrac{c}{b}$. Итак, $\dfrac{c^2 + (x\cos\alpha)^2 - 2cx\cos^2\alpha}{b^2 + (x\cos\alpha)^2 - 2bx\cos^2\alpha} = \dfrac{c^2}{b^2} \Rightarrow x = \dfrac{2bc}{b+c}$.

Второй вариант решения. Пусть $\angle BDF = \beta$. Отношение площадей $\triangle BDF$ и $\triangle EDC$ $\dfrac{\frac{1}{2}yw \cdot \sin\beta}{\frac{1}{2}zw \cdot \sin\beta}$ равно отношению $\dfrac{x-c}{b-x}$ оснований BF и EC, так как высоты $\triangle BDF$ и $\triangle EDC$, проведенные из точки D, лежащей на биссектрисе, равны. В $\triangle ABC$, как было отмечено выше, $\dfrac{y}{z} = \dfrac{c}{b}$. Из равенства $\dfrac{x-c}{b-x} = \dfrac{c}{b}$ находим $x = \dfrac{2bc}{b+c}$.

Третий вариант решения. По теореме Менелая $\dfrac{AB}{BF}\,\dfrac{FD}{DE}\,\dfrac{EC}{CA} = 1$, то есть $\dfrac{c}{x-c} \cdot \dfrac{w}{w} \cdot \dfrac{b-x}{b} = 1$, откуда $x = \dfrac{2bc}{b+c}$.

Замечание. Если $x < c$, то $x > b$. Тогда $BF = c - x$, $EC = x - b$ и отношение $\dfrac{x-c}{b-x}$ остается тем же самым.

Ответ: $\dfrac{2bc}{b+c}$.

1998 (июль)

Задача № 6. На отрезке AB взята точка C, отрезки AB и CB служат диаметрами окружностей. Хорда AM касается меньшей окружности в точке D. Прямая BD пересекает бóльшую окружность в точке N, $\angle DAB = \alpha$, $AB = 2R$. Найти площадь четырехугольника $ABMN$.

Р е ш е н и е (Рис. 31). По формуле площади четырехугольника $S_{ABMN} = \frac{1}{2} AM \cdot BN \cdot \sin \angle MDB$ $(*)$.

Далее: $AM = 2R\cos\alpha$ (прямой угол $\angle AMB$ опирается на диаметр), $\angle ADO = \frac{\pi}{2}$ (AM — касательная) $\Rightarrow \angle DOB = \frac{\pi}{2} + \alpha \Rightarrow \angle ODB = \angle DBO = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ (в равнобедренном $\triangle DOB$) $\Rightarrow \angle MDB = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$. Итак, $AM = 2R\,\cos\alpha$, $BN = 2R\,\cos\angle NBA = 2R\,\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$, $\angle MDB = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$, откуда с учетом $(*)$ получаем ответ.

Ответ: $2R^2\,\cos\alpha\,\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

Задача № 8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) угол между прямыми AC_1 и A_1B равен α, $AA_1 = 2$. Найти AB.

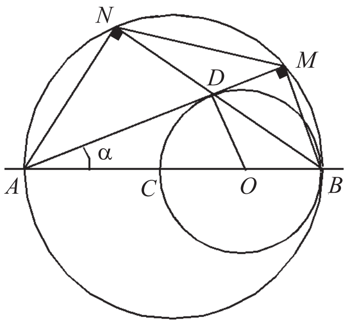

Рис. 31

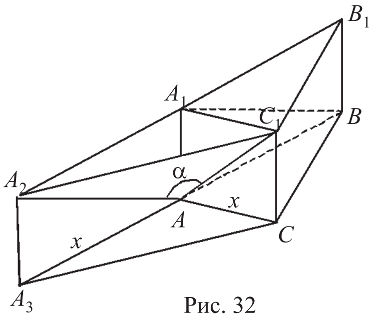

Рис. 32

Р е ш е н и е (Рис. 32). Параллельный перенос одной из скрещивающихся диагоналей боковых граней призмы до пересечения с другой диагональю, например, перенос A_1B в положение A_2A дает $\triangle A_2AC_1$ с известным углом $\angle A_2AC_1 = \alpha$.

Пусть $AB = AC = A_3A = x$, по условию $AA_1 = A_2A_3 = 2$. Выражая стороны $\triangle A_2AC_1$ через x, затем с помощью теоремы косинусов для $\triangle A_2AC_1$ находим искомый отрезок $x = AB$: $\angle A_3AC = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow A_2C_1 = A_3C = x\sqrt{3}$, $A_2A = AC_1 = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow$

в $\triangle A_2AC_1$ имеем $(x^2+4)+(x^2+4)-2(x^2+4)\cos\alpha = 3x^2 \Rightarrow$ $x = AB = \sqrt{\dfrac{8(1-\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha}}$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{8(1-\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha}}$.

1999 (март)

Задача № 6. На сторонах острого угла ABC взяты точки A и C. Одна окружность касается прямой AB в точке B и проходит через точку C. Вторая окружность касается прямой BC в точке B и проходит через точку A. Точка D — вторая общая точка окружностей. Известно, что $AB = a$, $CD = b$, $BC = c$. Найти AD.

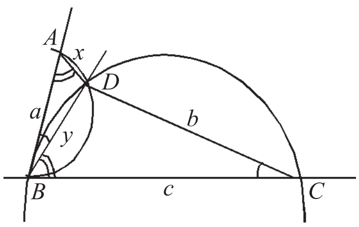

Рис. 33

Р е ш е н и е (Рис. 33). Пусть $AD = x$, $BD = y$. Одинаково отмеченные углы равны как углы между хордой и касательной и вписанные углы, опирающиеся на те же хорды $\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle BDC \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{b}$ $\Rightarrow \dfrac{a^2}{c^2} = \dfrac{x}{b} \Rightarrow x = b\left(\dfrac{a}{c}\right)^2$.

Ответ: $b\left(\dfrac{a}{c}\right)^2$.

Задача № 8. Высота SH правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит диаметром сферы. Известно, что $AS = b$, а двугранный угол при основании пирамиды равен β. Найти длину линии пересечения сферы с поверхностью пирамиды.

Р е ш е н и е (Рис. 34). Пусть $\angle ASB = \alpha$, $SE = k$, $NM = SN = r$ — радиус дуги $\breve{KLM}$, по которой сфера пересекает грань ASB. В $\triangle SHE$ и $\triangle SEA$ находим: $HE = k\cdot\cos\beta$, $EA = k\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $HE = EA \Rightarrow \cos\beta = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ $(*)$ $\Rightarrow \alpha = 2\operatorname{arctg}(\cos\beta)$, а $\angle KNM = 2\alpha$ (центральный угол в окружности с центром N, соответствующий вписанному в эту окружность углу $\angle KSM = \alpha$) $\Rightarrow \breve{KLM} = r\cdot 2\alpha$ (четверть искомой длины линии пересечения сферы с пирамидой).

Далее: $r = NM = SN = SO \cdot \sin\beta$ (в $\triangle SON$) $= \dfrac{1}{2} SH \cdot$ $\cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}\left(SA \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin^2\beta =$ (в силу $(*)$) $= \dfrac{b\sin^2\beta}{2\sqrt{1+\cos^2\beta}}$.

Искомая длина $4 \cdot \smile KLM = 4 \cdot r \cdot 2\alpha = 4 \cdot \dfrac{b\sin^2\beta}{2\sqrt{1+\cos^2\beta}} \cdot 4\,\mathrm{arctg}\,(\cos\beta)$.

З а м е ч а н и е. В силу $(*)$, то есть $\cos\beta = \mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$ можно было получить и более громоздкую конструкцию $\cos\dfrac{\alpha}{2} =$ $= \cos(\mathrm{arctg}\,(\cos\beta))$. Гораздо лучше, конечно, выразить сначала $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ через $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$, что и сделано выше: $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}} =$ $= \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2\beta}}$. Для самого угла α, входящего в длину дуги, остается, конечно, выражение $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,(\cos\beta)$.

Ответ: $\dfrac{8b\sin^2\beta}{\sqrt{1+\cos^2\beta}} \cdot \mathrm{arctg}\,(\cos\beta)$.

1999 (май)

Задача № 6. В ромбе $ABCD$ высоты BP и BQ пересекают диагональ AC в точках M и N (M между A и N), $AM = p$, $MN = q$. Найти PQ.

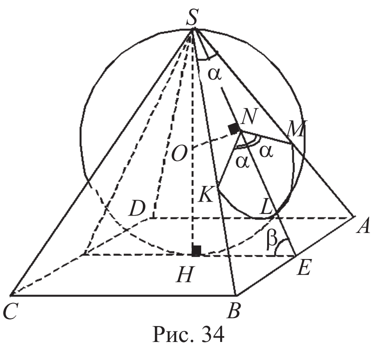

Рис. 34

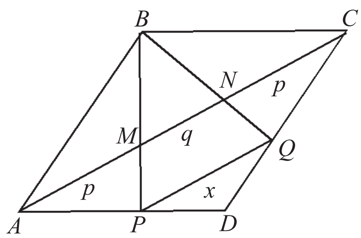

Рис. 35

Р е ш е н и е (Рис. 35). Дано: $AM = p$, $MN = q \Rightarrow NC =$ $= p$. Далее: $\triangle AMP \sim \triangle BMC \Rightarrow \dfrac{MP}{BM} = \dfrac{p}{p+q}$ $(*)$, $\triangle PBQ \sim$

$\sim \triangle BMN \Rightarrow \dfrac{BP}{BM} = \dfrac{x}{q} \Rightarrow \dfrac{BM+MP}{BM} = 1 + \dfrac{MP}{BM} = \dfrac{x}{q}$ $(**)$.

Исключая из $(*)$ и $(**)$ $\dfrac{MP}{BM}$, находим $x = \dfrac{q\,(2p+q)}{p+q}$.

Ответ: $\dfrac{q\,(2p+q)}{p+q}$.

Задача № 8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1)$ $AB = BC = 2a$, $AA_1 = a$. Плоскость сечения проходит через точки B_1 и D параллельно прямой AC. Найти радиус шара, касающегося этого сечения и трех граней параллелепипеда с общей вершиной B.

Решение (Рис. 36). Центр O шара, касающегося указанных в условии плоскостей, находится в плоскости BB_1D — биссектральной плоскости двугранного угла с ребром BB_1. Эта плоскость перпендикулярна, во-первых, плоскости $ABCD$ (так как проходит через BB_1 — перпендикуляр к этой плоскости), а, во-вторых, перпендикулярна плоскости проведенного сечения (так как перпендикулярна прямой AC, которая параллельна плоскости сечения по условию). Следовательно, $\angle B_1DB$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью $ABCD$ и плоскостью сечения. На рисунке изображена только половина сечения — треугольник B_1ED. Значит, шар с центром O касается плоскостей этого двугранного угла в точках M и N на прямых BD и B_1D и точке O — на биссектрисе этого угла.

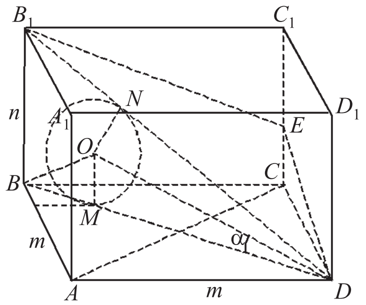

Рис. 36

Решим немного более общую задачу. Пусть $AB = m$, $BB_1 = n$, $OM = x$ (радиус шара), $\angle ODM = \alpha \Rightarrow \angle B_1DB = 2\alpha$. Так как шар касается трех граней параллелепипеда с общей вершиной B, то $BM = x\sqrt{2}$. В треугольнике BOD имеем: $BM + MD = BD$ или $x\,(\sqrt{2} + \operatorname{ctg}\alpha) = m\sqrt{2} \Rightarrow x = \dfrac{m\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \operatorname{ctg}\alpha}$ $(*)$. В $\triangle B_1BD$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{BB_1}{BD} = \dfrac{n}{m\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\dfrac{n}{m\sqrt{2}} \right) \Rightarrow$ при $m = 2a$, $n =$ $= a$ имеем $OM = x = \dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{2}}{4} \right)}$.

Отметим опять, как и в Замечании к Задаче 8, 1999 (март), что использование формул тригонометрии позволяет получить более изящную и краткую форму ответа: $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1} = \dfrac{n}{m\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2\sqrt{2} \left(\dfrac{m}{n} \right) \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1 \Rightarrow$ (оставляя для острого угла $\alpha/2$ положительный корень) $\Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2} \left(\dfrac{m}{n} + \sqrt{\left(\dfrac{m}{n} \right)^2 + \dfrac{1}{2}} \right)$ $\Rightarrow$ (подставляя $\operatorname{ctg} \alpha$ в $(*)$) $\Rightarrow OM = x = \dfrac{m}{1 + \dfrac{m}{n} + \sqrt{\left(\dfrac{m}{n} \right)^2 + \dfrac{1}{2}}}$.

Подставляя $m = 2a$, $n = a$ и избавляясь от иррациональности в знаменателе, получаем более компактный ответ $x = \dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{3}\, a$.

$$\textit{Ответ:} \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{2}}{4} \right)} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}\, a.$$

1999 (июль)

Задача № 6. Через точку N проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром O. На одной из этих прямых взята точка A, а на другой прямой взята точка B так, что $OA = OB$, $OA > ON$, $NA \neq NB$. Известно, что $NA = a$, $NB = b$, $OA = c$. Найти ON.

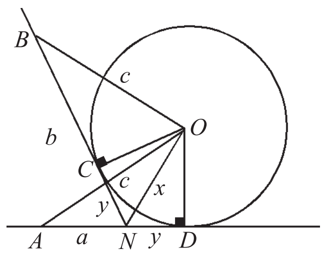

Рис. 37

Р е ш е н и е (Рис. 37). Пусть $ON =$ $= x$, D и C — точки касания, $NC =$ $= ND = y$. Тогда $AD = BC \Rightarrow a +$ $+ y = b - y \Rightarrow y = \dfrac{b - a}{2}$ $(*)$. Далее: из

$\triangle ONC$ и $\triangle OBC$ имеем $x^2 - y^2 = c^2 - (b-y)^2$, откуда с учетом $(*)$ находим $x^2 = c^2 - ab \Rightarrow x = \sqrt{c^2 - ab}$.

Ответ: $\sqrt{c^2 - ab}$.

Задача № 7. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S боковое ребро SA равно b. Сфера радиуса $\frac{b}{2}$ касается плоскости SAC в точке C и проходит через точку B. Найти $\angle ASC$.

Решение (Рис. 38). Центр O сферы, проходящей через точки B и C, находится в плоскости, проходящей через середину отрезка BC и перпендикулярной к нему, то есть в плоскости SAD — биссектральной плоскости двугранного угла с ребром SA. Поэтому, если C — точка касания сферы с плоскостью SAC (единственная общая точка сферы и плоскости SAC), то B будет также единственной общей точкой сферы и плоскости SAB, то есть точкой касания сферы и плоскости SAB.

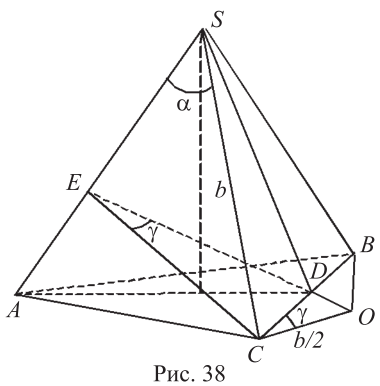

Рис. 38

Перпендикуляры OC и OB к плоскостям SAC и SAB лежат в плоскости, перпендикулярной к ребру SA, точка D также лежит в этой плоскости. Значит, плоскость SAD и плоскость COB пересекаются по прямой OD, пересекающей SA в точке E, $OE \perp SA$. Тогда $CE \perp SA$ по теореме о трех перпендикулярах ($CD \perp$ пл. SAD, $DE \perp SA$), и $OC \perp CE$ (радиус OC перпендикулярен касательной плоскости SAC).

Пусть $\angle ASC = \alpha$, $\angle CED = \gamma$, $SC = b$ по условию.

Тогда $CE = b\sin\alpha$ (из $\triangle SCE$), $CD = b\sin\frac{\alpha}{2}$ (из $\triangle SCD$), $CO = \frac{b}{2}$ (по условию), $\angle CED = \angle OCD = \gamma \Rightarrow \sin\gamma = \frac{CD}{CE} = $

$$= \frac{b\sin\frac{\alpha}{2}}{b\sin\alpha} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}},\ \cos\gamma = \frac{CD}{CO} = 2\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} + 4\sin^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 1\ (*) \Rightarrow \frac{1}{2(1+\cos\alpha)} + 2(1-\cos\alpha) - 1 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{13}-1}{4}.$$

Если решать биквадратное относительно $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ уравнение (*), то $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{8}}$. Итак, $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{13}-1}{4} = 2\arccos\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{8}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{13}-1}{4}$.

2000 (март)

Задача № 6. В правильной треугольной пирамиде высота равна 3, а объем равен $9\sqrt{3}$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

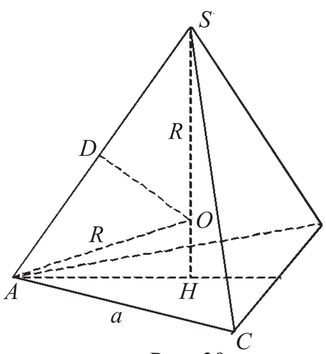

Рис. 39

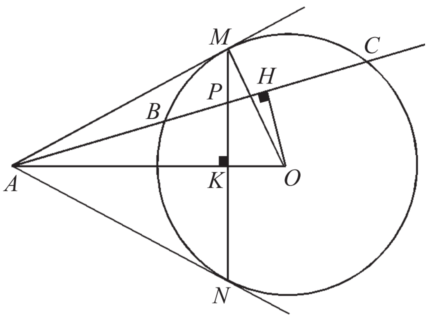

Рис. 40

Решение (Рис. 39). Центр сферы, описанной около правильной пирамиды $SABC$, находится на высоте SH на равных расстояниях от точек S и $A \Rightarrow SO = AO = R$, $OD \perp SD$, $SD = \dfrac{1}{2}SA$.

Пусть $AC = a$. Тогда $V = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 3 = 9\sqrt{3}$ (по условию) $\Rightarrow a = 6$, $AH = \dfrac{2}{3}a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{21}$; $\triangle SOD \sim \triangle SAH \Rightarrow R = SO = \dfrac{SD\cdot SA}{SH} = \dfrac{21}{2\cdot 3} = \dfrac{7}{2}$.

Ответ: $7/2$.

Задача № 8. Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN — в точке P, $AB : BC = 2 : 3$. Найти $AP : PC$.

Р е ш е н и е (Рис. 40). Проведем AO (O — центр окружности), радиус OM ($OM \perp AM$) и $OH \perp AC$. В точке K пересекаются отрезки AO и MN.

Заметим, что $\triangle AMK \sim \triangle AOM$, $\triangle APK \sim \triangle AOH \Rightarrow \dfrac{AK}{AM} = \dfrac{AM}{AO}$ $(*)$, $\dfrac{AK}{AP} = \dfrac{AH}{AO}$ $(**)$.

Далее: из $AM^2 = AB \cdot AC$ и из $(*)$ и $(**)$ следует $AM^2 = AB \cdot AC = AK \cdot AO = AP \cdot AH \Rightarrow AP = \dfrac{AB \cdot AC}{AH}$ $(3*)$.

Пусть $AB = 2a$, $AC = 5a$, тогда $AH = \dfrac{7a}{2}$. Из $(3*)$ тогда находим: $AP = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 2}{7}\, a = \dfrac{20}{7}\, a$, $PC = AC - AP = \left(5 - \dfrac{20}{7}\right) a = \dfrac{15}{7}\, a$. Значит, $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{20}{7} \cdot \dfrac{7}{15} = \dfrac{4}{3}$.

В а р и а н т р е ш е н и я. Повторите чертеж по условию задачи и проведите только AO. В окружности $PM \cdot PN = BP \cdot PC \Rightarrow (MK - PK)(KN + PK) = BP \cdot PC$ $(*)$.

Пусть $AB = 2a$, $BC = 3a$, $AP = x$, $\angle PAK = \alpha$. Тогда $AM^2 = AB \cdot AC = 10a^2$, $AK = x \cos\alpha$, $PK = x \sin\alpha$ $(**)$, $KN = MK = \sqrt{AM^2 - AK^2} = \sqrt{10a^2 - x^2 \cos^2\alpha}$ $(3*)$, $BP = x - 2a$ $(4*)$, $PC = AC - AP = 5a - x$ $(5*)$.

Подставляя $(**)$, $(3*)$, $(4*)$, $(5*)$ в $(*)$, находим: $x = AP = \dfrac{20}{7}\, a$, $PC = \dfrac{15}{7}\, a \Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{4}{3}$.

Ответ: 4 : 3.

2000 (май)

Задача № 6. В треугольной пирамиде $SABC$ $SC \perp AB$, $SC \perp AC$, $AB = BC = 2$, $AC = 1$, $SC = 4$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

Р е ш е н и е (Рис. 41). Геометрическим местом точек, равноудаленных от A, B и C, является прямая S_1O_1 перпендикулярная к плоскости ABC, и проходящая через O_1 — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. Центр сферы, описанной около пирамиды, лежит на прямой S_1O_1 на равных расстояниях от S и

C. Поэтому для получения центра сферы O надо в плоскости, содержащей прямые S_1O_1 и SC, провести серединный перпендикуляр к отрезку SC. Значит, $OO_1 = \frac{1}{2}SC = 2$. Площадь известного треугольника ABC находится по формуле Герона $S = \sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{15}$, радиус O_1C окружности, описанной около $\triangle ABC$ — по формуле $O_1C = R = \frac{abc}{4S} = \frac{2\cdot 2\cdot 1\cdot 4}{4\cdot\sqrt{15}} = \frac{4}{\sqrt{15}}$, искомый радиус сферы — по теореме Пифагора из $\triangle OO_1C : OC = \sqrt{O_1C^2 + OO_1^2} = \sqrt{\frac{16}{15} + 4} = 2\sqrt{\frac{19}{15}}$.

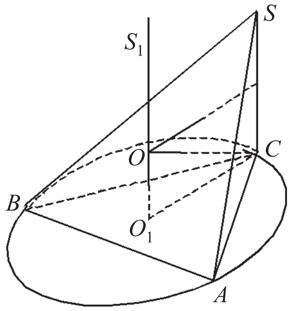

Рис. 41

Ответ: $2\sqrt{\frac{19}{15}}$.

Задача № 8. На стороне BC остроугольного треугольника $\triangle ABC$ ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = a$, $MD = b$, H — точка пересечения высот $\triangle ABC$. Найти AH.

Р е ш е н и е (Рис. 42). Пусть окружность пересекает сторону AB в точке C_1. Соединим M с B и C. Углы BC_1C и BMC — прямые, как опирающиеся на диаметр $\Rightarrow CC_1$ — высота, $\angle ABD = \angle CHD$ как углы с перпендикулярными сторонами $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CHD$ и $\triangle MBD \sim \triangle CMD \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{HD}$, $\frac{MD}{BD} = \frac{DC}{MD} \Rightarrow AD\cdot HD = MD^2$ $(*)$. По условию $AD = a$, $MD = b$. Пусть $AH = x$. Тогда из $(*)$ находим $a(a - x) = b^2 \Rightarrow x = AH = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

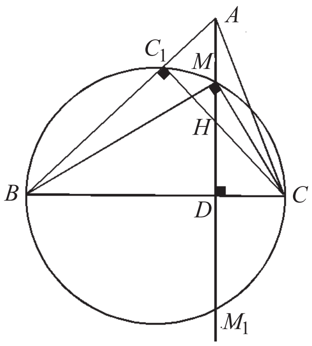

Рис. 42

В а р и а н т р е ш е н и я. Продолжим высоту AD до пересечения с окружностью в точке M_1. Далее

$\triangle AC_1H \sim \triangle CDH \Rightarrow \dfrac{HD}{CH} = \dfrac{HC_1}{AH} \Rightarrow AH \cdot HD = CH \cdot HC_1$. С другой стороны, $CH \cdot HC_1 = MH \cdot HM_1 \Rightarrow AH \cdot HD = MH \cdot \cdot HM_1$ $(*)$. Так как $MH = MD - HD$, $HM_1 = M_1D + HD$ то из $(*)$ находим $x\,(a-x) = (b-(a-x))(b+(a-x)) \Rightarrow x = AH = = \dfrac{a^2-b^2}{a}$.

Ответ: $\dfrac{a^2-b^2}{a}$.

2000 (июль)

Задача № 6. В $\triangle ABC$ дано: $AB = a$, $AC = b$, точка O — центр описанной окружности. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найти CD.

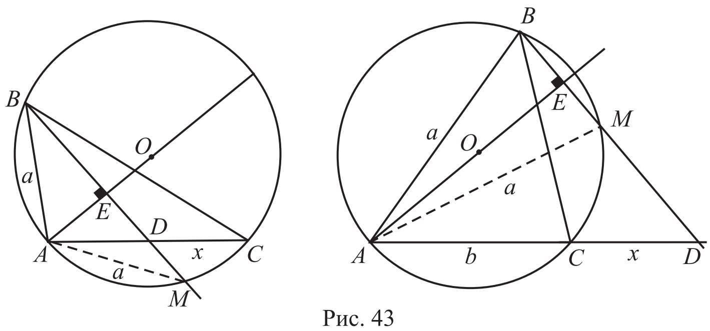

Рис. 43

Решение геометрическое (Рис. 43). В одних вариантах этой задачи прямая пересекала сторону треугольника, как в приведенном условии, в других — продолжение стороны.

Дано: $AB = a$, $AC = b$. На первом рисунке $a < b$ (прямая BD пересекает сторону треугольника), на втором рисунке $a > b$ (прямая BD пересекает продолжение стороны треугольника).

Далее рассмотрены обе возможности. Соединим точку M с точкой $A \Rightarrow AM = AB = a$ ($BE = EM$, $\triangle BAM$ — равнобедренный), $\angle ABM = \angle BCA$ (опираются на равные хорды) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADB$ ($\angle BAD$ — общий) $\Rightarrow \dfrac{AD}{a} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow AD = \dfrac{a^2}{b}$, $CD = |AD - AC| = = |\dfrac{a^2}{b} - b| = \dfrac{|a^2-b^2|}{b}$. Если $a < b$, то $CD = = \dfrac{b^2-a^2}{b}$, если $a > b$, то $CD = \dfrac{a^2-b^2}{b}$.

Вариант решения (алгебраический). Опять $AM = AB = a$. Пусть $BE = EM = c$, $CD = x$, $MD = y \Rightarrow$

$$\begin{cases} x\,(b-x) = y\,(2c-y), \\ (b-x)^2 - (c-y)^2 = a^2 - c^2, \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{b^2-a^2}{b} \ \ (\text{если } a < b),$$

$$\begin{cases} x\,(b+x) = y\,(2c+y), \\ (b+x)^2 - (c+y)^2 = a^2 - c^2, \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{a^2-b^2}{b} \ \ (\text{если } a > b),$$

Первые уравнения в этих системах соответственно — свойства пересекающихся хорд AC и BM и секущих DA и DB. Вторые уравнения — теоремы Пифагора в $\triangle ADE$ и $\triangle ABE$.

Выше было отмечено, что приведенному условию задачи соответствует первый рисунок, где $a < b$.

Ответ: $\dfrac{b^2-a^2}{b}$.

Задача № 8. Высота конуса равна 6, радиус основания равен 3. Точка A находится на расстоянии 3 от оси конуса и на расстоянии 4 от плоскости основания конуса. Прямая AB имеет с конусом единственную общую точку C и пересекает плоскость основания конуса в точке B. Расстояние от точки C до плоскости основания конуса равно 2. Найти расстояние от точки B до вершины конуса.

Решение (Рис. 44). Пусть S — вершина конуса, SD — образующая конуса, содержащая точку C, E — точка пересечения прямой SA с плоскостью основания конуса $\Rightarrow ED$ — касательная к окружности основания конуса, иначе плоскость SED содержала бы две образующие, и прямая AC имела бы более, чем одну общую точку с конусом $\Rightarrow OD \perp ED$ и точка B — точка пересечения прямых AC и ED в плоскости SED.

Дано: $SO = 6$, $DO = AO_1 = 3$, $AH = 4$, $CF = 2$. Пл. $AO_1D_1 \parallel$ пл. $EOD \Rightarrow AD_1 \parallel DB$, $D_1O_1 \perp AD_1$, $D_1O_1 = \dfrac{SO_1}{SO}DO = 1$, $AD_1 = \sqrt{AO_1^2 - D_1O_1^2} = 2\sqrt{2}$, $\dfrac{CD}{D_1D} = \dfrac{2}{4}$ $\Rightarrow DB = AD_1 = 2\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{SO^2 + DO^2} = \sqrt{45}$, $SB = \sqrt{SD^2 + DB^2} = \sqrt{53}$.

Ответ: $\sqrt{53}$.

2001 (март)

Задача № 6. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$, все ребра которой равны $8a$, на ребре SK взята точка A так, что $SA : AK = 1 : 3$. Через точку A проведена плоскость, параллельная ребру SM и высоте KN $\triangle KLM$. Найти периметр сечения пирамиды этой плоскостью.

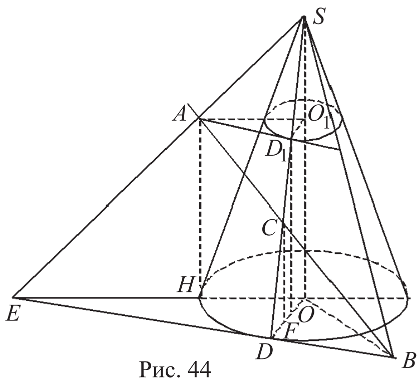

Рис. 44

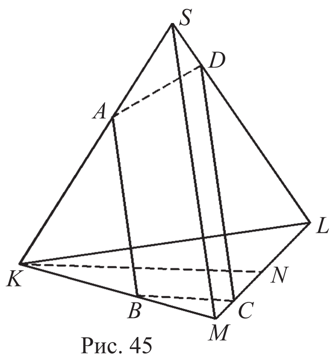

Рис. 45

Р е ш е н и е (Рис. 45). Плоскость сечения, параллельная ребру SM двугранного угла, пересекает его грани по параллельным прямым AB и CD. Эти прямые отсекают на сторонах правильных треугольников (граней правильного тетраэдра) равные отрезки: $SA = MB$, $SD = MC \Rightarrow AD = BC$.

Плоскость сечения пересекает основание пирамиды по прямой BC, причем $BC \parallel KN$, так как иначе прямая KN пересекала бы плоскость сечения, которой KN параллельна по условию.

По условию $SA : AK = 1 : 3$ и $SM = MK = 8a$. Длины отрезков AB, BC, AD и DC вычисляются из подобия треугольников с известными коэффициентами подобия: $\dfrac{AB}{SM} = \dfrac{KA}{KS} = \dfrac{3}{4}$ $\Rightarrow AB = 6a$, $\dfrac{BC}{KN} = \dfrac{MB}{MK} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow BC = AD = \dfrac{1}{4}\,8a\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $\dfrac{CD}{SM} = \dfrac{LC}{LM} = \dfrac{7}{8} \Rightarrow CD = 7a$. Окончательно: $P_{ABCD} = AB + {}$ $+ CD + 2BC = (6 + 7 + 2\sqrt{3})\,a = (13 + 2\sqrt{3})\,a$.

Ответ: $(13 + 2\sqrt{3})\,a$.

Задача № 8. На стороне острого угла KOM взята точка L (L между O и K). Окружность проходит через точки K и L и касается луча OM в точке M. На дуге LM, не содержащей точки K, взята точка N. Расстояния от точки N до прямых OM, OK и KM равны соответственно m, k и l. Найти расстояние от точки N до прямой LM.

Р е ш е н и е (Рис. 46). Проведем $ND \perp LM$, пусть $ND = n$ (n надо найти), A, B, C — основания перпендикуляров, проведенных из точки N к прямым OK, OM и KM. По условию $NA = k$, $NB = m$, $NC = l$.

Проведем отрезки NK и $NM \Rightarrow \triangle NKA \sim \triangle NMD$ (в этих прямоугольных треугольниках $\angle NKA = \angle NML$ как вписанные, опирающиеся на дугу NL).

Другая пара подобных треугольников $\triangle NKC \sim \triangle NMB$ имеет те же гипотенузы NK и NM, $\angle NKM = \angle NMB$ (вписанный угол равен углу между хордой MN и касательной MB).

Из этих двух подобий следует: $\dfrac{NA}{ND} = \dfrac{NK}{NM} = \dfrac{NC}{NB} \Rightarrow \dfrac{k}{n} = \dfrac{l}{m}$ $\Rightarrow n = \dfrac{mk}{l}$.

Ответ: mk/l.

2001 (май)

Задача № 6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота равна 4, а сторона основания равна 2. Шар, вписанный в пирамиду, касается граней ASC и CSB в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN.

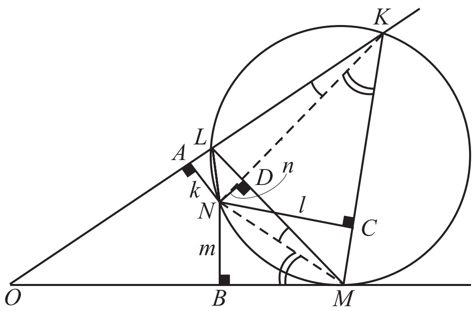

Рис. 46

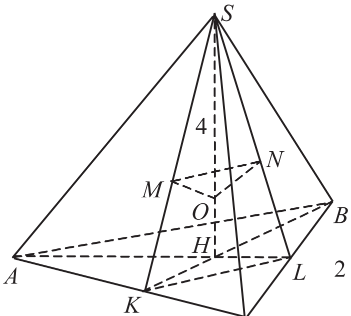

Рис. 47

Р е ш е н и е (Рис. 47). Пусть O — центр вписанного шара (в правильной пирамиде точка O лежит на высоте SH), M и N — точки касания шара с гранями ASC и CSB (лежат на апофемах SK и SL). Так как $KM = KH = LH = LN$ (отрезки касательных к шару, проведенных из точек K и L), то в равнобедренном $\triangle KSL$ $MN \parallel KL \Rightarrow \dfrac{MN}{KL} = \dfrac{SN}{SL}$ $(*)$.

По условию $SH = 4$, $BC = 2$. Вычисляя KL, SL и SN, находим: $KL = \frac{1}{2}AB = 1$, $LH = LN = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $SL = \sqrt{SH^2 + LH^2} = \sqrt{16 + \frac{1}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$, $SN = SL - LN = \frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$. Из $(*)$ находим $MN = KL\cdot\frac{SN}{SL} = 1\cdot\frac{6\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 7} = \frac{6}{7}$.

Ответ: $6/7$.

Задача № 8. На прямой взяты три различные точки L, M и N (M между L и N, $LM \neq MN$). На отрезках LM, MN и LN как на диаметрах построены полуокружности, середины которых — соответственно точки A, B и C. Точка C лежит по одну сторону, а точки A и B — по другую сторону от прямой LN. Найти отношение площади фигуры, ограниченной этими тремя полуокружностями, к площади $\triangle ABC$.

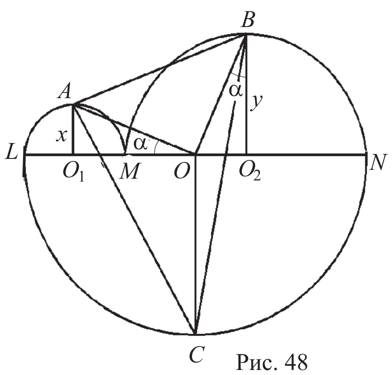

Рис. 48

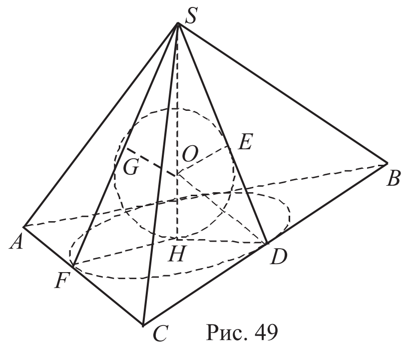

Рис. 49

Р е ш е н и е (Рис. 48). Пусть $O_1A = x$, $O_2B = y \Rightarrow OC = x + y$, $OO_1 = y$, $OO_2 = x \Rightarrow \triangle AO_1O = \triangle BO_2O$.

Пусть $\angle AOO_1 = \alpha \Rightarrow \angle BOO_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Формула для площади, ограниченной тремя полуокружностями, имеет вид $\underline{S_3 = \pi\,(x^2 + xy + y^2)}$ $(*)$, $\angle AOB = \pi - \alpha - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2}AO\cdot OB = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $S_{AOC} = \frac{1}{2}OC\cdot O_1O = \frac{1}{2}(x + y)\,y = \frac{1}{2}(xy + y^2)$, $S_{BOC} = \frac{1}{2}OC\cdot O_2O =$

$= \dfrac{1}{2}(x+y)\,x = \dfrac{1}{2}(x^2+xy)$, $\underline{S_{ABC}} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC} =$ $= \underline{x^2+xy+y^2}$ $(**)$. Из $(*)$ и $(**)$ получаем $S_3 : S_{ABC} = \pi$.

Ответ: π.

2001 (июль)

Задача № 6. В пирамиде $SABC$ дано: $AB = 7$, $BC = 8$, $CA = 9$. Высоты боковых граней, проведенные из вершины S, являются касательными к сфере, вписанной в пирамиду. Радиус этой сферы равен $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Найти объем пирамиды.

Р е ш е н и е (Рис. 49). Пусть E, G и H — точки касания сферы с гранями BSC, ASC и основанием ABC соответственно. Плоскость EOH перпендикулярна пл. BSC и пл. $ABC \Rightarrow$ пл. EOH пересекает эти плоскости по прямым DE и DH, перпендикулярным к ребру BC. Аналогичная ситуация с прямыми FG, FH и ребром AC. По условию прямые DE и FG содержат высоты боковых граней пирамиды, т.е. проходят через точку S $\Rightarrow \triangle SHD = \triangle SHF$ (общий катет SH и равные углы при точке S в равных $\triangle SEO$ и $\triangle SGO$) $\Rightarrow HD = HF$. Аналогичный треугольник связан с гранью ASB.

Итак, H — точка, равноудаленная от сторон $\triangle ABC$ — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

В $\triangle ABC$ по условию $AB = 7$, $BC = 8$, $CA = 9$, $OH = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow p = \dfrac{1}{2}(7+8+9)$, $S = \sqrt{12\cdot 5\cdot 4\cdot 3} = 12\sqrt{5}$, $S = pr$, где $r =$ $= HD \Rightarrow r = \sqrt{5}$. Пусть $\angle SDH = \alpha \Rightarrow OH : HD = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ $SH : HD = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$, $SH = r\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4\sqrt{5}}{3}$, $V = \dfrac{1}{3}\cdot 12\sqrt{5}\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{3} =$ $= \dfrac{80}{3}$.

В а р и а н т р е ш е н и я. Пусть в подобных треугольниках SOE и SDH $OE = OH = R$, $HD = r$, $SO = x$, $SE =$ $= \sqrt{x^2-R^2}$, $SH = x + R$, $\dfrac{\sqrt{x^2-R^2}}{R} = \dfrac{x+R}{r} \Rightarrow x = R\,\dfrac{r^2+R^2}{r^2-R^2}$ и т. д.

Ответ: $80/3$.

Задача № 8. В треугольнике ABC $\angle BAC = \dfrac{\pi}{4}$. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и N. На отрезках AN и CM как на диаметрах построены окружности. Их общая хорда пересекает отрезок MN в точке D, $MD : DN = \sqrt{3} : 1$. Найти $\angle BCA$.

Р е ш е н и е (Рис. 50). Продолжим прямую MN ($MN \parallel AC$ по условию) до пересечения с окружностями $\Rightarrow$ фигура $AEFC$ — прямоугольник ($\angle AEN$ и $\angle MFC$ опираются на диаметры).

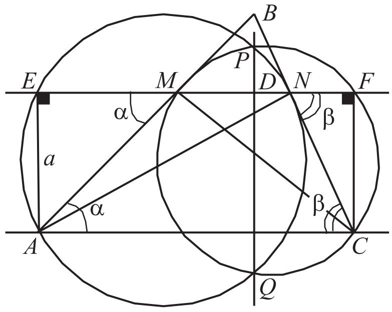

Рис. 50

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $EA = FC = a \Rightarrow \angle EMA = \alpha$, $\angle FNC = \beta$, EN и PQ — пересекающиеся хорды в одной окружности, MF и PQ — в другой окружности $\Rightarrow ED \cdot DN = PD \cdot DQ$, $MD \cdot DF = PD \cdot DQ \Rightarrow \underline{ED} \cdot DN = MD \cdot \underline{DF}$ $(*)$, $\underline{ED} = EM + MD = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha + MD$, $\underline{DF} = FN + DN = a \cdot \operatorname{ctg}\beta + DN$.

Подставляя ED и DF в $(*)$, находим $a \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot DN = a \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot MD \Rightarrow \dfrac{MD}{DN} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$ $(**)$. По условию $\dfrac{MD}{DN} = \sqrt{3}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Из $(**) \Rightarrow \operatorname{ctg}\beta = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \beta = \pi/3$.

З а м е ч а н и е. Из $(**)$ следует, что прямая PQ проходит через вершину B. Докажите это.

Ответ: $\pi/3$.

2002 (март)

Задача № 6. Конус вложен в двугранный угол так, что каждой грани двугранного угла принадлежит только одна образующая конуса. Двугранный угол равен β, а угол в осевом сечении конуса при его вершине равен $\beta/2$. Найти угол между осью конуса и ребром двугранного угла.

Р е ш е н и е (Рис. 51). Из точки A на оси конуса проведем перпендикуляры AM и AN к граням двугранного угла β. Плоскость MAN перпендикулярна к граням двугранного угла и, следовательно, перпендикулярна к его ребру OB (B — точка пересечения плоскости MAN с ребром двугранного угла).

Пусть $OA = a$, а искомый угол AOB равен φ. В $\triangle AON$ $AN \perp ON$, $\angle AON = \beta/4$ (угол между осью конуса и его образующей ON) $\Rightarrow$ $AN = a \sin(\beta/4)$ $(*)$.

В $\triangle AOB$ $AB \perp OB \Rightarrow AB = a \sin\varphi$ $(**)$.

В $\triangle ABN$ $AN \perp BN$, $\angle ABN = \beta/2 \Rightarrow$ $AB = \dfrac{AN}{\sin(\beta/2)}$ $\Rightarrow$ в силу $(*)$ $AB = \dfrac{a \sin(\beta/4)}{\sin(\beta/2)}$ $(3*)$.

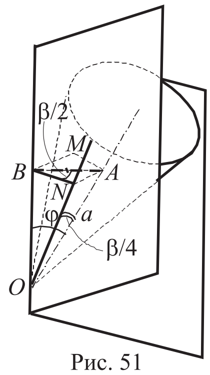

Рис. 51

Из $(**)$ и $(3*)$ получаем $\sin\varphi = \dfrac{\sin(\beta/4)}{\sin(\beta/2)} = \dfrac{1}{2\cos(\beta/4)} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\dfrac{1}{2\cos(\beta/4)}\right)$.

Ответ: $\arcsin\left(\dfrac{1}{2\cos(\beta/4)}\right)$.

Задача № 8. Внутри прямоугольного $\triangle ABC$ ($\angle C$ — прямой) взята точка O так, что $OA = OB = b$. В $\triangle ABC$ CD — высота, точка E — середина отрезка OC, $DE = a$. Найти CE.

Решение (Рис. 52). Проведем $OH \perp AB$ и соединим C и H. Так как $OA = OB$, то H — середина гипотенузы $AB \Rightarrow$ $CH = HB = HA$.

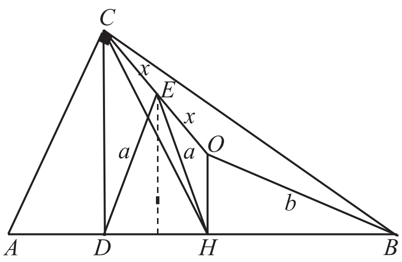

Рис. 52

В $\triangle DEH$ $DE = HE = a$ (так как $CE = EO$, то E проектируется в середину DH).

Пусть $CE = x$, $OB = b$ по условию.

В $\triangle CHO$ $HE = a$ (медиана) $\Rightarrow 4a^2 = 2(CH^2 + OH^2) - 4x^2$ $(*)$ (по формуле для медианы, которая получается, например, если достроить $\triangle CHO$ до параллелограмма).

Так как $CH = HB$, то $CH^2 + OH^2 = HB^2 + OH^2 = b^2$ (в $\triangle OHB$) $(**)$.

Из $(*)$ и $(**)$ имеем: $4a^2 = 2b^2 - 4x^2 \Rightarrow x = CE = \sqrt{(b^2/2) - a^2}$.

Ответ: $\sqrt{(b^2/2) - a^2}$.

2002 (май)

Задача № 6. Окружность проходит через вершину B $\triangle ABC$, касается стороны AC в ее середине D и пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AB : BC = 3 : 2$. Найти отношение площади $\triangle AMD$ к площади $\triangle DNC$.

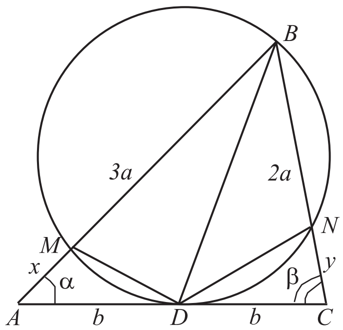

Рис. 53

Р е ш е н и е (Рис. 53). По условию $AB : BC = 3 : 2$. Пусть $AB = 3a$, $BC = 2a$, $AD = DC = b$, $AM = x$, $NC = y$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$. Тогда: $3a \cdot x = b^2 = 2a \cdot y$ (произведение отрезков секущей равно квадрату касательной) $\Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{S_{AMD}}{S_{DNC}} = \dfrac{(1/2)\,x \cdot b \cdot \sin\alpha}{(1/2)\,y \cdot b \cdot \sin\beta} = \dfrac{x \cdot \sin\alpha}{y \cdot \sin\beta}$, а $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{2a}{3a} = \dfrac{2}{3}$. Итак, $\dfrac{S_{AMD}}{S_{DNC}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

Ответ: 4/9.

Задача № 8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SC перпендикулярно к грани ABC, $\angle ACB$ — прямой, $AC = 1$, $BC = 2$, $SC = 4\sqrt{5}/5$. Сфера касается плоскостей SCA, SCB и ABC, причем плоскости ABC она касается в точке, лежащей на отрезке AB. Найти:

1) радиус сферы;

2) радиус окружности, по которой пересекаются сфера и грань ASB.

Р е ш е н и е (Рис. 54). 1. Пусть O — центр сферы, касающейся указанных плоскостей, D — точка касания сферы с плоскостью ABC, R — радиус сферы. По условию $AC = 1$, $CB = 2$, $SC = 4\sqrt{5}/5$ (левый рисунок).

Тогда $OD \perp$ пл. ABC, $OD \parallel SC$, OD — в биссектральной плоскости двугранного угла с ребром $SC \Rightarrow CD$ — биссектриса $\angle ACB$ и радиус сферы R равен расстоянию от точки D до сторон AC и CB в $\triangle ABC$ (средний рисунок). Из подобия прямоугольных треугольников находим $\dfrac{2-R}{R} = \dfrac{R}{1-R} \Rightarrow R = 2/3$.

2. Для определения r — радиуса окружности, по которой сфера пересекается с гранью ASB, проведем $OK\perp$ пл. ASB и напомним, что $OD\perp$ пл. ABC и $OD = R$ (правый рисунок).

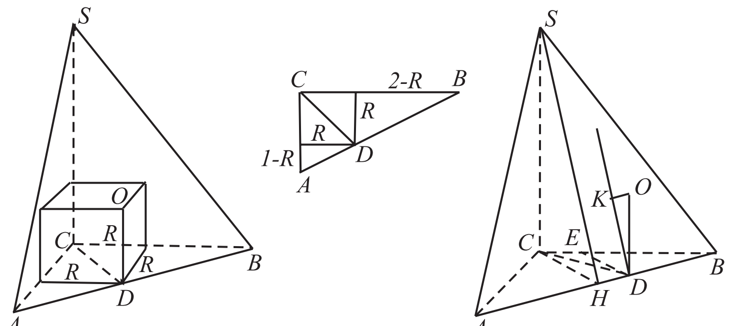

Рис. 54

Перпендикуляры OK и OD задают плоскость, перпендикулярную к плоскостям ASB и ABC и пересекающую их по прямым $KD\perp AB$ и $ED\perp AB \Rightarrow AB$ — касательная к искомой окружности, по которой пересекаются сфера и грань ASB, а $KD = r$ — ее радиус, $r = R\cdot\sin\angle KOD = R\cdot\sin\angle KDE = R\cdot\sin\angle SHC$ ($\angle KOD = \angle KDE$ как углы с перпендикулярными сторонами, CH — высота в $\triangle ABC$).

Далее: в $\triangle ABC$ находим $CH = 2\sqrt{5}/5$, $SH = 2$, $\sin\angle SHC = SC/SH = 2\sqrt{5}/5$, $r = R\cdot\sin\angle SHC = (2/3)\cdot(2\sqrt{5}/5) = 4\sqrt{5}/15$.

Ответ: $2/3$, $4\sqrt{5}/15$.

2002 (июль)

Задача № 6. В пирамиде $SBCD$ каждое ребро равно 3. На ребре SB взята точка A так, что $SA : AB = 1 : 2$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SACD$.

Р е ш е н и е (Рис. 55). Для наглядности расположим пирамиду $SBCD$ так, чтобы грань SCD (правильный треугольник) стала основанием пирамиды $SACD$.

Точки, равноудаленные от S, C и D, лежат на прямой BH, перпендикулярной к пл. SCD и проходящей через центр H $\triangle SCD$. Точка O на прямой BH, равноудаленная от точек A и S, и есть центр сферы, описанной около пирамиды $SACD$.

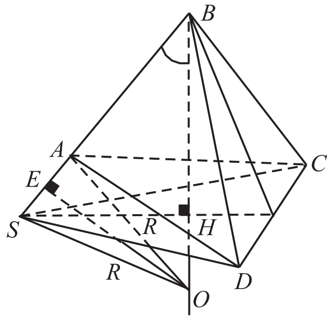

Рис. 55

Для нахождения точки O надо провести плоскость, перпендикулярную к отрезку AS, проходящую через его середину E и пересекающую прямую BH в некоторой точке O. Отрезок SO есть радиус искомой сферы. Обозначим его R.

Пусть каждое ребро пирамиды $SBCD$ равно a (по условию $a = 3$), $SA : AB = 1 : 2$.

В $\triangle BHS$ имеем $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $BH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, в $\triangle BEO$ находим $BE = \dfrac{5}{6}a$, $ES = \dfrac{a}{6}$. Отрезок EO находится из подобия прямоугольных треугольников BHS и BEO: $EO = SH\,\dfrac{BE}{BH} =$ $= a\,\dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{5 \cdot 3}{6 \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{12}\,a.$

Наконец, $R = SO = \sqrt{EO^2 + ES^2} = a\sqrt{\dfrac{25 \cdot 2}{12 \cdot 12} + \dfrac{1}{36}} = \dfrac{a}{12}3\sqrt{6}$ $= \dfrac{3\sqrt{6}}{4}$, так как по условию $a = 3$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$.

Задача № 8. В треугольнике KLM отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно 3. Вписанная окружность касается сторон $\triangle KLM$ в точках A, B и C. Найти отношение площади $\triangle KLM$ к площади $\triangle ABC$.

Решение (Рис. 56). Пусть углы $\triangle KLM$ суть α, β, γ. Радиусы, проведенные из центра O вписанной окружности в точки касания, разбивают $\triangle KLM$ на три четырехугольника, у которых углы при точке O суть $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ и $\pi - \gamma$.

Пусть s — площадь $\triangle ABC$, а в $\triangle KLM$: S — площадь, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности, $LM = a$, $MK = b$, $KL = c$.

Тогда $s = \dfrac{1}{2}\,r^2\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ $(*)$.

В $\triangle KLM$ $a = 2R\,\sin\alpha$, $b = 2R\,\sin\beta$, $c = 2R\,\sin\gamma$, $S = \dfrac{1}{2}\,(a + {}$ ${}+ b + c)\cdot r = \dfrac{r}{2}\cdot 2R\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ $(**)$. Из $(*)$ и $(**)$ находим $\dfrac{S}{s} = 2\dfrac{R}{r} = 6$, так как по условию $R/r = 3$.

Ответ: 6.

2003 (март)

Задача № 6. Площадь треугольника равна $6\sqrt{6}$, периметр его равен 18, расстояние от центра вписанной окружности до одной из вершин равно $2\sqrt{42}/3$. Найти наименьшую сторону треугольника.

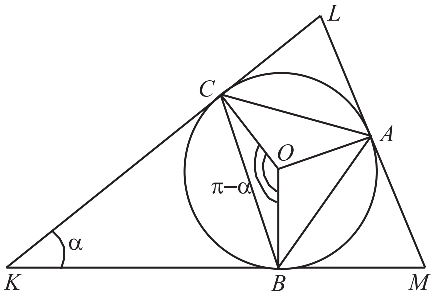

Рис. 56

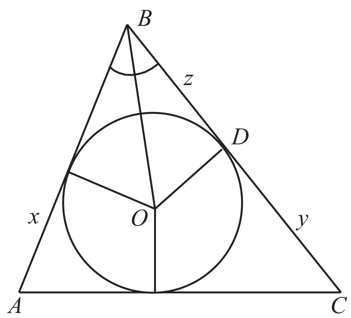

Рис. 57

Р е ш е н и е (Рис. 57). По условию в $\triangle ABC$ дано: $S = 6\sqrt{6}$, $P = 18$, $OB = 2\sqrt{42}/3$. Пусть x, y, z — отрезки сторон до точек касания, $\angle ABC = \alpha$. По формуле $S = p\cdot r$ (p — полупериметр) находим $r = OD = S/p = 2\sqrt{6}/3$. Теперь в $\triangle OBD$ известны $z = BD = 4$, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

Записывая формулу площади $\triangle ABC$ $\dfrac{1}{2}\,(x+z)\cdot(y+z)\cdot\sin\alpha = {}$ ${}= 6\sqrt{6}$ и учитывая, что $z = 4$, $x + y = p - z = 5$, получаем систему для определения x и y, откуда $x = 2$, $y = 3$ или $x = 3$, $y = 2$. Итак, стороны $\triangle ABC$ суть 5, 6, 7, длина наименьшей стороны равна 5.

Ответ: 5.

Задача № 8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$), объем которой равен 4, проведено сечение плоскостью AC_1B. В пирамиду $C_1AA_1B_1B$ вписан шар. Найти:

1) площадь сечения AC_1B;

2) радиус сферы, описанной около данной призмы.

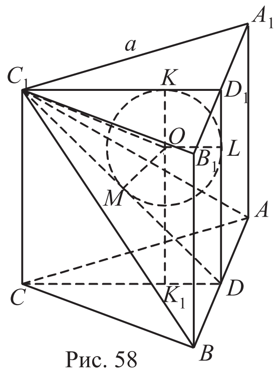

Рис. 58

Решение (Рис. 58). По условию объем V призмы равен 4. Пусть $A_1C_1 = a$, $\angle D_1C_1D = \alpha$.

Центр шара, вписанного в пирамиду $C_1AA_1B_1B$, лежит в биссектральной плоскости D_1C_1CD двугранного угла с ребром C_1C. Эта плоскость перпендикулярна к плоскостям AC_1B, $A_1B_1C_1$ и AA_1B_1B. Поэтому сечение шара плоскостью D_1C_1CD — круг, вписанный в $\triangle C_1D_1D \Rightarrow OC_1$ — биссектриса $\angle D_1C_1D$, проекция шара на основание $A_1B_1C_1$ — круг, вписанный в $\triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow$ точка K — центр правильного $\triangle A_1B_1C_1$.

Выразим известный объем призмы через ребро a и таким образом найдем a.

Пусть K, L и M — точки касания $\Rightarrow \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{OK}{KC_1} = \dfrac{KD_1}{KC_1} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\cdot\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow D_1D \text{ (высота призмы)} = C_1D_1\cdot\operatorname{tg}\alpha =$$

$= \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{4}{3} = a\,\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = S_{ABC}\cdot DD_1 = \dfrac{1}{2}\,a^2\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot a\,\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 4$ (по условию) $\Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$.

Далее: искомая площадь сечения $S_{AC_1B} = \dfrac{1}{2}\,AB\cdot C_1D$. Центр сферы, описанной около призмы, находится в середине отрезка K_1K, соединяющего центры оснований призмы, поэтому радиус этой сферы $R = \sqrt{(K_1K/2)^2 + CK_1^2}$.

Подставляя в полученные выражения $AB = a = 2$, $C_1D = \sqrt{(C_1C)^2 + CD^2}$, $C_1C = K_1K = D_1D = a\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $CD =$

$= a\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $CK_1 = a\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, находим $S_{AC_1B} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, $R = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $5\sqrt{3}/3$, $2\sqrt{6}/3$.

2003 (май)

Задача № 6. Окружность проходит через вершину угла ABC и отсекает на его сторонах равные отрезки BA и BC, $\angle ABC = \alpha$. Другая окружность касается отрезков BA и BC в точках M и N соответственно, а также касается первой окружности. Найти $MN : AC$.

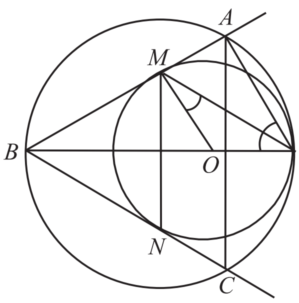

Рис. 59

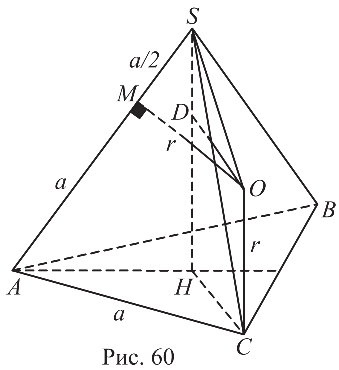

Рис. 60

Р е ш е н и е (Рис. 59). В $\triangle ABC$ по условию $AB = BC$, $BM = BN$ как отрезки касательных $\Rightarrow MN \parallel AC$.

Центры обеих окружностей — на биссектрисе $\angle ABC$ (меньшая окружность касается сторон угла, а центр большей одинаково удален от равных хорд) $\Rightarrow BD$ — диаметр (точка D касания окружностей — на линии центров).

Проведем OM, AD и MD, тогда $OM \perp BA$ и $AD \perp BA$ ($\angle BAD$ опирается на диаметр) $\Rightarrow OM \parallel AD$, $\angle OMD = \angle ODM = \angle MDA \Rightarrow MD$ — биссектриса $\angle ADB \Rightarrow \dfrac{MA}{BM} = \dfrac{AD}{BD}$ $(*)$ по свойству биссектрисы в $\triangle ADB$.

Итак, $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BM}{BM+MA} = \dfrac{1}{1+(MA/BM)} =$ (см. (*)) $= \dfrac{1}{1+(AD/BD)} = \dfrac{1}{1+\sin(\alpha/2)}$.

Ответ: $1/(1+\sin(\alpha/2))$.

Задача № 8. Сфера касается плоскости основания ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$ в точке C, а также касается бокового ребра SA в точке M, $SM : MA = 1 : 2$, $AB = a$. Найти радиус сферы.

Решение (Рис. 60). Пусть M — точка касания сферы с ребром SA, $SM : MA = 1 : 2$. Если O — центр сферы, то $OC \perp$ пл. ABC, $OM \perp SA$, $AM = AC = a$ (равные отрезки касательных к сфере) $\Rightarrow SM = a/2$, $SA = 3a/2$.

Итак, пирамида определена, ее высота $h = SH = a\sqrt{\dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{3}} = a\sqrt{69}/6$ (из $\triangle SAH$). Искомый радиус $r = OC = OM$, пусть $OD \parallel CH \Rightarrow OD = CH = a\sqrt{3}/3$, $SD = h - r$.

Выражая общую гипотенузу SO в $\triangle SMO$ и $\triangle SDO$, имеем $SM^2 + MO^2 = SD^2 + DO^2 \Rightarrow \dfrac{a^2}{4} + r^2 = (h-r)^2 + \dfrac{a^2}{3}$, где $h = a\sqrt{69}/6 \Rightarrow r = 2a\sqrt{\dfrac{3}{23}}$.

Ответ: $2a\sqrt{\dfrac{3}{23}}$.

2003 (июль)

Задача № 6. В $\triangle KLM$ радиус описанной окружности равен R, $\angle K = \alpha$, точка O — центр окружности, вписанной в этот треугольник. Прямая KO пересекает окружность, описанную около $\triangle KLM$, в точке N. Найти ON.

Решение (Рис. 61). Из обозначений углов видно, что $\angle NLO = \angle NOL$ (LO и KN — биссектрисы, $\angle NLM = \angle NKM$ как вписанные, $\angle LON$ — внешний угол $\triangle LOK$) $\Rightarrow$ (в $\triangle LKN$) $\Rightarrow ON = LN = 2R \cdot \sin(\alpha/2)$.

Ответ: $2R\sin(\alpha/2)$.

Задача № 8. В пирамиде $SLMN$ даны ребра: $LM = 5$, $MN = 9$, $NL = 10$. Сфера радиуса $\dfrac{5}{4\sqrt{14}}$ касается плоскости основания LMN и боковых ребер пирамиды. Точки касания делят эти ребра в равных отношениях, считая от вершины S. Найти объем пирамиды.

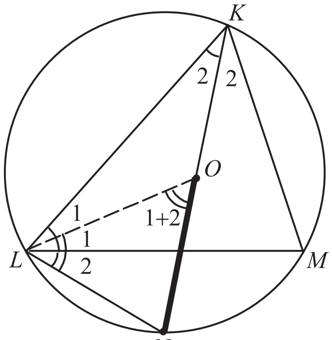

Рис. 61

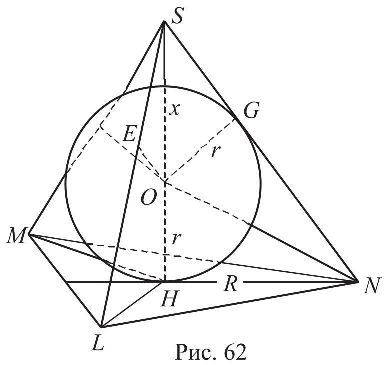

Рис. 62

Решение (Рис. 62). Пусть O — центр сферы, E и G — две точки касания с боковыми ребрами, $SE = SG$ (отрезки касательных). Так как по условию $SE : EL = SG : GN$, то $EL = GN \Rightarrow SL = SN$. Аналогично $SL = SM$.

Если SH — высота, то $\triangle SLH = \triangle SMH = \triangle SNH$ (по гипотенузе и общему катету) $\Rightarrow H$ — центр окружности, описанной около $\triangle LMN$, а SH — прямая, точки которой одинаково удалены от боковых ребер $\Rightarrow O$ — центр сферы, касающейся боковых ребер и плоскости основания, лежит на высоте SH и ON — биссектриса $\angle SNH$.

По условию $LM = 5$, $MN = 9$, $NL = 10$, $OH = r = \dfrac{5}{4\sqrt{14}}$; положим $\angle SNH = \alpha \Rightarrow p_{LMN} = \dfrac{1}{2}(5 + 9 + 10) = 12$, $S_{LMN} = \sqrt{12 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{14}$, $R = NH = \dfrac{5 \cdot 9 \cdot 10}{4 \cdot 6\sqrt{14}}$, $OH : NH = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{15} \Rightarrow SH : NH = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{15}{112}$, $SH = R \cdot \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5 \cdot 225}{4 \cdot 112 \cdot \sqrt{14}}$, $V = \dfrac{1}{3} \cdot 6\sqrt{14} \cdot \dfrac{5 \cdot 225}{4 \cdot 112\sqrt{14}} = \dfrac{1125}{224}$.

Вариант решения. Пусть $OG = OH = r$, $NH = R$, $SO = x \Rightarrow \triangle SOG \sim \triangle SNH$, $SG = \sqrt{x^2 - r^2}$, $SH = x + r$,

$$\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{r} = \frac{x+r}{R} \Rightarrow x = r\,\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2} = \frac{5\cdot 113}{4\cdot 112\cdot\sqrt{14}}\,,\ SH = x+r = \\ = \frac{5\cdot 225}{4\cdot 112\cdot\sqrt{14}}$$ и т. д.

Ответ: 1125/224.

2004 (март)

Задача № 6. В $\triangle ABC$ даны стороны $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Найти радиус наибольшей окружности.

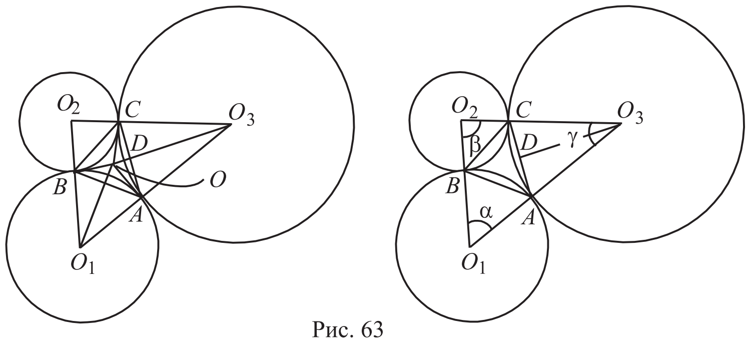

Рис. 63

Р е ш е н и е (Рис. 63, левый). Рассмотрим $\triangle O_1O_2O_3$, образованный центрами трех касающихся окружностей. Точки касания A, B, и C находятся на линиях центров этих окружностей, то есть на сторонах $\triangle O_1O_2O_3$.

В $\triangle O_1O_2O_3$, где $O_1A = O_1B$, $O_2B = O_2C$, $O_3C = O_3A$ $(*)$ положение точек A, B и C однозначно определяется через стороны $\triangle O_1O_2O_3$ (достаточно решить линейную систему уравнений для радиусов окружностей и сторон $\triangle O_1O_2O_3$).

Вместе с тем, условиям $(*)$ удовлетворяют точки касания окружности, вписанной в $\triangle O_1O_2O_3 \Rightarrow$ окружность с центром O, вписанная в $\triangle O_1O_2O_3$, является описанной окружностью для $\triangle ABC$. Эта окружность имеет со сторонами O_1O_2, O_2O_3 и O_1O_3 по единственной общей точке $\Rightarrow$ ее радиусы AO, BO и CO, проведенные в точки касания A, B и C перпендикулярны к этим сторонам и, следовательно, являются касательными к исходным окружностям.

Пусть $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$, $AO = BO = CO = R$, $CO_3 = x$. Наибольшая окружность проходит через концы наибольшей стороны AC. Действительно, например, $\angle AOC > \angle AOB$, в $\triangle OAO_3$ и $\triangle OAO_1$ катет AO — общий $\Rightarrow$ второй катет AO_3 больше катета AO_1.

Далее: $S_{ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$, $R = AO = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 6\sqrt{6}} = \dfrac{35}{4\sqrt{6}}$, $OD = \sqrt{\left(\dfrac{35}{4\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2} = \dfrac{7}{4\sqrt{6}}$, $x = AO_3 = AO \cdot \dfrac{AD}{OD} = \dfrac{35}{4\sqrt{6}} \cdot \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{4\sqrt{6}}{7} = \dfrac{35}{2}$.

В а р и а н т р е ш е н и я. (Рис. 64, правый). Достаточно заметить, что точки A, B и C лежат на сторонах $\triangle O_1O_2O_3$. Пусть в $\triangle O_1O_2O_3$ $\angle O_1 = \alpha, \angle O_2 = \beta, \angle O_3 = \gamma$. Тогда в равнобедренных треугольниках $\angle ABO_1 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle CBO_2 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\beta}{2} \Rightarrow \angle ABC = \pi - 2 \cdot \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ $(**)$. В $\triangle ABC$ по теореме косинусов $\cos\angle ABC = \dfrac{1}{5}$.

В $\triangle O_3CA$ $\angle O_3 = \gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ (из $\triangle O_1O_2O_3$), $x = AO_3 = \dfrac{AC/2}{\sin(\gamma/2)} = \dfrac{7}{2 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)} =$ (в силу $(**)$) $= \dfrac{7}{2 \cdot \cos\angle ABC} = \dfrac{7 \cdot 5}{2} = \dfrac{35}{2}$.

Ответ: $35/2$.

Задача № 8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1)$ $AA_1 : AB = 4 : 3$. На боковых ребрах AA_1, BB_1 и CC_1 взяты точки K, L, и M соответственно, так что $AK : KA_1 = 3 : 1$, $BL = LB_1$, $CM : MC_1 = 1 : 3$. Найти двугранный угол между плоскостями KLM и ABC.

Р е ш е н и е (Рис. 64). По условию $AA_1 : AB = 4 : 3$, $AK : KA_1 = 3 : 1$, $BL = LB_1$, $CM : MC_1 = 1 : 3$ $(*)$ и надо найти двугранный угол между плоскостями KLM и ABC.

Проводя в плоскостях AA_1C_1C и CC_1B_1B прямые KM и LM до пересечения с прямыми AC и BC соответственно, получаем $\triangle PCQ$, в котором $\angle PCQ = \dfrac{\pi}{3}$. Полагая $AA_1 = 4a$ (при этом $MC = a$) и учитывая данные $(*)$, из двух пар подобных прямо-

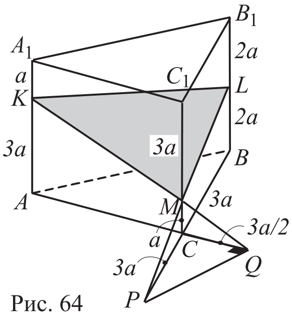

Рис. 64

угольных треугольников находим $\dfrac{QC}{MC} = \dfrac{QC + CA}{KA} \Rightarrow QC = \dfrac{3a}{2}$, а также $\dfrac{PC}{MC} = \dfrac{PC + CB}{LB} \Rightarrow PC = 3a$.

Искомый двугранный угол измеряется в плоскости, определяемой отрезком MC и высотой x, проведенной из точки C в $\triangle PCQ$, где по теореме косинусов $PQ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a$. Высоту x находим, записывая дважды площадь $\triangle PCQ$: $\dfrac{1}{2}\,PC \cdot CQ \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}\,x \cdot PQ \Rightarrow$ двугранный угол с ребром PQ равен $\operatorname{arctg}\dfrac{MC}{x} = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$.

В конкретных условиях данной задачи (и аналогично в других вариантах) можно заметить, что в $\triangle PCQ$ $\dfrac{QC}{PC} = \dfrac{1}{2}$ и $\angle PCQ = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \angle CQP = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ по теореме о трех перпендикулярах $MQ \perp PQ \Rightarrow \angle MQC$ — линейный угол искомого двугранного угла и $\operatorname{tg}\angle MQC = \dfrac{MC}{QC} = \dfrac{a \cdot 2}{3a} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \angle MQC = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$.

В а р и а н т р е ш е н и я. Пусть искомый двугранный угол равен φ, тогда $S_{\triangle KLM} \cdot \cos\varphi = S_{\triangle ABC}$ (площадь проекции равна произведению площади проектируемого треугольника на косинус двугранного угла между треугольником и его проекцией).

Ответ: $\operatorname{arctg}(2/3)$.

2004 (июль)

Задача № 6. В трапеции $BCDE$ ($CD \parallel BE$) $BC \perp BE$, $CD = 10$, $BE = 14$, LN — средняя линия (точка L на стороне BC). Прямая, проходящая через точку B и перпендикулярная к стороне DE, пересекает отрезок LN в точке M, $LM : MN = 2 : 1$. Найти площадь трапеции $BCDE$.

Р е ш е н и е (Рис. 65). По условию $BC \perp BE$, $CD = 10$, $BE = 14$, $BA \perp DE$, LN — средняя линия, $LM : MN = 2 : 1 \Rightarrow LM = 8$, $MN = 4$.

Проведем $DH \perp BE$ и используем две пары подобных треугольников.

Во-первых: $\triangle MAN \sim \triangle BAE$, $NE = \frac{1}{2}DE$, $MN : BE = 2 : 7$ $\Rightarrow AN = \frac{2}{7}AE$, $AN + NE = AE$ $\Rightarrow \frac{2}{7}AE + \frac{1}{2}DE = AE \Rightarrow AE =$ $= \frac{7}{10}DE$ $(*)$.

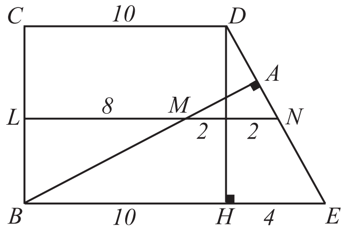

Рис. 65

Во-вторых: $\triangle DHE \sim \triangle BAE$, $HE = BE - BH = 14 - 10 = 4 \Rightarrow \dfrac{AE}{14} = \dfrac{4}{DE}$ $(**)$.

Из $(*)$ и $(**)$ исключаем AE и находим $DE = \sqrt{80}$.

Наконец, $DH = \sqrt{DE^2 - HE^2} = 8$, $S_{BCDE} = \frac{1}{2}(10 + 14) \cdot$ $\cdot 8 = 96$.

Ответ: 96.

Задача № 8. В правильной треугольной пирамиде $SLMN$ с вершиной S проведена медиана MP в $\triangle SMN$ и даны $LM =$ $= 2$, $SL = 6$. Через середину K ребра SM проведена прямая KE, параллельная ребру LN. Через точку L проведена прямая, пересекающая прямые MP и KE в точках A и B соответственно. Найти длину отрезка AB.

Решение (Рис. 66). Искомой прямой, проходящей через точку L, и пересекающей прямые MP и KE, является линия пересечения плоскостей LMP и LKE. По условию $LN \parallel KE$, поэтому прямая LN также принадлежит плоскости LKE.

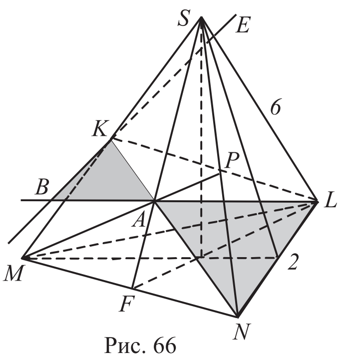

Рис. 66

Плоскость $LNKE$ пересекает пирамиду $SLMN$ по $\triangle NKL$, в котором NK — медиана $\triangle SMN$ (точка K — середина ребра SM). Плоскость LMP пересекает грань SMN по другой медиане MP. Пусть A — точка пересечения медиан $\triangle SMN$ (A принадлежит и третьей медиане — апофеме SF) $\Rightarrow LA$ — искомая прямая, пересекающая прямую KE в точке B.

Далее: $\triangle KAB \sim \triangle NAL$, $\dfrac{KA}{AN} = \dfrac{1}{2}$ (по свойству медианы NK) $\Rightarrow \dfrac{AB}{LA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{1}{2}\,LA$ $(*)$.

По условию $LM = 2$, $SL = 6$, тогда LA находим в известном $\triangle SFL$: $AF = \dfrac{1}{3}\,SF = \dfrac{1}{3}\,\sqrt{SN^2 - FN^2} = \dfrac{1}{3}\,\sqrt{35}$ (SF — медиана $\triangle SMN$), $LF = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\angle SFL = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{35}}$ (по теореме косинусов в $\triangle SFL$) $\Rightarrow LA = \dfrac{2\sqrt{14}}{3}$ (по теореме косинусов в $\triangle AFL$) $\Rightarrow AB = \sqrt{14}/3$ (из $(*)$).

Ответ: $\sqrt{14}/3$.

Часть 3

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

В Части 3 знак $\Leftrightarrow$ означает равносильность соединенных им задач (уравнений, систем и др.), то есть совпадение множеств их решений.

В Части 3, в отличие от Части 2, знак $\Rightarrow$ употребляется только в обычном смысле перехода к задаче-следствию, множество решений которой включает в себя множество решений предыдущей задачи, но может содержать и другие решения.

1993 (май)

Задача № 7. Для любого a решить уравнение $2|x|+|x-1| = a$.

Решение с использованием графиков (Рис. 67). Рассмотрим на координатной плоскости xOy ломаную — график левой части данного уравнения:

$$y = 2|x| + |x-1| = \begin{cases} 1-3x, \text{ если } x < 0, \\ x+1, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3x-1, \text{ если } x > 1, \end{cases}$$

а также семейство прямых $y = a$.

Корни уравнения суть абсциссы точек пересечения ломаной и прямой $y = a$.

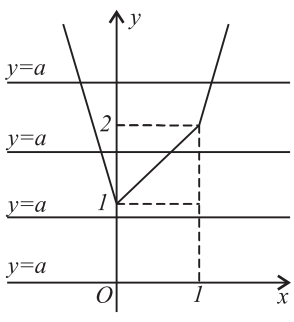

Рис. 67

Если $a < 1$, то решений нет;

если $a = 1$, то решение $x = 0$;

если $1 < a \leqslant 2$, то прямая $y = a$ пересекает отрезки прямых $y = 1-3x$ и $y = x+1$, что дает корни $x_1 = (1-a)/3$ и $x_2 = a-1$;

если $a > 2$, то прямая $y = a$ пересекает отрезки прямых $y = 1-3x$ и $y = 3x-1$, что дает корни $x_1 = (1-a)/3$ и $x_2 = (a+1)/3$.

А н а л и т и ч е с к о е р е ш е н и е. Получим абсциссы точек пересечения отрезков ломаной с прямыми $y = a$ и найдем, при каких значениях a эти корни принадлежат промежуткам x, соответствующим этим частям ломаной.

Если $x < 0$ $(*)$, то $1 - 3x = a \Leftrightarrow x = (1 - a)/3$. Подставляя это значение x в условие $(*)$, находим, что $x = (1-a)/3$ является корнем при $a > 1$.

Далее аналогично:
если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $x + 1 = a \Leftrightarrow x = a - 1$, откуда $0 \leqslant a - 1 \leqslant 1$ $\Leftrightarrow 1 \leqslant a \leqslant 2$;
если $x > 1$, то $3x - 1 = a \Leftrightarrow x = (a + 1)/3$, откуда $(a + 1)/3 > 1$ $\Leftrightarrow a > 2$.

Для каждого вида корня получены области значений a, для которых существует этот корень. Для получения ответа надо провести обратную сортировку: в каждом из трех получившихся промежутков $a < 1$, $1 \leqslant a \leqslant 2$, $a > 2$ указать существующие там корни.

$$\textit{Ответ:}\ \left[\begin{array}{l} \text{Если } a < 1, \text{ то решений нет;} \\ \text{если } a = 1, \text{ то } x = 0; \\ \text{если } 1 < a \leqslant 2, \text{ то } x_1 = (1-a)/3,\ x_2 = a - 1; \\ \text{если } a > 2, \text{ то } x_1 = (1-a)/3,\ x_2 = (a+1)/3. \end{array}\right.$$

1993 (июль)

Задача № 7. Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$, имеет одним из своих корней число $x = 3$. Найти действительные корни уравнения $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$.

Р е ш е н и е. Перейдем от биквадратного уравнения к квадратному:

$ax^4 + bx^2 + 2 = 0$ $(*)$ $\Leftrightarrow ay^2 + by + 2 = 0$ $(**)$, где $y = x^2 \geqslant 0$.

В уравнении $(**)$ по условию $2/a < 0$, откуда по теореме Виета $y_1 y_2 = 2/a < 0$ то есть y_1 и y_2 разных знаков. Так как по условию $y_1 = 3 > 0$, то $y_2 < 0$ (знак коэффициента b роли не играет).

Уравнение $x^2 = y_2$, где $y_2 < 0$ действительных корней не имеет. Действительными решениями уравнения $(*)$ оказываются только корни уравнения $x^2 = y_1 = 3 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

1994 (май)

Задача № 7. При каких значениях a уравнение

$$2a\,(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$$

имеет четыре различных решения?

Р е ш е н и е. Данное уравнение допускает удобную замену переменной:

$2a\,(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$ $(*)$ $\Leftrightarrow$ $2ay^2 - y + 1 = 0$ $(**)$, где $y = |x+1| \geqslant 0$.

Уравнение $(*)$ имеет 4 различных решения тогда и только тогда, когда уравнение $(**)$ имеет два положительных корня. Последнее требование равносильно системе

$$\begin{cases} D = 1 - 8a > 0, \\ \dfrac{1}{2a} > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1/8, \\ a > 0. \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1/8.$$

Ответ: $0 < a < 1/8$.

1994 (июль)

Задача № 7. Для каких значений a система неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geqslant 0, \\ x \leqslant 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x?

Р е ш е н и е. Данная в условии система неравенств имеет решения, если точка $x = 2$ принадлежит промежутку $[x_1, x_2]$ (x_1, x_2 — корни параболы), значит система имеет решения при значениях a, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} D = 144 - 4a \geqslant 0, \\ f(2) = -x^2 + 12x - a_{|x=2} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant 36, \\ 20 - a \geqslant 0 \end{cases} (*) \Leftrightarrow a \leqslant 20.$$

Первое из неравенств $(*)$ обеспечивает существование корней x_1 и x_2, а второе — принадлежность точки $x = 2$ промежутку $[x_1, x_2]$.

Ответ: $a \leqslant 20$.

1995 (март)

Задача № 7. Найти минимальное значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x+y=3a-1, \\ x^2+y^2=4a^2-2a+2. \end{cases} \tag{$*$}$$

Р е ш е н и е. Возводя в квадрат первое из уравнений $(*)$ и вычитая из результата второе уравнение, находим

$$xy=\frac{1}{2}\left(5a^2-4a-1\right). \tag{$**$}$$

Выражение $(**)$ достигает минимума при $a=2/5$. Минимальное значение произведения xy равно $xy\big|_{a=\frac{2}{5}}=-\dfrac{9}{10}$.

Найденное число $-9/10$ является искомым, хотя в процессе такого «быстрого» решения удовлетворены не все требования задачи. Неизвестно, удовлетворяют ли исходной системе значения x и y, входящие в произведение xy при $a=9/10$.

В самом деле, полученное уравнение $(**)$ является лишь следствием системы $(*)$, т. е. выполняется в том случае, если верны равенства $(*)$.

Системой, равносильной системе $(*)$, является система

$$\begin{cases} x+y=3a-1, \\ xy=\dfrac{1}{2}\left(5a^2-4a-1\right) \end{cases} \tag{$3*$}$$

(докажите самостоятельно, что любое решение системы $(*)$ является решением системы $(3*)$ и наоборот).

Из системы $(3*)$ по теореме, обратной к теореме Виета, следует, что x и y, удовлетворяющие $(3*)$, суть корни квадратного уравнения

$$z^2-(3a-1)\,z+\frac{1}{2}\left(5a^2-4a-1\right)=0$$

Это уравнение имеет корни, если

$$D=(3a-1)^2-4\cdot\frac{1}{2}\left(5a^2-4a-1\right)=-(a+1)\,(a-3)\geqslant 0,$$

т. е. $-1 \leqslant a \leqslant 3$.

Значение $a = 2/5$ принадлежит этому промежутку. Значит действительно, выражение $(**)$, где (x, y) — решение системы $(*)$, при $a = -2/5$ достигает минимального значения, равного $(-9/10)$.

Ответ: $-9/10$.

1995 (май)

Задача № 7. При каких значениях x числа $a_1 = \sin x$, $a_2 = \frac{1}{2}\sin 2x$, $a_3 = \sin 3x$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше нуля?

Решение. По свойству арифметической прогрессии (из трех последовательных членов средний равен полусумме крайних) получаем тригонометрическое уравнение $\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}(\sin x + \sin 3x) \Leftrightarrow 2\sin 2x \cdot \cos x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi n}{2}$ и $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$ $(*)$.

Разность прогрессии $d = a_2 - a_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sin x \cdot \cos x - \sin x = \sin x(\cos x - 1)$ $(**)$ по условию положительна.

На тригонометрическом круге серии решений $(*)$ дают 6 точек. Непосредственной проверкой убеждаемся, что положительную разность прогрессии $(**)$ дают значения

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ и } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

1995 (июль)

Задача № 7. Для всех значений a решить неравенство

$$3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}.$$

Р е ш е н и е. Аккуратная запись последовательных действий на языке равносильных систем позволяет в решении этой задачи обойтись вообще без словесных пояснений:

$$3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > (a-1)\log_3 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-1<0, \\ x \geqslant -1, \end{cases} \\ \begin{cases} a-1 \geqslant 0, \\ x+1 > [(a-1)\log_3 2]^2\,. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\textit{Ответ:} \left[\begin{array}{l} \text{Если } a<1, \text{ то } x \geqslant -1; \\ \text{если } a \geqslant 1, \text{то } x > [(a-1)\log_3 2]^2 - 1. \end{array} \right.$$

1996 (март)

Задача № 7. Для любого допустимого значения a решить неравенство

$$2 - \log_a x < \log_a (x-1). \qquad (*)$$

Р е ш е н и е. Допустимыми значениями a являются $0 < a < 1$, $a > 1$.

Неравенство $(*)$ равносильно совокупности двух систем:

$$(1) \begin{cases} 0<a<1, \\ x>1, \\ x^2 - x < a^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1, \\ 1 < x < \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a^2}), \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a>1, \\ x>1, \\ x^2 - x > a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ x > \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a^2}). \end{cases}$$

Корни третьих неравенств в системах (1) и (2) имеют разные знаки (свободный член $-a^2$ отрицателен), а то, что положительный корень больше 1, вполне очевидно.

$$\textit{Ответ:} \left[\begin{array}{l} \text{Если } 0<a<1, \text{ то } 1 < x < \dfrac{1}{2}\,(1+\sqrt{1+4a^2}); \\ \text{если } a>1, \text{ то } x > \dfrac{1}{2}\,(1+\sqrt{1+4a^2}). \end{array} \right.$$

1996 (май)

Задача № 8. Для любого значения a решить уравнение

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

Р е ш е н и е. Потенцируем данное уравнение, используя свойства логарифмов:

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}} \Leftrightarrow (\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} =$$
$$= (\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-6a-5}} \Leftrightarrow \sqrt{x+a+2} = -\sqrt{x^2+a^2-6a-5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+a+2} = 0, \\ \sqrt{x^2+a^2-6a-5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a-2, \\ 2a^2 - 2a - 1 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Система $(*)$ равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} a = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ x = \dfrac{-5+\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ x = \dfrac{-5-\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

$$\textit{Ответ:} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Если } a = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\,, \text{ то } x = \dfrac{-5+\sqrt{3}}{2}\,; \\ \text{если } a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\,, \text{ то } x = \dfrac{-5-\sqrt{3}}{2}\,; \\ \text{при других } a \text{ решений нет.} \end{array} \right.$$

1996 (июль)

Задача № 8. Для каждого значения a найти число решений уравнения

$$a \operatorname{tg} x + \cos 2x = 1,$$

принадлежащих промежутку $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Р е ш е н и е. Перейдем в данном уравнении к функциям одного аргумента:

$$a \operatorname{tg} x - (1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin x \left[\frac{a}{\cos x} - 2\sin x \right] = 0.$$

Последнее уравнение на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, заданном в условии, равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \\ \cos x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin 2x = a. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Уравнение $\sin x = 0$ при любом a имеет для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 3 решения.

Уравнение $\sin 2x = a$ при $a = 0, \cos x \neq 0$ также имеет 3 решения, совпадающие с корнями уравнения $\sin x = 0$.

Уравнение $\sin 2x = a$ при $|a| > 1$ не имеет решений и поэтому не добавляет новых решений к решениям уравнения $\sin x = 0$.

Уравнение $\sin 2x = a$ при $|a| < 1$ и $a \neq 0$ имеет для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 4 решения, а при $a = \pm 1$ — 2 решения.

Полезно контролировать эти рассуждения на тригонометрическом круге.

Остается внимательно сосчитать число решений при различных значениях a.

В ответе полезно группировать вместе значения a, дающие одинаковое число решений.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \text{Если } a < -1,\ a = 0,\ a > 1, \text{ то 3 решения;} \\ \text{если } a = \pm 1, \text{ то 5 решений;} \\ \text{если } -1 < a < 0,\ 0 < a < 1, \text{ то 7 решений.} \end{array}\right.$

1997 (март)

Задача № 7. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_a \left(x^2 + 4\right) > 1$$

выполняется для всех значений x.

Р е ш е н и е. Потенцируя данное неравенство, получаем равносильную ему совокупность двух систем:

$$\log_a \left(x^2 + 4\right) > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1) \left\{\begin{array}{l} 0 < a < 1, \\ x^2 + 4 < a, \end{array}\right. \\ (2) \left\{\begin{array}{l} a > 1, \\ x^2 + 4 > a. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Видно, что система (1) не имеет решений, так как левая часть второго неравенства в этой системе больше или равна 4, а правая — меньше 1. Система (2) равносильна системе (3):

$$(2) \Leftrightarrow (3) \left\{ \begin{array}{l} a > 1, \\ x^2 > a - 4. \end{array} \right.$$

Второе неравенство в системе (3) выполняется при всех x, если $a < 4$. Учитывая первое неравенство в (3), получаем ответ.

Ответ: $1 < a < 4$.

1997 (май)

Задача № 7. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 4}{x + 3a - 2} \leqslant 0$$

выполняется для всех x из промежутка $1 \leqslant x \leqslant 3$.

Р е ш е н и е. Искомое решение дается совокупностью двух систем

$$\left[\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} 2a + 4 \leqslant 1, \\ -3a + 2 > 3, \end{array} \right. \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} -3a + 2 < 1, \\ 2a + 4 \geqslant 3. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Для получения этой совокупности удобно заменить данное неравенство «почти» равносильным неравенством $(x - (2a + 4))(x - (-3a + 2)) \leqslant 0$ $(*)$ (для равносильности надо добавить условие $x - (-3a + 2) \neq 0$). Входящий в $(*)$ квадратный трехчлен будет неположителен на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 3$, если этот отрезок расположен между корнями этого трехчлена, включая эти корни. Два возможных случая расположения этих «ползучих» корней относительно точек $x = 1$ и $x = 3$ задают системы (1) и (2).

Строгие неравенства в этих системах обеспечивают необращение в нуль знаменателя исходной дроби. Корнем этого знаменателя является $-3a + 2$. Поэтому этот корень не может совпадать с точкой $x = 3$, находясь справа от нее, то есть в системе (1), и не может совпадать с точкой $x = 1$, находясь слева от нее, то есть в системе (2).

Решая системы (1) и (2), находим:

$$(1) \Leftrightarrow a \leqslant -\frac{3}{2}, \quad (2) \Leftrightarrow a > \frac{1}{3}.$$

Ответ: $a \leqslant -\dfrac{3}{2}$, $a > \dfrac{1}{3}$.

1997 (июль)

Задача № 7. Для любых значений a решить неравенство

$$a - 2 < (a-1)\sqrt{x+1}\,.$$

Решение. Выпишем совокупность систем, равносильную исходному неравенству:

$$(a-1)\sqrt{x+1} > a-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1)\left\{\begin{array}{l} a < 1, \\ \sqrt{x+1} < \dfrac{a-2}{a-1}, \end{array}\right. \\ (2)\left\{\begin{array}{l} a = 1, \\ x \geqslant -1, \end{array}\right. \\ (3)\left\{\begin{array}{l} a > 1, \\ \sqrt{x+1} > \dfrac{a-2}{a-1}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Решая системы (1) и (3), получаем:

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a < 1, \\ 0 \leqslant x+1 < \left(\dfrac{a-2}{a-1}\right)^2, \end{array}\right. \quad (3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (4)\left\{\begin{array}{l} 1 < a < 2, \\ x \geqslant -1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a \geqslant 2, \\ x+1 > \left(\dfrac{a-2}{a-1}\right)^2. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Видно, что можно объединить значения параметра для систем (2) и (4). Полученному промежутку $1 \leqslant a < 2$ соответствует полупрямая $x \geqslant -1$. Осталось выписать ответ.

$$\textit{Ответ:} \left[\begin{array}{l} \text{Если } a < 1, \text{то } -1 \leqslant x < \left(\dfrac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1; \\ \text{если } 1 \leqslant a < 2, \text{то } x \geqslant -1; \\ \text{если } a \geqslant 2, \text{то } x > \left(\dfrac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1. \end{array}\right.$$

1998 (март)

Задача № 8. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{aligned}&\log_3(y-3)-2\log_9 x=0,\\&(x+a)^2-2y-5a=0.\end{aligned}$$

имеет хотя бы одно решение?

Р е ш е н и е. Потенцируя первое уравнение, переходим к системе без логарифмов, равносильной исходной:

$$\begin{cases}\log_3(y-3)-2\log_9 x=0,\\(x+a)^2-2y-5a=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\y-3=x,\\x^2+2(a-1)x+\big(a^2-5a-6\big)=0.\end{cases}$$

Решения существуют, если хотя бы один (больший) корень квадратного уравнения положителен, то есть $x_2=-(a-1)+$ $+\sqrt{3a+7}>0\Leftrightarrow\sqrt{3a+7}>a-1$. Решая последнее неравенство, получаем ответ.

Ответ: $-\dfrac{7}{3}\leqslant a<6.$

1998 (май)

Задача № 7. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\big(x^2+ax+1\big)<1.$$

выполняется для всех x из промежутка $x<0$.

Р е ш е н и е. Потенцируя данное неравенство, имеем:

$$\log_{\frac{1}{2}}\big(x^2+ax+1\big)<1\Leftrightarrow x^2+ax+\frac{1}{2}>0.$$

Последнее неравенство выполняется для $x<0$ в двух случаях: если отрицателен дискриминант квадратного трехчлена, то есть $D=a^2-2<0\Leftrightarrow-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$, или если оба корня этого трехчлена неотрицательны. Последнее условие обеспечивается системой неравенств

$$\begin{cases} D = a^2 - 2 \geqslant 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{2} \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 = -a \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \leqslant -\sqrt{2}.$$

Объединяя оба найденных промежутка, получаем ответ.

Ответ: $a < \sqrt{2}$.

1998 (июль)

Задача № 7. Для любых допустимых значений a решить неравенство

$$\log_a (3a^x - 5) < x + 1.$$

Р е ш е н и е. Допустимыми значениями a являются $0 < a < 1$, $a > 1$. Потенцируя данное неравенство, переходим к равносильной ему совокупности двух систем:

$$\log_a (3a^x - 5) < x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1) \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 3a^x - 5 > a^x \cdot a, \end{cases} \\ (2) \begin{cases} a > 1, \\ 0 < 3a^x - 5 < a^x \cdot a. \end{cases} \end{array} \right.$$

Далее: $(1) \Leftrightarrow (3) \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x < \log_a \dfrac{5}{3-a}. \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a^x > \dfrac{5}{3}, \\ (3-a)\, a^x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow (4) \begin{cases} a > 1, \\ x > \log_a \dfrac{5}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 3, \\ x < \log_a \dfrac{5}{3-a}, \end{cases} \\ \begin{cases} a \geqslant 3, \\ x - \text{любое}. \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

Выбирая результаты для всех промежутков параметра a из систем (3) и (4), получаем ответ.

$$\text{\textit{Ответ:}}\ \left[\begin{array}{l} \text{Если } 0 < a < 1, \text{то } x < \log_a \dfrac{5}{3-a}; \\ \text{если } 1 < a < 3, \text{то } \log_a \dfrac{5}{3} < x < \log_a \dfrac{5}{3-a}; \\ \text{если } a \geqslant 3, \text{то } x > \log_a \dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$$

1999 (март)

Задача № 7. Для любых допустимых значений a решить уравнение

$$\log_a \left(x^2 - 3a\right) = \log_a \left(a^2 - 3x\right).$$

Р е ш е н и е. Получим систему без логарифмов, равносильную данному неравенству:

$$\log_a \left(x^2 - 3a\right) = \log_a \left(a^2 - 3x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a > 0, \quad a \neq 1, \\ a^2 - 3x > 0, \\ x^2 - 3a = a^2 - 3x \ (*) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a > 0, \quad a \neq 1, \\ x < \dfrac{a^2}{3}, \ (**) \\ x_1 = -a - 3, \quad x_2 = a. \end{array}\right.$$

Отметим, что в силу уравнения $(*)$ условие $x^2 - 3a > 0$ на корнях уравнения также выполнено.

Корень $x_1 = -a - 3$ при всех $a > 0$, $a \neq 1$ отрицателен и поэтому удовлетворяет второму неравенству $(**)$ системы. Корень $x_2 = a$ удовлетворяет неравенствам при $a > 3$.

$$\text{\textit{Ответ:}}\ \left[\begin{array}{l} \text{Если } 0 < a < 1, \ 1 < a \leqslant 3, \ \ \text{то } x = -a - 3, \\ \text{если } a > 3, \ \text{то } x_1 = -a - 3, \ \ x_2 = a. \end{array}\right.$$

1999 (май)

Задача № 7. При каких значениях a уравнение

$$\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0 \qquad (*)$$

имеет ровно одно решение на промежутке $0 \leqslant x < 2\pi$?

Р е ш е н и е. Переходя к квадратному уравнению относительно $\cos x$, получаем, что уравнение $(*)$ равносильно совокупности двух уравнений $\cos x = -a - 1$ и $\cos x = a$. Следовательно, допустимые значения a принадлежат объединению промежутков

$$-2 \leqslant a \leqslant 0, \quad -1 \leqslant a \leqslant 1.$$

Единственное на промежутке $[0; 2\pi)$ решение исходного уравнения существует при $a = -2$ (тогда $\cos x = -a - 1 = 1$, а уравнение $\cos x = a = -2$ не имеет решения) и при $a = 1$ (тогда $\cos x = a = 1$, а уравнение $\cos x = -a - 1 = -2$ не имеет решения).

Ответ: $a = -2$, $a = 1$.

1999 (июль)

Задача № 8. Для любого допустимого значения a решить неравенство

$$\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right) > 1$$

и найти, при каком значении a множество точек x, не являющихся решениями неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6.

Решение. Решим сначала данное неравенство для любого допустимого a :

$$\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right) > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2a < 1, \\ 0 < \log_3 x^2 < 2a, \end{cases} \\ \begin{cases} 2a > 1, \\ \log_3 x^2 > 2a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < \dfrac{1}{2}, \\ -3^a < x < -1,\ 1 < x < 3^a, \end{cases} \\ \begin{cases} a > \dfrac{1}{2}, \\ x < -3^a,\ x > 3^a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Последняя совокупность двух систем является ответом на первый вопрос задачи.

Только для второй системы из этой совокупности множество точек x, не являющихся решениями (включая промежуток $-1 \leqslant x \leqslant 1$, не входящий в ОДЗ), образует промежуток $[-3^a, 3^a]$, имеющий конечную длину. Длина этого промежутка равна 6 при $a = 1$. Это значение a есть ответ на второй вопрос задачи.

Ответ:

1) $\left[\begin{array}{l} \text{Если } 0 < a < \dfrac{1}{2}, \text{ то } -3^a < x < -1,\ 1 < x < 3^a, \\ \text{если } a > \dfrac{1}{2}, \text{ то } x < -3^a,\ x > 3^a. \end{array}\right.$

2) При $a = 1$.

2000 (март)

Задача № 7. При каких значениях b уравнение

$$25^x - (2b+5)5^{x-\frac{1}{x}} + 10b \cdot 5^{-\frac{2}{x}} = 0.$$

имеет ровно два решения?

Р е ш е н и е. Умножая данное уравнение на $5^{2/x} \neq 0$, приводим его к квадратному уравнению относительно одной показательной функции $5^{x+\frac{1}{x}}$:

$$5^{2(x+\frac{1}{x})} - (2b+5)\,5^{x+\frac{1}{x}} + 10b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 5^{x+\frac{1}{x}} = 5, & (1) \\ 5^{x+\frac{1}{x}} = 2b & (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \log_5 2b. \quad (*)$$

Уравнение (1) решений не имеет, уравнение (2) равносильно уравнению $(*)$, которое имеет ровно два решения, если дискриминант квадратного уравнения $x^2 - x \cdot \log_5 2b + 1 = 0$ положителен: $D = \log_5^2 2b - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 2b < -2, \\ \log_5 2b > 2, \end{array}\right.$ откуда $0 < b < \dfrac{1}{50}$ или $b > \dfrac{25}{2}$.

Ответ: $0 < b < \dfrac{1}{50}$, $b > \dfrac{25}{2}$.

2000 (май)

Задача № 7. Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$a^x\,(a-1)^x - 2a^{x+1} - (a-1)^x + 2a \leqslant 0$$

и найти, при каких значениях a множество решений неравенства представляет собой промежуток длины 2.

Р е ш е н и е. Решим сначала данное неравенство для любого допустимого a, разложив предварительно на множители левую часть неравенства:

$$a^x\,(a-1)^x - 2a^{x+1} - (a-1)^x + 2a \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^x - 1)\,[(a-1)^x - 2a] \leqslant 0. \quad (*)$$

Допустимые значения a удовлетворяют условию $a > 1$, при этом функция a^x всегда является возрастающей, а функция $(a-1)^x$ убывает при $1 < a < 2$, постоянна при $a = 2$ и возрастает при $a > 2$. Поэтому неравенство $(*)$ равносильно совокупности 5 систем:

$$(1)\begin{cases} 1 < a < 2, \\ a^x - 1 \leqslant 0, \\ (a-1)^x - 2a \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a < 2, \\ x \leqslant 0, \\ x \leqslant \log_{a-1} 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a < 2, \\ x \leqslant \log_{a-1} 2a, \end{cases}$$

(отметим, что при $1 < a < 2 \quad \log_{a-1} 2a < 0$),

$$(2)\begin{cases} 1 < a < 2, \\ a^x - 1 \geqslant 0, \\ (a-1)^x - 2a \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a < 2, \\ x \geqslant 0, \\ x \geqslant \log_{a-1} 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a < 2, \\ x \geqslant 0, \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} a = 2, \\ x \geqslant 0, \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} a > 2, \\ a^x - 1 \leqslant 0, \\ (a-1)^x - 2a \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2, \\ x \leqslant 0, \\ x \geqslant \log_{a-1} 2a, \end{cases} \qquad \text{нет решений,}$$

$$(5)\begin{cases} a > 2, \\ a^x - 1 \geqslant 0, \\ (a-1)^x - 2a \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2, \\ x \geqslant 0, \\ x \leqslant \log_{a-1} 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2, \\ 0 \leqslant x \leqslant \log_{a-1} 2a. \end{cases}$$

Объединение результатов будет ответом на первый вопрос задачи:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Если } 1 < a < 2, \text{ то } x \leqslant \log_{a-1} 2a, \quad x \geqslant 0; \\ \text{если } a = 2, \text{ то } x \geqslant 0; \\ \text{если } a > 2, \text{ то } 0 \leqslant x \leqslant \log_{a-1} 2a. \end{array}\right.$$

Только для $a > 2$ множество точек, являющееся решением задачи, представляет собой промежуток $0 \leqslant x \leqslant \log_{a-1} 2a$, имеющий конечную длину. Длина этого промежутка равна 2, если $\log_{a-1} 2a = 2$, откуда с учетом того, что при этом $a > 2$, находим $a = 2 + \sqrt{3}$.

Ответ: 1) $\left[\begin{array}{l} \text{Если } 1 < a < 2, \text{ то } x \leqslant \log_{a-1} 2a, \quad x \geqslant 0; \\ \text{если } a = 2, \text{ то } x \geqslant 0; \\ \text{если } a > 2, \text{ то } 0 \leqslant x \leqslant \log_{a-1} 2a. \end{array}\right.$

2) При $a = 2 + \sqrt{3}$.

З а м е ч а н и е. В некоторых школьных учебниках показательная функция определяется при основаниях, не равных 1.

Поэтому, если авторы работ не рассматривали функцию $(a-1)^x$ при $a=2$, то это ошибкой не считалось.

2000 (июль)

Задача № 7. При каких значениях a неравенство

$$\left(x^2-(a+2)\,x-2a^2+4a\right)\sqrt{1-x}\leqslant 0$$

имеет единственное решение?

Решение. Разложим в данном неравенстве квадратный трехчлен на линейные множители:

$$\left(x^2-(a+2)\,x-2a^2+4a\right)\sqrt{1-x}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2a)(x-(-a+2))\sqrt{1-x}\leqslant 0.$$

Решения данного неравенства принадлежат полупрямой $x\leqslant 1$, где $\sqrt{1-x}\geqslant 0$. Условие

$$\left(x^2-(a+2)x-2a^2+4a\right)\sqrt{1-x}\leqslant 0$$

выполняется между корнями $x_1=2a$ и $x_2=-a+2$.

Если хотя бы один из корней x_1 и x_2 лежит левее точки $x=1$, то решения неравенства образуют отрезок, и эта ситуация не удовлетворяет условию задачи.

Если меньший корень из x_1 и x_2 совпадает с точкой $x=1$, то исходное неравенство имеет единственное решение $x=1$. Это возможно, если $2a=1\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$ или если $-a+2=1\Leftrightarrow a=1$.

Кроме того, число $x=1$ будет единственным решением и тогда, когда оба корня x_1 и x_2 лежат правее точки $x=1$. Это возможно в двух случаях:

$$\begin{cases} 2a\leqslant -a+2, \\ 1<2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\leqslant \dfrac{2}{3}, \\ a>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<a\leqslant\frac{2}{3},$$

$$\begin{cases} -a+2<2a, \\ 1<-a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{2}{3}, \\ a<1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}<a<1.$$

Объединяя все найденные значения a, находим, что неравенство имеет единственное решение, если $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$.

Ответ: $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$.

2001 (март)

Задача № 7. Для любого значения a решить неравенство

$$3(2x - a) + 5a\sqrt{2x - a} - 2a^2 > 0.$$

Р е ш е н и е. Разлагая на множители левую часть исходного неравенства, имеем:

$$3(2x - a) + 5a\sqrt{2x - a} - 2a^2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(\sqrt{2x - a} + 2a)\left(\sqrt{2x - a} - \frac{a}{3}\right) > 0. \quad (*)$$

При $a = 0$ неравенство $(*)$ становится неравенством $3\sqrt{2x}\sqrt{2x} > 0$ $(**)$, решением которого является $x > 0$.

Отметим что в $(**)$ есть риск, неосторожно перемножив корни, перейти при $a = 0$ к неравенству $3 \cdot \sqrt{4x^2} > 0$, которое не равносильно $(**)$, так что результат для $a = 0$ лучше получать из исходного неравенства.

Таким образом, исходное неравенство $(*)$ равносильно следующей совокупности систем:

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1)\ a = 0,\ x > 0, \\ (2) \begin{cases} a < 0, \\ \sqrt{2x - a} + 2a > 0, \end{cases} \\ (3) \begin{cases} a > 0, \\ \sqrt{2x - a} - \frac{a}{3} > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1)\ a = 0,\ x > 0, \\ (2) \begin{cases} a < 0, \\ \sqrt{2x - a} > -2a, \end{cases} \\ (3) \begin{cases} a > 0, \\ \sqrt{2x - a} > \frac{a}{3}\,. \end{cases} \end{array}\right.$$

В системах (2) и (3) для $\sqrt{2x - a}$ остается одно неравенство, так как другая скобка в $(*)$ оказывается положительной.

Решая системы (2) и (3), получаем:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 2x - a > 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ x > 2a^2 + \dfrac{a}{2}\,, \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 2x - a > \dfrac{a^2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ x > \dfrac{a^2}{18} + \dfrac{a}{2}\,. \end{cases}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \text{Если } a < 0, \text{ то } x > 2a^2 + \dfrac{a}{2}\,; \\ \text{если } a \geqslant 0, \text{ то } x > \dfrac{a^2}{18} + \dfrac{a}{2}\,. \end{array}\right.$

2001 (май)

Задача № 7. Для каждого целого значения m найти все решения уравнения

$$\log_{\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)}(3x)^{m^2+1} = m^2 + 1.$$

Р е ш е н и е. Заданная логарифмическая функция при четных m определена для $x > 0$, а при нечетных m — для $x \neq \neq 0$. Поэтому результаты потенцирования уравнения при четных и нечетных m различны.

$$\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x)^{m^2+1} = m^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1) \begin{cases} m = 0, \\ x > 0, \\ 3x = x^2, \end{cases} \\ (2) \begin{cases} m \neq 0, \text{четное}, \\ 3x = \dfrac{m^2}{4} + x^2, \end{cases} \\ (3) \begin{cases} m \neq 0, \text{нечетное}, \\ 3|x| = \dfrac{m^2}{4} + x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1) \begin{cases} m = 0, \\ x = 3, \end{cases} \\ (2) \begin{cases} m \neq 0, \text{четное}, \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - m^2}}{2}, \end{cases} \\ (3) \begin{cases} m \neq 0, \text{нечетное}, \\ |x| = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - m^2}}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Корни существуют, если $|m| \leqslant 3$.

В системе (2) для каждого из $m = \pm 2$ получаем 2 решения $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

В системе (3) для каждого из $m = \pm 1$ получаем 4 решения $x = \pm\dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$ (любые комбинации знаков), а для каждого из $m = \pm 3$ получаем 2 решения $x = \pm\dfrac{3}{2}$.

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} \text{Если } m = 0, & \text{то } x = 3; \\ \text{для каждого из} & m = \pm 1 \\ & \text{4 решения } x = \pm(3 \pm 2\sqrt{2})/2; \\ \text{для каждого из} & m = \pm 2 \\ & \text{2 решения } x = (3 \pm \sqrt{5})/2; \\ \text{для каждого из} & m = \pm 3 \\ & \text{2 решения } x = \pm 3/2. \end{array}\right.$

2001 (июль)

Задача № 7. Для каждого значения a найти все решения уравнения

$$\cos 2x + 2\sin^2(x + a) + 2 - \sin a = 0,$$

принадлежащие промежутку $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Р е ш е н и е. Получая в левой части уравнения сначала сумму двух косинусов, а затем преобразуя ее в произведение синусов, имеем:

$$\cos 2x + 2\sin^2(x + a) + 2 - \sin a = 0 \ (*) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin(2x + a)\sin a = \sin a - 3 \ (**) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin(2x + a) = \frac{\sin a - 3}{2\sin a} \quad (3*),$$

так как из $(**)$ следует, что $\sin a \neq 0$.

Условия разрешимости уравнения $(3*)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin a - 3}{2\sin a} \geqslant -1, \\ \dfrac{\sin a - 3}{2\sin a} \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3(\sin a - 1)}{2\sin a} \geqslant 0, \\ \dfrac{-(\sin a + 3)}{2\sin a} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin a < 0, \ \sin a \geqslant 1, \\ \sin a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin a = 1.$$

Если $\sin a = 1$, то $a = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$, и $(**)$ принимает вид $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1 \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Заданному промежутку $[\pi, 2\pi]$ принадлежит $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Вариант решения. Можно заметить, что в $(**)$ левая часть $\geqslant -2$, а правая часть $\leqslant -2$, поэтому $(**)$ равносильно системе

$$\begin{cases} \sin a - 3 = -2, \\ 2\sin(2x + a) \cdot \sin a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = 1, \\ 2\sin(2x + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n) = -1 \end{cases} \text{и т. д.}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \text{Если } a = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z, \text{то } x = 3\pi/2; \\ \text{при других } a \text{ решений нет.} \end{array}\right.$

2002 (март)

Задача № 7. Для каждого значения a решить систему

$$\begin{cases} 4\log_4^2 x + 9\log_8^2 y \leqslant 4\left(a^2 + a\right), \\ \log_2^2 xy \geqslant 8\left(a^2 + a\right). \end{cases}$$

Решение. В данной системе полезно перейти к новым переменным, упрощающим аналитическое решение, а также позволяющим привлечь удобные графические представления:

$$\begin{cases} 4\log_4^2 x + 9\log_8^2 y \leqslant 4\left(a^2 + a\right), \\ \log_2^2 xy \geqslant 8\left(a^2 + a\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 \leqslant 4\left(a^2 + a\right), & (*) \\ (u + v)^2 \geqslant 8\left(a^2 + a\right), & (**) \end{cases}$$

где $u = \log_2 x$, $v = \log_2 y$. Из $(*)$ следует, что $a(a + 1) \geqslant 0$.

Умножая $(*)$ на 2 и вычитая $(**)$, получаем следствие $(u - v)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow u = v$ и система $(*), (**)$ принимает вид

$$(3*) \begin{cases} 2u^2 \leqslant 4(a^2 + a), \\ 2u^2 \geqslant 4(a^2 + a), \\ u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 2(a^2 + a), \\ u = v. \end{cases}$$

Если $a < -1$ или $a > 0$, то $u = \log_2 x = \pm\sqrt{2(a^2 + a)}$, $v = \log_2 y = \pm\sqrt{2(a^2 + a)}$ (в силу $(3*)$ знаки u и v одинаковы).

Если $a = -1$ или $a = 0$, то $u = \log_2 x = 0$ и $v = \log_2 y = 0$.

Если $-1 < a < 0$, то решений нет.

Потенцируя найденные выражения для $\log_2 x$ и $\log_2 y$, получаем x и y.

Замечание. Неравенства $(*)$ и $(**)$ при $a^2 + a \geqslant 0$ задают на плоскости uOv две общие точки круга $u^2 + v^2 \leqslant 4(a^2 + a)$ и двух полуплоскостей $|u + v| \geqslant \sqrt{2} \cdot \sqrt{4(a^2 + a)}$.

При $a = -1$ или $a = 0$ неравенства $(*)$ и $(**)$ задают одну точку $u = v = 0$.

При $-1 < a < 0$ неравенство $(*)$ геометрических образов не определяет и система неравенств решений не имеет.

$$\textit{Ответ:} \left[\begin{array}{l} \text{Если } a < -1,\ a > 0, \text{ то} \\ x_1 = 2^{2\sqrt{(a^2+a)/2}},\ y_1 = 2^{2\sqrt{(a^2+a)/2}}; \\ x_2 = 2^{-2\sqrt{(a^2+a)/2}},\ y_2 = 2^{-2\sqrt{(a^2+a)/2}}; \\ \text{если } a = -1 \text{ или } a = 0, \text{ то } \ x = 1,\ y = 1; \\ \text{если } \ -1 < a < 0, \text{ то решений нет.} \end{array}\right.$$

2002 (май)

Задача № 7. Для каждого значения a решить неравенство

$$\left(x^2 + 2x - a^2 - 4a - 3\right)(\sin x + 2x) > 0.$$

Решение. Оказывается, что в данном неравенстве дискриминант квадратного трехчлена является полным квадратом, поэтому этот квадратный трехчлен разлагается на «хорошие» линейные множители. Третья скобка меняет знак только при $x = 0$, так как функция $\sin x + 2x$ нечетная, а при $x > 0$ верно, что $\sin x + 2x > 0$. Действительно, если $0 < x \leqslant \pi$, то $\sin x + 2x > 0$ (оба слагаемых положительны), а если $x > \pi$, то также $2x + \sin x > 2\pi - 1 > 0$.

Поэтому третья скобка может быть заменена множителем x:

$$\left(x^2 + 2x - a^2 - 4a - 3\right)(\sin x + 2x) > 0 \quad (*) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-a-1)(x+a+3)\,x > 0 \Leftrightarrow [x-(a+1)][x-(-a-3)]\,x > 0 \ (**).$$

Корни $x_1 = a + 1$ и $x_2 = -a - 3$ при изменении a движутся по оси Ox навстречу друг другу симметрично относительно точки $x = -1$, меняются местами в этой точке при $a = -2$. Точка $x = 0$, в которой меняет знак третья скобка в $(*)$ или $(**)$, неподвижна.

В соответствии с этим возможны следующие расположения точек $x = x_1$, $x = x_2$, $x = 0$ и соответствующие им решения неравенства $(**)$ по методу интервалов (полезно контролировать себя рисунками на числовых осях):
Если $x_1 < 0 \leqslant x_2$, то $\;x_1 < x < 0,\; x > x_2$;
если $x_1 < x_2 < 0$, то $\;x_1 < x < x_2,\; x > 0$;
если $x_1 = x_2 < 0$, то $\;x > 0$;
если $x_2 < x_1 < 0$, то $\;x_2 < x < x_1,\; x > 0$;
если $x_2 < 0 \leqslant x_1$, то $\;x_2 < x < 0,\; x > x_1$.

Подстановка в эти условия выражений $x_1 = a + 1$ и $x_2 = -a - 3$ и решение относительно a полученных неравенств, не содержащих x, приводит к ответу.

В а р и а н т р е ш е н и я. Можно рассмотреть на плоскости xOa области сохранения знаков множителей в неравенстве $(**)$ и «снять» решения с прямых $a = \text{const}$ в характерных промежутках изменения a. Эти промежутки будут, конечно, те же, что и найденные выше.

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Если } a \leqslant -3, \text{ то } a+1 < x < 0,\; x > -(a+3); \\ \text{если } -3 < a < -2, \text{ то } a+1 < x < -(a+3),\; x > 0; \\ \text{если } a = -2, \text{ то } x > 0; \\ \text{если } -2 < a < -1, \text{ то } -(a+3) < x < a+1, x > 0; \\ \text{если } a \geqslant -1, \text{ то } -(a+3) < x < 0, x > a+1. \end{array}\right.$$

2002 (июль)

Задача № 7. Для каждого значения a решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2 - 6x - a^2 - 5a + 12\right) < -1$$

и найти, при каких значениях a множество чисел x, не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок числовой оси, длина которого меньше $2\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. 1) Чтобы решить неравенство для любых значений a, перейдем, прежде всего, к равносильному неравенству, не содержащему логарифма:

$$\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2 - 6x - a^2 - 5a + 12\right) < -1 \Leftrightarrow x^2 - 6x - a^2 - 5a + 12 > 9. \qquad (*)$$

Так как левая часть неравенства $(*)$ положительна, то условие существования логарифма выполнено и писать систему неравенств не нужно.

Неравенство $(*)$ равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D/4 < 0 \Leftrightarrow -3 < a < -2, \\ x \in R, \end{cases} \\ \begin{cases} D/4 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \leqslant -3,\ a \geqslant -2, \\ \left[\begin{array}{l} x < 3 - \sqrt{a^2+5a+6}\,, \\ x > 3 + \sqrt{a^2+5a+6}\,, \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

представляющей собой ответ на первый вопрос задачи.

2) Множество точек x, не являющихся решениями и образующих отрезок числовой оси, удовлетворяет условиям: $3 - \sqrt{a^2+5a+6} \leqslant x \leqslant 3 + \sqrt{a^2+5a+6}$. Длина этого отрезка, равная $2\sqrt{a^2+5a+6}$, по условию меньше $2\sqrt{3}$. Неравенство $2\sqrt{a^2+5a+6} < 2\sqrt{3}$ выполнено (с учетом условия $a \leqslant -3$, $a \geqslant -2$), если $\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} < a \leqslant -3$ или $-2 \leqslant a < \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \text{1) Если } -3 < a < -2, \text{ то } x \in R; \\ \text{если } a \leqslant -3,\ a \geqslant -2, \\ \text{то } x < 3 - \sqrt{a^2+5a+6}\,,\ x > 3 + \sqrt{a^2+5a+6}\,; \\ \text{2) } \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} < a \leqslant -3,\ -2 \leqslant a < \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}\,. \end{array}\right.$

2003 (март)

Задача № 7. Для каждого допустимого значения a в уравнении

$$\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{a} - x} = a$$

1) найти число различных решений уравнения;
2) найти эти решения.

Р е ш е н и е. Найдем решения уравнения для любых допустимых a (допустимыми значениями a являются $a \geqslant 0$):

$$\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{a} - x} = a\ (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 2ay + a^2 - \sqrt{a} = 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant a, \end{cases} (**)$$

где $y = \sqrt{x}$.

1) Если $D/4 = \sqrt{a}(2 - a^{\frac{3}{2}}) = 0 \Leftrightarrow a = 0,\ a = 2^{\frac{2}{3}}$, то система $(**)$ имеет единственное решение $x = 0$, если $a = 0$ и $x = 2^{-\frac{2}{3}}$, если $a = 2^{\frac{2}{3}}$.

2) Если $D/4 = \sqrt{a}(2 - a^{\frac{3}{2}}) > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 2^{\frac{2}{3}}$, то система $(**)$ имеет решения вида $y_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{2\sqrt{a} - a^2}}{2}$ $(3*)$, если они удовлетворяют условиям $0 \leqslant y \leqslant a$.

Видно, что корни $(3*)$ располагаются симметрично относительно точки $y = \dfrac{a}{2}$, поэтому их существование и принадлежность промежутку $[0; a]$ определяются системой

$$\begin{cases} 0 < a < 2^{\frac{2}{3}}, \\ y_1 = \dfrac{a - \sqrt{2\sqrt{a} - a^2}}{2} \geqslant 0, \\ y_2 = \dfrac{a + \sqrt{2\sqrt{a} - a^2}}{2} \leqslant a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 2^{\frac{2}{3}}, \\ 2\sqrt{a} - a^2 \leqslant a^2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant a < 2^{\frac{2}{3}}.$$

Итак, если $1 \leqslant a < 2^{\frac{2}{3}}$, то система $(**)$ имеет 2 решения, а значит, и уравнение $(*)$ имеет два решения $x_{1,2} = \left[\dfrac{a \pm \sqrt{2\sqrt{a} - a^2}}{2}\right]^2$.

3) При остальных допустимых значениях a, то есть $0 < a < 1$ и $a > 2^{\frac{2}{3}}$ корни $(3*)$ или не существуют, или не принадлежат промежутку $[0; a]$. Поэтому система $(**)$, а значит, и уравнение $(*)$ решений не имеют.

В а р и а н т р е ш е н и я. Полагая $u = \sqrt{\sqrt{a} - x} \geqslant 0$ и $v = \sqrt{x} \geqslant 0$, получаем симметричную систему $\begin{cases} u + v = a, \\ u^2 + v^2 = \sqrt{a}, \end{cases}$ которая сводится к квадратному уравнению $z^2 - az + \dfrac{a^2 - \sqrt{a}}{2} = 0$, имеющему неотрицательные решения при выполнении условий:

$$\begin{cases} D = 2\sqrt{a} - a^2 \geqslant 0, \\ a^2 - \sqrt{a} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 2^{\frac{2}{3}}, \\ a = 0,\ a \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ 1 \leqslant a \leqslant 2^{\frac{2}{3}} \end{array}\right. \quad \text{и т. д.}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \text{Если } a = 0, \text{ то единственное решение } x = 0; \\ \text{если } 0 < a < 1, \text{ то решений нет;} \\ \text{если } 1 \leqslant a < 2^{\frac{2}{3}}, \text{ то два решения } x = \left[\dfrac{a \pm \sqrt{2\sqrt{a} - a^2}}{2}\right]^2; \\ \text{если } a = 2^{\frac{2}{3}}, \text{ то единственное решение } x = 2^{-\frac{2}{3}}; \\ \text{если } a > 2^{\frac{2}{3}}, \text{ то решений нет.} \end{array}\right.$

2003 (май)

Задача № 7. Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$\sqrt{7 - \log_a x^2} > (\log_a x)(1 - 2\log_{|x|} a).$$

Р е ш е н и е. Допустимыми значениями a являются $0 < a < 1$ и $a > 1$. Учитывая область определения $x > 0$ исходного неравенства, избавляемся от модуля и делаем очевидную замену переменной:

$$\sqrt{7 - \log_a x^2} > \log_a x(1 - 2\log_{|x|} a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7 - 2\log_a x} > \log_a x(1 - 2\log_x a) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7 - 2y} > y - 2, \\ y \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{где } y = \log_a x, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a x < 0, \\ 0 < \log_a x < 3. \end{array}\right.$$

Если $0 < a < 1$, то $a^3 < x < 1$, $x > 1$; если $a > 1$, то $0 < x < 1$, $1 < x < a^3$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \text{Если } 0 < a < 1, \text{ то } a^3 < x < 1,\ x > 1; \\ \text{если } a > 1, \text{ то } 0 < x < 1,\ 1 < x < a^3. \end{array}\right.$

2003 (июль)

Задача № 7. Для каждого значения a решить неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 2^{|2a-1|} - 2x + 1}{x^2 - (a-2)x - 2a} > 0. \qquad (*)$$

Р е ш е н и е. В неравенстве $(*)$ дискриминант числителя $D = 4\left(1 - 2^{|2a-1|}\right) \leqslant 0$.

Если $a = \dfrac{1}{2}$, то $D = 0$ и тогда

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(x+2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow x < -2, \quad \frac{1}{2} < x < 1, \quad x > 1.$$

Если $a \neq \dfrac{1}{2}$, то $D < 0$ и тогда

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{(x+2)(x-a)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < -2, \\ x < a, \ x > -2; \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2, \\ x < -2, \ x > -2; \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < a < \dfrac{1}{2}, \ a > \dfrac{1}{2}, \\ x < -2, \ x > a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \text{Если } a = \dfrac{1}{2}, \text{ то } x < -2, \ \dfrac{1}{2} < x < 1, \ x > 1; \\ \text{если } a < -2, \text{ то } x < a, \ x > -2; \\ \text{если } a = -2, \text{ то } x < -2, \ x > -2; \\ \text{если } -2 < a < \dfrac{1}{2}, \ a > \dfrac{1}{2}, \text{ то } x < -2, \ x > a. \end{array}\right.$

2004 (март)

Задача № 7. Для каждого значения a решить уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{x-3a}{x}\right) + 4\left[\log_4(x-3a)\right]\log_2 x - 8\log_4^2 x = 0.$$

Р е ш е н и е.

$$\log_2^2\left(\frac{x-3a}{x}\right)+4\left[\log_4(x-3a)\right]\,\log_2 x-8\log_4^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(x-3a)-\log_2^2 x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2(x-3a)-\log_2 x=0,\\ \log_2(x-3a)+\log_2 x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(1)\begin{cases}a=0,\\ x>0,\end{cases}\\ (2)\begin{cases}x^2-3ax-1=0,\\ x>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(1)\begin{cases}a=0,\\ x>0,\end{cases}\\ (2)\begin{cases}a\in R,\\ x=\dfrac{3a+\sqrt{9a^2+4}}{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}\text{Если } a=0, \text{ то } x>0;\\ \text{если } a\neq 0, \text{ то } x=\dfrac{3a+\sqrt{9a^2+4}}{2}\\ \text{(если в последней строчке было}\\ \text{оставлено } a\in R, \text{ то такой ответ}\\ \text{считался верным}: x=1 \text{ входит в } x>0.\end{array}\right.$

2004 (июль)

Задача № 7. При каких значениях a уравнение

$$\big(1+\sin(3ax)\big)\sqrt{5\pi x-x^2}=0.$$

имеет ровно 5 различных корней?

Р е ш е н и е. Уравнение $(1+\sin 3ax)\sqrt{5\pi x-x^2}=0$ $(*)$ определено на отрезке $[0;5\pi]$, и значения $x=0$ и $x=5\pi$ — два решения, не зависящие от a.

Если $a=0$, то уравнение $(*)$ имеет всего 2 решения.

Если по условию уравнение $(*)$ имеет ровно 5 решений, то остается найти те значения a, при которых уравнение $(*)$ имеет на отрезке $[0;5\pi]$ ровно 3 решения, отличные от $x=0$ и $x=5\pi$.

Если $a>0$, то 2 корня уравнения $1+\sin 3ax=0$ вида $x=$ $=\dfrac{\pi}{3a}\left(-\dfrac{1}{2}+2n\right)$ при $n=1$, $n=2$ и $n=3$ должны быть строго меньше 5π, а следующий корень при $n=4$ — больше или равен $5\pi \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{3a}\left(-\frac{1}{2}+2\cdot 3\right)<5\pi\leqslant\frac{\pi}{3a}\left(-\frac{1}{2}+2\cdot 4\right)\Rightarrow\frac{11}{30}<a\leqslant\frac{15}{30}.$$

Если $a < 0$, положим $b = -a > 0$. Тогда 3 корня уравнения $1 - \sin 3bx = 0$ вида $x = \dfrac{\pi}{3b}\left(\dfrac{1}{2} + 2n\right)$ при $n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$ должны быть строго меньше 5π, а следующий корень при $n = 3$ — больше или равен $5\pi \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{3b}\left(\frac{1}{2} + 2\cdot 2\right) < 5\pi \leqslant \frac{\pi}{3b}\left(\frac{1}{2} + 2\cdot 3\right) \Rightarrow \frac{9}{30} < b \leqslant \frac{13}{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{13}{30} \leqslant a < -\frac{9}{30}\,.$$

Ответ: $-\dfrac{13}{30} \leqslant a < -\dfrac{9}{30}\,,\ \dfrac{11}{30} < a \leqslant \dfrac{15}{30}\,.$

ОТВЕТЫ

1993 (май). Вариант 1

1. $x < -1,\ 0 < x < 1$.
2. $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{-3-\sqrt{34}}{5} + 2\pi n$,
   $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{-3+\sqrt{34}}{5} + 2\pi n$,
   $n \in Z$.
3. $-3\log_6 3$.
4. $1;\ 9$.
5. $-5 \leqslant x < -3,\ 3 < x \leqslant 5$.
6. $\sqrt{2-1/m}$.
7. Если $a < 3$,
   то решений нет;
   если $a = 3$, то $x = 0$;
   если $3 < a \leqslant 6$,
   то $x_1 = a - 3$,
   $x_2 = (3-a)/3$;
   если $a > 6$,
   то $x_1 = (a+3)/3$,
   $x_2 = (3-a)/3$.
8. $\sqrt{k}$.

1993 (май). Вариант 2

1. $-1 < x < 0,\ x > 1$.
2. $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{-5-\sqrt{29}}{2} + 2\pi n$,
   $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2} + 2\pi n$,
   $n \in Z$.
3. $\log_{15}(3/25)$.
4. 15.
5. $x < -3,\ -1 < x \leqslant 0$.
6. $\sqrt{2-n}$.
7. Если $a < 1$,
   то решений нет;
   если $a = 1$, то $x = 0$;
   если $1 < a \leqslant 3$,
   то $x_1 = (1-a)/2$,
   $x_2 = (a-1)/4$;
   если $a > 3$,
   то $x_1 = -(a+1)/4$,
   $x_2 = (a-1)/4$.
8. m^2.

1993 (июль). Вариант 1

1. $0 < x < 3$.
2. $-7/6 + \pi n/3$,
   $7/8 + \pi n/4,\ n \in Z$.
3. $3^{3+\sqrt{5}}$.
4. $\dfrac{r\ \mathrm{ctg}\,(\beta/2)}{\sin 2\beta}$.
5. $x < 0,\ x > 1$.
6. $\sqrt{bc}$.
7. $\pm\sqrt{2}$.

8. $\left[\dfrac{2R\sqrt{r}+r\sqrt{3R+r}}{2(R-r)}\right]^2$.

1993 (июль). Вариант 2

1. $x<0,\ x>1/5$.
2. $\pi/5-6/5+2\pi n/5$,
   $6/7+2\pi n/7,\ n\in Z$.
3. $7^{2+\sqrt{3}}$.
4. $\sin 4\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi$.
5. $3/4<x<1,\ x>1$.
6. b^2/c.
7. $\pm\sqrt{7}$.
8. $\left[\dfrac{2R\sqrt{r}-r\sqrt{3R+r}}{2(R-r)}\right]^2$.

1994 (май). Вариант 1

1. $\pi/8+\pi n/4$,
   $\pm\pi/12+\pi n/2,\ n\in Z$.
2. 5.
3. 4.
4. $2\operatorname{arctg}(1/5)$,
   $\pi/2-2\operatorname{arctg}(1/5)$.
5. $(-5/2;5/2)$, $(-3/2;5/2)$.
6. $\sqrt{(b^2+c^2)/5}$.
7. $(0;1/2)$.
8. $Sd/3$.

1994 (май). Вариант 2

1. $\pi/14+\pi n/7$,
   $\pi/6+\pi n/3,\ n\in Z$.
2. 3.
3. -16.
4. $\arcsin\dfrac{17}{13\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{4}$,
   $\dfrac{3\pi}{4}-\arcsin\dfrac{17}{13\sqrt{2}}$.
5. $(4;-2),\ (4;0)$.
6. $\sqrt{5l^2-m^2}$.
7. $(-\infty;0),\ 9/8$.
8. $Sl/3$.

1994 (июль). Вариант 1

1. $(1;2)$.
2. $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{34}}\pm$
   $\pm\arccos\dfrac{5}{\sqrt{34}}+2\pi n,\ n\in Z$.
3. 1; 3.
4. $2m^2/\sqrt{4m^2-n^2}$,
   $2mn/\sqrt{4m^2-n^2}$.
5. 3; 3^{-6}.
6. $\sqrt{m^2+n^2}/2$.
7. $a\geqslant 14$.
8. $2\sqrt{3}a^2/(27\cos\beta)$.

1994 (июль). Вариант 2

1. $(2/3;1)$.
2. $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{17}}+$
$+(-1)^n\arcsin\dfrac{4}{\sqrt{17}}+$
$+\pi n,\ n\in Z$.
3. $-3;\ -1$.
4. $an/(a-n)$.
5. $5^{-1};\ 5^7$.
6. $\sqrt{4R^2-m^2}$.
7. $b\geqslant -15$.
8. $b\sqrt{3}\cdot\sqrt{b^2-h^2}/4$.

1995 (март). Вариант 1

1. $\pi n,\ -\pi/4+\pi n,\ n\in Z$.
2. $9^3;\ 9^{-4}$.
3. $-4;\ 3$.
4. $\dfrac{a\cos\alpha}{\sin(\alpha+\pi/4)}$.
5. $[-3;-1)\cup(0;2]$.
6. $2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos\varphi)$.
7. $-19/20$.
8. $\dfrac{\sqrt{(b-c)^2+(b+c)^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{4\sin\alpha}$.

1995 (март). Вариант 2

1. $\pi+2\pi n,\ \pi/2+2\pi n,\ n\in Z$.
2. $4^3;\ 4^{-5}$.
3. $-5;\ 3$.
4. $\dfrac{al}{a\sqrt{2}-l}$.
5. $[-1;0)\cup(8;9]$.
6. $\arccos\left((\sin\varphi)/\sqrt{2}\right)$.
7. $3/5$.
8. $\dfrac{\sqrt{(m-n)^2+(m+n)^2\operatorname{tg}^2\beta}}{4\sin\beta}$.

1995 (май). Вариант 1

1. 1.
2. 2.
3. $x<-1,\ -2/3\leqslant x<0$.
4. $\dfrac{am\sin\alpha}{\sqrt{1+m^2-2m\cos\alpha}}$,
$\arcsin\dfrac{m\sin\alpha}{\sqrt{1+m^2-2m\cos\alpha}}$.
5. $-3<x<-14/5,\ x>2$.
6. $bc/(b+c)^2$.
7. $5\pi/6+2\pi n,\ \pi+2\pi n, n\in Z$.
8. $\dfrac{nV}{d\,(m+n)}$.

1995 (май). Вариант 2

1. 2.
2. 1.
3. $-2 < x \leqslant -4/3,\ x > -1$.
4. $\dfrac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2+2mn\cos\alpha}$, $\arcsin\dfrac{n\sin\alpha}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}}$.
5. $5 < x < 41/8,\ x > 13$.
6. $lm/(l+m)^2$.
7. $\pi/3+2\pi n, n\in Z$.
8. $\dfrac{3nV}{2d\,(m+n)}$.

1995 (июль). Вариант 1

1. $\pi n/3$, $\pm\pi/6+\pi n,\ n\in Z$.
2. 0.
3. 0; 4.
4. $2R\sin\beta\,\sin(\alpha+\beta)$.
5. $(0;2)$.
6. $\dfrac{2}{3}b^3\left(1-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.
7. Если $a < -1$, то $x \geqslant 1$; если $a \geqslant -1$, то $x > 1+[(a+1)\ \log_2 3)]^2$.
8. $\sqrt{mn}$.

1995 (июль). Вариант 2

1. $\pi n/6$, $(-1)^n\pi/6+\pi n,\ n\in Z$.
2. 2.
3. -6; 0.
4. $\dfrac{r}{4\sin\dfrac{\beta}{2}\,\sin\dfrac{\gamma}{2}\,\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}}$.
5. $(0;3)$.
6. $\dfrac{b^3\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\beta}{\left(4+\operatorname{tg}^2\beta\right)^{3/2}}$.
7. Если $m<2$, то $x\geqslant -2$; если $m \geqslant 2$, то $x > [(m-2)\ \log_2 3)]^2-2$.
8. $\sqrt{cl}$.

1996 (март). Вариант 1

1. $2\pi n/3,\ \pi/6+2\pi n/3,\ n\in Z$.
2. $x<2,\ 2<x<3,\ x>5$.
3. $\log_{7/10}2$.
4. 60°.
5. $-\left(5^{5/8}\right)$.
6. $\dfrac{b^3}{6}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

7. Если $0 < a < 1$,
то $3 < x < \dfrac{3+\sqrt{9+4a^2}}{2}$;
если $a > 1$,
то $x > \dfrac{3+\sqrt{9+4a^2}}{2}$.

8. $\arcsin(a/b)$.

1996 (март). Вариант 2

1. $\pi/2+\pi n,\ \pi/3+\pi n,\ n\in Z$.
2. $2 < x < 3,\ 3 < x < 4$.
3. $\log_{3/4} 4$.
4. 3.
5. $-\left(3^{-1/4}\right)$.
6. $\dfrac{l^3}{54}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\left(3-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}\right)$.
7. Если $0 < b < 1$,
то $x > \dfrac{-3+\sqrt{9+4b^2}}{2}$;
если $b > 1$,
то $0 < x < \dfrac{-3+\sqrt{9+4b^2}}{2}$.
8. $a/\sin\alpha$.

1996 (май). Вариант 1

1. $(-1)^n\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi n$,
$n\in Z$.
2. 5; 4.
3. $-5 < x < 5$.
4. bd.
5. $x < 0$.
6. $4aR^2/\left(16R^2-3a^2\right)$.
7. 12.
8. Если $a \neq \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,
то решений нет;
если $a = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$,
то $x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$;
если $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
то $x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

1996 (май). Вариант 2

1. $\pm\arccos\left(1-\sqrt{2}\right)+2\pi n$,
$n\in Z$.
2. 8; 2.
3. $-5 < x < 5$.
4. S/m.
5. $x > 1$.
6. $bR^2/\left(9R^2-2b^2\right)$.
7. $27\sqrt{3}/4$.

8. Если $b \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$,
то решений нет;
если $b = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$,
то $x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$;
если $b = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$,
то $x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

1996 (июль). Вариант 1

1. $\pi n/2$,
$(-1)^n \pi/30 + \pi n/5,\ n \in Z$.
2. $-1 < x < 0,\ 1 < x < 4$.
3. 1.
4. $25/8$.
5. $(-2;\ -2),\ (-2;\ 2)$.
6. $d^3 \sin\beta\ \sin\gamma \sqrt{\cos^2\gamma - \sin^2\beta} = d^3 \sin\beta\ \sin\gamma \sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\gamma}$.
7. $d\sqrt{2 + d/c}$.
8. Если $a < -1,\ a = 0,\ a > 1$,
то 2 решения;
если $a = \pm 1$, то 4 решения;
если $-1 < a < 1,\ a \neq 0$,
то 6 решений.

1996 (июль). Вариант 2

1. $\pi/2 + \pi n$,
$(-1)^n \pi/24 + \pi n/4,\ n \in Z$.
2. $-2 < x < -1,\ 2 < x < 4$.
3. 3.
4. $25/2$.
5. $(-3;\ -1),\ (3;\ -1)$.
6. $H^3 \dfrac{\sin\gamma}{\sin^2\beta} \sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\gamma}$.
7. $k\sqrt{2 + k/l}$.
8. Если $-1 < a < 1,\ a = \pm\sqrt{2}$,
то 4 решения;
если $a = \pm 1$, то 5 решений;
если $a < -1,\ a > 1$,
$a \neq \pm\sqrt{2}$, то 6 решений.

1997 (март). Вариант 1

1. $\pi n,\ -\pi/8 + \pi n/2,\ n \in Z$.
2. $x < -3,\ -2 < x < 3$.
3. $-10;\ -3;\ 2$.
4. 12.
5. $-1 < x < 0,\ x > 2$.
6. $n : m$.

7. $1 < a < 2$.

8. $3\sqrt{2}$.

1997 (март). Вариант 2

1. $\pi n,\ \pi/4 + \pi n,\ n \in Z$.
2. $-5 < x < -1,\ x > 5$.
3. $-3;\ -2;\ 1$.
4. 8.
5. $x < 0,\ 1 < x < 2$.
6. $1 : k$.
7. $1 < b < 5$.
8. $\sqrt{38}$.

1997 (май). Вариант 1

1. $\pi/8 + \pi n/4$,
   $\pm 5\pi/12 + \pi n,\ n \in Z$.
2. -2.
3. $x \leqslant 0,\ x \geqslant 5/2$.
4. 6.
5. $-1 < x < -5/6$.
6. 14.
7. $a < -1/2,\ a \geqslant 2/3$.
8. $\dfrac{1}{3} r^3 \cos^2 \dfrac{\beta}{2} \sqrt{1 - 2\cos\beta}$.

1997 (май). Вариант 2

1. $\pi/14 + \pi n/7$,
   $(-1)^n \pi/6 + \pi n/2,\ n \in Z$.
2. 0.
3. $x \leqslant -9/8,\ x \geqslant 0$.
4. 3.
5. $29/7 < x < 5$.
6. 16.
7. $a \leqslant -2/3,\ a > 3/2$.
8. $\dfrac{4}{3} r^3 \cos^2 \dfrac{\beta}{2} \sqrt{-\cos\beta}$.

1997 (июль). Вариант 1

1. $\pi/4 + \pi n/2,\ n \in Z$.
2. $1/(1 - \log_2 3) = \log_{2/3} 2$.
3. $6 \leqslant x < 4^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} + 5$.
4. $(1 + \sqrt{3})/2$.
5. $(1/2; 7/2)$.
6. $77\sqrt{30}/120$.
7. Если $a < -4$,
   то $5 - \left(\dfrac{a+3}{a+4}\right)^2 < x \leqslant 5$;
   если $-4 \leqslant a < -3$, то $x \leqslant 5$,
   если $a \geqslant -3$,
   то $x < 5 - \left(\dfrac{a+3}{a+4}\right)^2$.
8. ab/c.

1997 (июль). Вариант 2

1. $\pi n,\ n \in Z$.
2. $1/(1-\log_3 5) = \log_{3/5} 3$.
3. $-3 \leqslant x < 3^{\frac{19-5\sqrt{13}}{2}} - 4$,
   $x > 3^{\frac{19+5\sqrt{13}}{2}} - 4$.
4. $1 - \sqrt{6}/6$.
5. $(1/2; 9/2)$.
6. $14\sqrt{3}/3$.
7. Если $a \leqslant 3$,
   то $x < 4 - \left(\dfrac{a-3}{a-4}\right)^2$,
   если $3 < a \leqslant 4$, то $x \leqslant 4$;
   если $a > 4$,
   то $4 - \left(\dfrac{a-3}{a-4}\right)^2 < x \leqslant 4$.
8. ac/b.

1998 (март). Вариант 1

1. $\pi n/2,\ n \in Z$.
2. $2 + \sqrt{10}/10$.
3. $(-\infty, -5) \bigcup (-3/2, 0)$.
4. $\sqrt{30} \cdot \sqrt[4]{2}$.
5. $x = 0,\ y = -1$.
6. $6\sqrt{3}$.
7. $(b/2)\sin\alpha$.
8. $[-13/3, 4)$.

1998 (март). Вариант 2

1. $\pi n/2, \pi n/3,\ n \in Z$.
2. $5/2 - 7\sqrt{5}/10$.
3. $(-\infty, -4) \bigcup (-1/2, 0)$.
4. $2\sqrt{20}$.
5. $x = 2,\ y = 3$.
6. $3\sqrt{17}$.
7. $(a/2)\sin\beta$.
8. $[-7/2, 9)$.

1998 (май). Вариант 1

1. $\pi/6 + \pi n/3$,
   $(1/2)\,\mathrm{arctg}\,2 + \pi n/2,\ n \in Z$.
2. $x < -2 + 2\sqrt{2},\ x > -1 + \sqrt{5}$.
3. 4.
4. $2\sqrt{15}$.
5. $0 \leqslant x < 1$.
6. $9\sqrt{3}/2$.
7. $a > -2\sqrt{2}$.
8. $2bc/(b+c)$.

1998 (май). Вариант 2

1. $\pi n/3,$

   $\operatorname{arctg}(-2)+\pi n,\ n\in Z.$
2. $x<\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2},$

   $x>\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}.$
3. $3/2.$
4. $18\sqrt{5}\,.$
5. $0\leqslant x<1.$
6. $16.$
7. $b>-1/\sqrt{3}\,.$
8. $a\,(b-a)/(b+a).$

1998 (июль). Вариант 1

1. $\pi/2+\pi n,\ \pi n/7,\ n\in Z.$
2. $1;\ 5.$
3. $x<1/2.$
4. $\dfrac{b\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{3\sin(\alpha+\beta)}\,.$
5. $x=-1,\ y=0.$
6. $2R^2\cos\alpha\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot$

   $\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=$

   $=R^2\cos\alpha\cdot(1+\sin\alpha).$
7. Если $0<a<1$,

   то $x<\log_a\dfrac{5}{2-a}$;

   если $1<a<2$,

   то $\log_a\dfrac{5}{2}<x<\log_a\dfrac{5}{2-a}$;

   если $a\geqslant 2$, то $x>\log_a\dfrac{5}{2}$.
8. $\sqrt{\dfrac{8(1-\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha}}=$

   $=\dfrac{4\,\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}\,.$

1998 (июль). Вариант 2

1. $\pi n,\ \pi/14+\pi n/7,\ n\in Z.$
2. $5;\ 9.$
3. $x>3/2.$
4. $\dfrac{b\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{3\sin(\alpha+\beta)}\,.$
5. $x=1,\ y=0.$
6. $2R^2\cos\alpha\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot$

   $\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=$

   $=R^2\cos\alpha\cdot(1+\sin\alpha).$
7. Если $0<a<1$,

   то $x<\log_a\dfrac{8}{3-a}$;

   если $1<a<3$,

   то $\log_a\dfrac{8}{3}<x<\log_a\dfrac{8}{3-a}$;

   если $a\geqslant 3$, то $x>\log_a\dfrac{8}{3}$.
8. $\sqrt{\dfrac{2(1+2\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}}=$

   $=\dfrac{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}{\sin(\alpha/2)}\,.$

1999 (март). Вариант 1

1. $\pi/10 + \pi n/5$,
   $(-1)^n\pi/6 + \pi n,\ n \in Z$.
2. 2.
3. $(-2; -5 + \sqrt{58})$.
4. $(36\sqrt{3} - 4)/121$.
5. $x = -1,\ y = -2$.
6. $b\sqrt{a/c}$.
7. Если $0 < a < 1,\ \ 1 < a \leqslant 4$,
   то $x = a + 4$;
   если $a > 4$,
   то $x_1 = -a,\ x_2 = a + 4$.
8. $4\beta b\,\dfrac{\cos\beta}{\cos(\beta/2)}$.

1999 (март). Вариант 2

1. $\pi n/5$,
   $(-1)^{n+1}\pi/42 + \pi n/7,\ n \in Z$.
2. 1.
3. $(-\infty; 5 - \sqrt{129})$.
4. $(21 + 8\sqrt{3})/3$.
5. $x = 2,\ y = -2/3$.
6. $c\,(a/b)^2$.
7. Если $-1 < a < 5$,
   то $x = a + 4$;
   если $a \leqslant -1,\ \ a \geqslant 5$,
   то $x_1 = -a,\ x_2 = a + 4$.
8. $\alpha h\,\sqrt{9 - 3\,\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}$.

1999 (май). Вариант 1

1. $\pi + 2\pi n,\ \pm\pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z$.
2. $(1 + \sqrt{137})/2$.
3. $(-2; -1)$.
4. $4/5$.
5. $x = 1,\ y = 4$.
6. $p\,(2q + p)/(p + q)$.
7. $-2;\ 1$.
8. $a\,(24 - 3\sqrt{38})/13 =$
   $$= \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \mathrm{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)}.$$

1999 (май). Вариант 2

1. $4\pi n/3,\ 2\pi/5 + 4\pi n/5,\ n \in Z$.
2. $(5 + \sqrt{113})/2$.
3. $(-2; +\infty)$.
4. 2.
5. $x = 2,\ y = 1$.
6. $q^2/(2q - p)$.
7. $0;\ 1$.
8. $b\,(8 - \sqrt{22})/7 =$
   $$= \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \mathrm{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

1999 (июль). Вариант 1

1. $\pi/4 + \pi n/2$,
   $\pm\pi/21 + 2\pi n/7,\ n \in Z$.
2. $x < 2,\ x > 16/5$.
3. 1.
4. $x = \log_2 5,\ y = \log_5 2$.
5. $-\sqrt{5}$.
6. $\sqrt{a^2 - bc}$.
7. $\arccos \dfrac{\sqrt{73} - 1}{9} = 2\arccos\sqrt{\dfrac{8 + \sqrt{73}}{18}}$.
8. 1) Если $0 < b < 1/2$, то $-7^b < x < -1$, $1 < x < 7^b$; если $b > 1/2$, то $x < -7^b,\ x > 7^b$.
   2) При $b = 1$.

1999 (июль). Вариант 2

1. $\pi/6 + \pi n/3$,
   $(-1)^n\pi/12 + \pi n/2,\ n \in Z$.
2. $x < -17/8,\ x > -3/2$.
3. 1.
4. $x = \log_7 3,\ y = \log_3 7$.
5. $\sqrt{10}$.
6. $\left(k^2 - m^2\right)/b$.
7. $\arccos \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = 2\arccos\sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}}$.
8. 1) Если $0 < n < 1/4$, то $-2^{2n} < x < -1$, $1 < x < 2^{2n}$; если $n > 1/4$, то $x < -2^{2n},\ x > 2^{2n}$.
   2) При $n = 1/2$.

2000 (март). Вариант 1

1. $2\pi n/7,\ 2\pi n/3,\ \pi n/2,\ n \in Z$.
2. $\log_5^2 8$.
3. $x > (5 - \sqrt{21})/2$.
4. $\arccos \dfrac{4a^2 + c^2 - 4m^2}{4ac}$.
5. $x = 2,\ y = 3$.
6. 2.
7. $0 < b < 1/50,\ b > 25/2$.
8. $4:3$.

2000 (март). Вариант 2

1. $\pi n,\ \pi/5 + 2\pi n/5$,
   $\pi/3 + 2\pi n/3,\ n \in Z$.
2. $\log_3^2 12 = (1 + \log_3 4)^2$.
3. $x > 4 - \sqrt{7}$.

4. $\dfrac{bl}{2b\cos(\alpha/2) - l}$.

5. $x = 3,\ y = 1$.

6. $\sqrt{13}/3$.

7. $0 < a < 1/4,\ a > 4$.

8. $3 : 7$.

2000 (май). Вариант 1

1. $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3-\sqrt{17}}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

2. $x \leqslant (1-\sqrt{29})/2,\ x > 22/7$.

3. $2\log_2\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

4. $101/179$.

5. $11/15,\ (-5+\sqrt{113})/4$.

6. $2\sqrt{119/55}$.

7. 1) Если $2 < a < 3$, то $x \leqslant \log_{a-2} 2a$, $x \geqslant 0$; если $a = 3$, то $x \geqslant 0$; если $a > 3$, то $0 \leqslant x \leqslant \log_{a-2} 2a$.
 2) При $a = 3+\sqrt{5}$.

8. $\sqrt{a(a-b)}$.

2000 (май). Вариант 2

1. $(-1)^n\arcsin\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

2. $x \leqslant (1-\sqrt{13})/2,\ x > 11/5$.

3. $2\log_7\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{2}$.

4. $71/76$.

5. $-6/7,\ (-5+\sqrt{73})/4$.

6. $(1/4)\sqrt{113/2}$.

7. 1) Если $1 < a < 2$, то $x \leqslant \log_{a-1} 3a$, $x \geqslant 0$; если $a = 2$, то $x \geqslant 0$; если $a > 2$, то $0 \leqslant x \leqslant \log_{a-1} 3a$.
 2) При $a = (5+\sqrt{21})/2$.

8. $\sqrt{ab}$.

2000 (июль). Вариант 1

1. $\dfrac{1}{8}(-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{4}{5} + \dfrac{\pi n}{8}$, $n \in Z$.

2. $(1+\sqrt{11})/2$.

3. $2-\sqrt{2} < x < 5/3$, $2 < x < 2+\sqrt{2}$.

4. $110\,\%$.

5. $1 \leqslant x \leqslant \log_2 3$.

6. $\left(b^2 - c^2\right)/b$.

7. $1 \leqslant a \leqslant 5/2$.

8. $2\sqrt{35}$.

2000 (июль). Вариант 2

1. $\frac{1}{8}(-1)^n \arcsin\frac{2}{5} + \pi n/8$, $n \in Z$.
2. $(7+\sqrt{11})/2$.
3. $3/2-\sqrt{3}/2 < x < 3/2$, $7/4 < x < 3/2+\sqrt{3}/2$.
4. $88\,\%$.
5. $-1 \leqslant x \leqslant -\log_7 5$.
6. $\left(m^2-n^2\right)/n$.
7. $-2 \leqslant a \leqslant -4/3$.
8. $\sqrt{71}$.

2001 (март). Вариант 1

1. $3 \leqslant x < 4$.
2. $\dfrac{-2\pm\sqrt{4+3\pi n}}{3}$, $n \geqslant 0$, $n \in Z$.
3. $2\log_2 5$, $\log_5 2$.
4. $3\sqrt{3}$.
5. $-\sqrt{15/2} < x < -1$, $1 < x < \sqrt{15/2}$.
6. $(3+2\sqrt{3})\,a$.
7. Если $a < 0$, то $x > 4a^2-2a$; если $a \geqslant 0$, то $x > \dfrac{a^2}{25}-2a$.
8. ln/m.

2001 (март). Вариант 2

1. $x < -8$, $x \geqslant 2$.
2. $\dfrac{3\pm\sqrt{9+8\pi(1+2n)}}{8}$, $n \geqslant 0$, $n \in Z$.
3. $\log_4 5$, $4\log_5 2$.
4. 14.
5. $-\sqrt{34/5} < x < -\sqrt{3/5}$, $\sqrt{3/5} < x < \sqrt{34/5}$.
6. $(7+2\sqrt{3})\,a$.
7. Если $a < 0$, то $x < \dfrac{a}{3}-\dfrac{a^2}{48}$; если $a \geqslant 0$, то $x < \dfrac{a}{3}-\dfrac{a^2}{3}$.
8. ad/c.

2001 (май). Вариант 1

1. $-\pi/6+\pi n$, $\pi/12+\pi n/2$, $n \in Z$.
2. $-(3+\sqrt{13})/2 < x \leqslant 2$.
3. $-2 < x < 0$, $3 < x < 5$.
4. $b\cdot\cos\alpha\,\cos(\alpha+\gamma)/\sin\gamma$.
5. $x = (-1)^n \arcsin\left(2-\sqrt{35}/2\right) + \pi k$, $y = \pm 2\pi/3 + 2\pi n$, k, $n \in Z$.
6. $9/7$.

7. Если $m = 0$, то $x = \pm 3$;
   если $m = \pm 1$,
   то $x = (3 \pm 2\sqrt{2})/2$;
   если $m = \pm 2$,
   то $x = \pm(3 \pm \sqrt{5})/2$;
   если $m = \pm 3$, то $x = 3/2$.
8. π.

2001 (май). Вариант 2

1. $-\pi/24+\pi n/2$, $7\pi/36+\pi n/3$, $n \in Z$.
2. $-2 \leqslant x < (-1+\sqrt{5})/2$.
3. $-3 < x < 0,\ 1 < x < 2$.
4. $m \cdot \cos\beta\ \cos(\alpha+\beta)/\sin\alpha$.
5. $x = (-1)^{n+1}\pi/6 + \pi k$, $y = \pm\arccos\left(2 - \sqrt{35}/2\right) + 2\pi n,\ k,\ n \in Z$.
6. 4.
7. Если $n = 0$, то $x = \pm 2$;
   если $n = \pm 1$,
   то $x = (2 \pm \sqrt{3})/2$;
   если $n = \pm 2$, то $x = \pm 1$.
8. π.

2001 (июль). Вариант 1

1. $-3 + \pi n,\ n \in Z$.
2. $(3+\sqrt{57})/8 < x < 4$, $x < 1/2$.
3. $-2;\ 1/3$.
4. $b\sqrt{pq}/2$.
5. $x < -2$.
6. $112/9$.
7. Если $a = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$,
   то $x = \dfrac{3\pi}{2}$;
   при других a решений нет.
8. $\pi/4$.

2001 (июль). Вариант 2

1. $3/4 + \pi n/4,\ n \in Z$.
2. $5/3 < x < (11-\sqrt{37})/2$, $x > 4$.
3. $-3;\ 1/2$.
4. $b\sqrt{ac}/2$.
5. $x > 3$.
6. $15/2$.
7. Если $a = 2\pi n,\ n \in Z$,
   то $x = 2\pi$;
   при других a решений нет.
8. $\sqrt{3}$.

2002 (март). Вариант 1

1. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ (-1)^n \arcsin\left(\frac{\pi}{4}\right)+$ $+\pi n,\ n\in Z.$
2. 2.
3. $-2-\sqrt{13}\leqslant x<-3,$ $0<x\leqslant -2+\sqrt{13}\,.$
4. 4.
5. $x_1=0,\ y_1=0;$ $x_2=-2\sqrt{11}\,,\ y_2=-\sqrt{11}\,.$
6. $2\arcsin\left(\sin^2(\beta/2)\right).$
7. Если $a<-2,\ a>0$, то $x_1=3^{2\sqrt{(a^2+2a)/2}},$ $y_1=3^{2\sqrt{(a^2+2a)/2}};$ $x_2=3^{-2\sqrt{(a^2+2a)/2}},$ $y_2=3^{-2\sqrt{(a^2+2a)/2}};$ если $a=-2$ или $a=0$, то $x=1,\ y=1;$ если $-2<a<0$, то решений нет.
8. $\sqrt{(b^2/2)-a^2}\,.$

2002 (март). Вариант 2

1. $\frac{\pi n}{6},\ \pm\arccos(\frac{\pi}{6})+2\pi n,$ $n\in Z.$
2. 0.
3. $4<x<6.$
4. $5+\sqrt{13}\,.$
5. $x_1=0,\ y_1=0;$ $x_2=-\sqrt{17}\,,\ y_2=3\sqrt{17}\,.$
6. $\arcsin\left(\frac{1}{2\cos(\alpha/4)}\right).$
7. Если $a<0,\ a>2$, то $x_1=5^{3\sqrt{(a^2-2a)/2}},$ $y_1=5^{-3\sqrt{(a^2-2a)/2}};$ $x_2=5^{-3\sqrt{(a^2-2a)/2}},$ $y_2=5^{3\sqrt{(a^2-2a)/2}};$ если $a=0$ или $a=2$, то $x=1,\ y=1;$ если $0<a<2$, то решений нет.
8. $\sqrt{(l^2/2)-k^2}\,.$

2002 (май). Вариант 1

1. 5.
2. $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$
3. $-5;\ (-1+\sqrt{17})/2.$
4. $\sqrt{7}/2.$
5. $x=1,\ y=1/243.$
6. $9/4.$
7. Если $a\leqslant -3$, то $a-1<x<0,\ x>-(a+3);$ если $-3<a<-1$, то $a-1<x<-(a+3),\ x>0;$ если $a=-1$, то $x>0;$ если $-1<a<1$, то $-(a+3)<x<a-1,\ x>0;$ если $a\geqslant 1$, то $-(a+3)<x<0,\ x>a-1.$
8. $4/3,\ 8\sqrt{5}/15.$

2002 (май). Вариант 2

1. 2.
2. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$
3. $-15;\ -1+2\sqrt{13}\,.$
4. $\sqrt{2}\,.$
5. $x=1,\ y=1/5.$
6. $9/16.$
7. Если $a<1$, то
$x<a-1,\ 0<x<3-a;$
если $1\leqslant a<2$, то
$x<0,\ a-1<x<3-a;$
если $a=2$, то $x<0$;
если $2<a\leqslant 3$, то
$x<0,\ 3-a<x<a-1;$
если $a>3$, то
$x<3-a,\ 0<x<a-1.$
8. $\sqrt{5}/3,\ 2/3.$

2002 (июль). Вариант 1

1. $\pi/2+\pi n,\ (-1)^n\pi/6+\pi n,$
$n\in Z.$
2. $x<1,\ \ 3<x\leqslant 5.$
3. $0<x<\log_{2/3}(1/3).$
4. $9/4.$
5. $3,9,27;\ \ 27,9,3.$
6. $\sqrt{102}/4.$
7. 1) Если $-3<a<1$, то
$x\in R;$
если $a\leqslant -3, a\geqslant 1$, то
$x<3-\sqrt{a^2+2a-3},$
$x>3+\sqrt{a^2+2a-3};$
2) $-1-\sqrt{6}<a\leqslant -3,$
$1\leqslant a<-1+\sqrt{6}.$
8. 12.

2002 (июль). Вариант 2

1. $\pi n/3,\ \pm\pi/18+2\pi n/3,$
$n\in Z.$
2. $1/2\leqslant x<2,\ \ x>5.$
3. $\log_{3/5}2<x<\log_{3/5}(1/5).$
4. 20.
5. $6,9,12;\ \ 18,9,0.$
6. $3\sqrt{3}\,.$
7. 1)Если $-3<a<1$,
то $x\in R$;
если $a\leqslant -3, a\geqslant 1$,
то $x<2-\sqrt{a^2+2a-3},$
$x>2+\sqrt{a^2+2a-3};$
2)$-1-\sqrt{8}<a\leqslant -3,$
$1\leqslant a<-1+\sqrt{8}.$
8. $2/5.$

2003 (март). Вариант 1

1. $(-1)^n\pi/18+\pi n/3,$

   $\pi/2+2\pi n,\ n\in Z.$

2. $x<-3,\ -3<x<-2.$

3. $0<x\leqslant 1/5,\ x\geqslant \log_5 6.$

4. $(-1+\sqrt{33})/2.$

5. $(-2;3),\ (2;3).$

6. $7.$

7. Если $b=0$, то единственное решение $x=0$; если $0<b<1$, то решений нет; если $1\leqslant b<2^{\frac{2}{3}}$, то два решения
$$x=\left[\frac{b\pm\sqrt{2\sqrt{b}-b^2}}{2}\right]^2;$$
если $b=2^{\frac{2}{3}}$, то единственное решение $x=2^{-\frac{2}{3}}$; если $b>2^{\frac{2}{3}}$, то решений нет.

8. $15\sqrt{3}/4,\ \sqrt{6}$.

2003 (март). Вариант 2

1. $\pi/6+2\pi n/3,$

   $\pm\,\pi/3+2\pi n,\ n\in Z.$

2. $1/2<x<2,\ x>2.$

3. $0<x\leqslant \log_3 8,\ x\geqslant 3.$

4. $(-1+\sqrt{76})/5.$

5. $(3;-2),\ (3;2).$

6. $11.$

7. Если $b=0$, то единственное решение $x=0$; если $0<b<1/2$, то решений нет; если $1/2\leqslant b<2^{-\frac{1}{3}}$, то два решения
$$x=\left[\frac{2b\pm\sqrt{2\sqrt{2b}-4b^2}}{2}\right]^2;$$
если $b=2^{-\frac{1}{3}}$, то единственное решение $x=2^{-\frac{2}{3}}$ если $b>2^{-\frac{1}{3}}$, то решений нет.

8. $27/2,\ \sqrt{6}.$

2003 (май). Вариант 1

1. $\pm \arccos(\pi/18) + 2\pi n$,
   $\pm \arccos(5\pi/18) + 2\pi n$,
   $n \in Z$.
2. $(3/2;\ 0)$.
3. $x < -8$,
   $(-5 - \sqrt{5})/2 < x < -3$,
   $-2 < x < (-5 + \sqrt{5})/2$,
   $x > 3$.
4. $(m+n)/(m+l)$.
5. $x \leqslant -5;\ x \geqslant 1/2$.
6. $1/(1 + \sin(\alpha/2))$.
7. Если $0 < a < 1$,
   то $a^4 < x < 1$, $x > 1$;
   если $a > 1$,
   то $0 < x < 1$, $1 < x < a^4$.
8. $2a\sqrt{3/23}$.

2003 (май). Вариант 2

1. $(-1)^n \arcsin(\pi/6) + \pi n$,
   $(-1)^{n+1} \arcsin(\pi/6) + \pi n$,
   $n \in Z$.
2. $(0;\ 1/2)$.
3. $x < -3$,
   $(7 - \sqrt{5})/2 < x < 3$,
   $4 < x < (7 + \sqrt{5})/2$,
   $x > 10$.
4. $(b+d)/(b+c)$.
5. $1/2 \leqslant x \leqslant 2$.
6. $1/(1 + \sin(\beta/2))^2$.
7. Если $0 < b < 1$,
   то $0 < x < 1$, $1 < x < b^{-4}$;
   если $b > 1$,
   то $b^{-4} < x < 1$, $x > 1$.
8. $(5b/2)\sqrt{3/26}$.

2003 (июль). Вариант 1

1. $\pm \pi/4 + \pi n,\ n \in Z$.
2. $x \leqslant -3/4,\quad x \geqslant 1/2$.
3. $\log_3(28/27) < x < \log_3 10$.
4. 8.
5. $x = -2,\ y = -3$;
   $x = 10/3,\ y = 7/3$.
6. $2R\sin(\alpha/2)$.
7. Если $a = 1/3$,
   то $x < -3,\ 1/3 < x < 1$,
   $x > 1$;
   если $a < -3$,
   то $x < a,\ x > -3$;
   если $a = -3$,
   то $x < -3,\ x > -3$;
   если $-3 < a < 1/3$,
   $a > 1/3$,
   то $x < -3,\ x > a$.
8. $175/24$.

2003 (июль). Вариант 2

1. $\pm\,\pi/6+\pi n,\ n\in Z$.

2. $-1/4\leqslant x\leqslant 11/40$.

3. $\log_2(65/32)<x<\log_2 6$.

4. 6.

5. $x=4,\ y=-3$;
   $x=-8/3,\ y=11/3$.

6. $a/(2\sin(\beta/2))$.

7. Если $a=1/5$,
   то $x<-5,\ 1/5<x<2$,
   $x>2$;
   если $a<-5$,
   то $x<a,\ x>-5$;
   если $a=-5$,
   то $x<-5,\ x>-5$;
   если $-5<a<1/5$,
   $a>1/5$,
   то $x<-5,\ x>a$.

8. $245/36$.

2004 (март). Вариант 1

1. $-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\dfrac{3}{4}+\pi n$,
   $n\in Z$.

2. $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}<x<0$,
   $1<x<\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

3. $-\sqrt{10}<x<-3, -1<x<0$,
   $0<x<1,\ 3<x<\sqrt{10}$.

4. $13/16$.

5. $x_1=\dfrac{3}{2},\ y_1=\dfrac{1}{2}$;
   $x_2=\dfrac{3}{2}-\log_3 2$,
   $y_2=\dfrac{1}{2}+\log_3 2$.

6. $35/2$.

7. Если $a=0$, то $x>0$;
   если $a\neq 0$, то
   $x=\dfrac{5a+\sqrt{25a^2+4}}{2}$.

8. $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$.

2004 (март). Вариант 2

1. $-\dfrac{\pi}{10}\pm\arccos\dfrac{4}{7}+2\pi n, n\in Z$.

2. $1-\sqrt{5}<x<0$,
   $2<x<1+\sqrt{5}$.

3. $-\sqrt{17}<x<-4,\ -1<x<0$,
   $0<x<1,\ 4<x<\sqrt{17}$.

4. $91/110$.

5. $x_1=\dfrac{1}{2},\ y_1=\dfrac{3}{2}$;
   $x_2=\dfrac{1}{2}+\log_7 4$,
   $y_2=\dfrac{3}{2}-\log_7 4$.

6. $35/11$.

7. Если $a = 0$, то $x > 0$;
если $a \neq 0$, то
$x = 3a + \sqrt{9a^2 + 1}$.
8. $\operatorname{arctg} 2$.

2004 (июль). Вариант 1

1. $\pi/12 + \pi n/6,\ \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.
2. $-1 < x < 1,\ 5 < x < 7$.
3. $2 < x < 1 + \sqrt{3}$.
4. $-1 + \sqrt{6}$.
5. $x = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{4}$, $y = \dfrac{-5 + \sqrt{13}}{2}$.
6. 24.
7. $-\dfrac{13}{40} \leqslant a < -\dfrac{9}{40}$, $\dfrac{11}{40} < a \leqslant \dfrac{15}{40}$.
8. $\sqrt{14}/6$.

2004 (июль). Вариант 2

1. $\pi n/6,\ n \in Z$.
2. $0 < x < 1,\ 3 < x < 4$.
3. $3 < x < 2 + \sqrt{5}$.
4. $-3 + \sqrt{30}$.
5. $x = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}$, $y = \dfrac{-5 - \sqrt{13}}{8}$.
6. 20.
7. $-\dfrac{11}{12} \leqslant a < -\dfrac{7}{12}$, $\dfrac{5}{12} < a \leqslant \dfrac{9}{12}$.
8. 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Несколько советов абитуриенту 3

Часть 1. **Варианты экзаменов и олимпиад 1993–2004 гг.** 6
1993 (май). Вариант 1 6
1993 (май). Вариант 2 7
1993 (июль). Вариант 1 8
1993 (июль). Вариант 2 9
1994 (май). Вариант 1 10
1994 (май). Вариант 2 11
1994 (июль). Вариант 1 12
1994 (июль). Вариант 2 13
1995 (март). Вариант 1 14
1995 (март). Вариант 2 15
1995 (май). Вариант 1 16
1995 (май). Вариант 2 16
1995 (июль). Вариант 1 17
1995 (июль). Вариант 2 18
1996 (март). Вариант 1 19
1996 (март). Вариант 2 20
1996 (май). Вариант 1 21
1996 (май). Вариант 2 21
1996 (июль). Вариант 1 22
1996 (июль). Вариант 2 23
1997 (март). Вариант 1 24
1997 (март). Вариант 2 25
1997 (май). Вариант 1 26
1997 (май). Вариант 2 27
1997 (июль). Вариант 1 28
1997 (июль). Вариант 2 29
1998 (март). Вариант 1 30
1998 (март). Вариант 2 31
1998 (май). Вариант 1 32
1998 (май). Вариант 2 33
1998 (июль). Вариант 1 34

1998 (июль). Вариант 2 35
1999 (март). Вариант 1 36
1999 (март). Вариант 2 37
1999 (май). Вариант 1 38
1999 (май). Вариант 2 39
1999 (июль). Вариант 1 40
1999 (июль). Вариант 2 41
2000 (март). Вариант 1 42
2000 (март). Вариант 2 42
2000 (май). Вариант 1 43
2000 (май). Вариант 2 44
2000 (июль). Вариант 1 45
2000 (июль). Вариант 2 46
2001 (март). Вариант 1 47
2001 (март). Вариант 2 48
2001 (май). Вариант 1 49
2001 (май). Вариант 2 50
2001 (июль). Вариант 1 51
2001 (июль). Вариант 2 52
2002 (март). Вариант 1 53
2002 (март). Вариант 2 54
2002 (май). Вариант 1 55
2002 (май). Вариант 2 56
2002 (июль). Вариант 1 57
2002 (июль). Вариант 2 58
2003 (март). Вариант 1 59
2003 (март). Вариант 2 60
2003 (май). Вариант 1 61
2003 (май). Вариант 2 62
2003 (июль). Вариант 1 63
2003 (июль). Вариант 2 64
2004 (март). Вариант 1 65
2004 (март). Вариант 2 66
2004 (июль). Вариант 1 67
2004 (июль). Вариант 2 68

Часть 2. **Решения геометрических задач** 69
1993 (май) 69
1993 (июль) 70
1994 (май) 72
1994 (июль) 74
1995 (март) 76
1995 (май) 78
1995 (июль) 79
1996 (март) 80
1996 (май) 82
1996 (июль) 83
1997 (март) 85
1997 (май) 86
1997 (июль) 88
1998 (март) 89
1998 (май) 91
1998 (июль) 92
1999 (март) 94
1999 (май) 95
1999 (июль) 97
2000 (март) 99
2000 (май) 100
2000 (июль) 102
2001 (март) 103
2001 (май) 105
2001 (июль) 107
2002 (март) 108
2002 (май) 110
2002 (июль) 111
2003 (март) 113
2003 (май) 115
2003 (июль) 116
2004 (март) 118
2004 (июль) 120

Часть 3. **Решения задач с параметром** 123
1993 (май) 123
1993 (июль) 124
1994 (май) 125
1994 (июль) 125
1995 (март) 126
1995 (май) 127
1995 (июль) 127
1996 (март) 128
1996 (май) 129
1996 (июль) 129
1997 (март) 130
1997 (май) 131
1997 (июль) 132
1998 (март) 133
1998 (май) 133
1998 (июль) 134
1999 (март) 135
1999 (май) 135
1999 (июль) 136
2000 (март) 137
2000 (май) 137
2000 (июль) 139
2001 (март) 140
2001 (май) 141
2001 (июль) 142
2002 (март) 143
2002 (май) 144
2002 (июль) 145
2003 (март) 146
2003 (май) 148
2003 (июль) 148
2004 (март) 149
2004 (июль) 150

Ответы 152