

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ХРОМОДИНАМИКУ

А.В. Нестеренко

nesterav@theor.jinr.ru

Задачи к факультативному курсу лекций для студентов 5 курса
кафедры теоретической физики
Физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Лекция 1. Классическая теория поля. Лагранжев и гамильтонов формализмы. Симметрии и их следствия.

Задача 1.1. Показать, что из условия минимума действия системы $\delta\mathcal{A} = 0$ следуют уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_a(x)} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu u_a(x)]} = 0, \quad (1.1)$$

где $\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(x) d^4x$ – действие, $\mathcal{L} = \mathcal{L}[u_a(x), \partial_\mu u_a(x)]$ – лагранжиан, $\{u_a(x)\}$ – набор функций поля.

Задача 1.2. Показать, что в спинорной электродинамике

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi \quad (1.2)$$

уравнения движения (1.1) принимают вид

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu \\ (i\hat{D} - m)\psi = 0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\hat{D} = D_\mu \gamma^\mu$, $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ и $j_\nu = \bar{\psi}\gamma_\nu\psi$.

Задача 1.3. Вывести динамические инварианты для свободного поля Дирака. В частности, показать, что тензор энергии–импульса $T_{\mu\nu}$ и вектор тока j_μ имеют следующий вид:

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi], \quad (1.4)$$

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \quad (1.5)$$

Задача 1.4. Показать, что уравнение движения свободного электромагнитного поля при наложении ковариантной калибровки $\mathcal{L}_{\text{gauge}} = (\partial_\mu A^\mu)^2/(2\xi)$ имеет вид

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (1.6)$$

где ξ – калибровочный параметр (произвольная действительная постоянная). Показать, что в ковариантной калибровке пропагатор электромагнитного поля определяется формулой

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2} \left[-g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (1.7)$$

Задача 1.5. Показать, что уравнение движения свободного электромагнитного поля при наложении аксиальной калибровки $\mathcal{L}_{\text{gauge}} = (n_\mu A^\mu)^2/(2\xi)$ имеет вид

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} n^\nu n_\mu A^\mu = 0, \quad (1.8)$$

где n_μ – некоторый постоянный 4-вектор размерности массы ($n^2 > 0$) и ξ – калибровочный параметр. Показать, что в аксиальной калибровке пропагатор электромагнитного поля принимает вид

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2} \left[-g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{(kn)^2} n^2 + \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{kn} \right]. \quad (1.9)$$

Задача 1.6. Вывести уравнения движения в хромодинамике

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f^i [i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - m_f \delta_{ij}] \psi_f^j, \quad (1.10)$$

где $i, j = 1, 2, 3$, $a = 1, \dots, 8$, f обозначает аромат кварка,

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.11)$$

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu + i \frac{g}{2} \sum_a \lambda_{ij}^a A_\mu^a, \quad (1.12)$$

$t_a = \lambda_a/2$ – генераторы калибровочной группы $SU(3)$, $[t_a, t_b] = if_{abc} t_c$. Получить выражения для глюонного пропагатора в ковариантной и аксиальной калибровках.

Лекция 2. Квантовая теория поля. Представление взаимодействия. Диаграммы Фейнмана.

Задача 2.1. Показать, что матрица рассеяния может быть представлена в виде

$$S = T \exp \left[i \int \mathcal{L}_{\text{int}}(x) d^4x \right], \quad (2.1)$$

где $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$ содержит только члены взаимодействия.

Задача 2.2. В предположении малости константы связи показать, что матрица рассеяния (2.1) может быть представлена в виде ряда теории возмущений

$$S \simeq 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (2.2)$$

где

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T [\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)]. \quad (2.3)$$

Задача 2.3. Для теории скалярного поля с $\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = h\varphi^3(x)$ выписать первые три члена разложения ($n = 1, 2, 3$) S матрицы (2.3) и сопоставить каждому из них соответствующие диаграммы Фейнмана.

Задача 2.4. Для спинорной электродинамики (1.2) выписать первые три члена разложения ($n = 1, 2, 3$) S матрицы (2.3) и сопоставить каждому из них соответствующие диаграммы Фейнмана.

Задача 2.5. Для хромодинамики (1.10) с учетом полей духов $\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \partial^\mu \bar{\omega}^a (\delta_{ab} \partial_\mu - gf_{abc} A_\mu^c) \omega^b$ выписать первые три члена разложения ($n = 1, 2, 3$) S матрицы (2.3) и сопоставить каждому из них соответствующие диаграммы Фейнмана.

Лекция 3. Расходимости в квантовой теории поля и методы их устранения.

Задача 3.1. Для теории скалярного поля с $\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = h\varphi^4(x)$ показать, что матричные элементы процесса рассеяния $2 \rightarrow 2$ в первом (M_1 , Рис. 1А) и втором (M_2 , Рис. 1В) порядках теории возмущений имеют вид:

$$M_1 = \frac{ih}{(2\pi)^2} \frac{\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)}{4\sqrt{p_1^0 p_2^0 k_1^0 k_2^0}}, \quad M_2 = -M_1 \frac{h}{(4\pi)^2} I(k_1 + k_2), \quad (3.1)$$

где $p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ и

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 p}{[m^2 - p^2][m^2 - (p - k)^2]}. \quad (3.2)$$

Здесь и далее в пропагаторах скалярного поля подразумевается, что масса имеет бесконечно малую мнимую добавку $-i\varepsilon$.



Рисунок 1: Процесс рассеяния $2 \rightarrow 2$ в первом (А) и втором (В) порядках теории возмущений в скалярной теории с $\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = h\varphi^4(x)$.

Задача 3.2. Показать, что в размерной регуляризации интеграл $I(k)$ (3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{reg } I(k) &= \frac{i}{\pi^2} \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^{4-2\varepsilon} p}{[m^2 - p^2][m^2 - (p - k)^2]} \\ &\simeq -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln(4\pi) + \int_0^1 \ln \left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2} \right] dx + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0_+, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где μ – точка нормировки (произвольный положительный параметр размерности массы), $\gamma_E \simeq 0.577$ – постоянная Эйлера. Указание: для вычисления импульсного интеграла использовать α -представление.

Задача 3.3. Показать, что в регуляризации Паули–Вилларса интеграл $I(k)$ (3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{reg } I(k) &= \frac{i}{\pi^2} \int \left[\frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{M^2 - p^2} \right] \left[\frac{1}{m^2 - (p - k)^2} - \frac{1}{M^2 - (p - k)^2} \right] d^4 p \\ &\simeq -\ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) + \int_0^1 \ln \left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2} \right] dx + \mathcal{O} \left(\frac{1}{M^2} \right), \quad M^2 \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где μ – точка нормировки.

Задача 3.4. Показать, что в фейнмановской регуляризации (“плавное обрезание”) интеграл $I(k)$ (3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{reg } I(k) &= \frac{i}{\pi^2} \int \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - p^2} \frac{d^4 p}{[m^2 - p^2][m^2 - (p - k)^2]} \\ &\simeq -\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + \int_0^1 \ln\left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2}\right] dx + 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right), \quad \Lambda^2 \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где μ – точка нормировки.

Задача 3.5. Вычислить интеграл $I(k)$ (3.2) в аналитической регуляризации

$$\text{reg } I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 p}{[m^2 - p^2]^{1+\alpha} [m^2 - (p - k)^2]^{1+\alpha}}, \quad \alpha \rightarrow 0_+. \quad (3.6)$$

Лекция 4. Метод ренормгруппы в квантовой хромодинамике.

Задача 4.1. Показать, что в глюодинамике (т.е., в отсутствие кварковых полей)

$$\mathcal{L}_{\text{gl}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g[A_\mu, A_\nu])^2 \quad (4.1)$$

вычисление однопетлевых поправок к глюонному пропагатору и вершинам трехглюонного и четырехглюонного взаимодействия приводит к следующим контрчленам в \mathcal{L}_{gl} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gl}}^{(1)} &= -\frac{1}{4} \left\{ (z_2 - 1)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - 2g(z_1 - 1)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)[A_\mu, A_\nu] \right. \\ &\quad \left. + (z_1^2 z_2^{-1} - 1)g^2[A_\mu, A_\nu]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$z_1 = 1 + \frac{g^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right), \quad z_2 = 1 + \frac{5g^2}{24\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right). \quad (4.3)$$

Указание: использовать регуляризацию Паули–Вилларса.

Задача 4.2. Показать, что общее решение системы дифференциальных уравнений ренормгруппы

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ln \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \psi_2(g) \right) D(\kappa \tilde{x}, g) = 0, \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ln \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \psi_3(g) \right) \Gamma_3(\kappa \tilde{x}_1, \kappa \tilde{x}_2, \kappa \tilde{x}_3, g) = 0, \quad (4.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ln \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \bar{g}(\kappa, g) = 0 \quad (4.6)$$

может быть представлено в виде

$$\Gamma_n(\kappa \tilde{x}_i, g) = \Gamma_n(\tilde{x}_i, \bar{g}) \exp \left\{ \int_1^\kappa \psi_n[\bar{g}(\kappa', g)] \frac{d\kappa'}{\kappa'} \right\}, \quad (4.7)$$

где

$$\psi_n(g) = \left. \frac{\partial \Gamma_n(t, g)}{\partial t} \right|_{t=1}, \quad \beta(g) = \left. \frac{\partial \bar{g}(t, g)}{\partial t} \right|_{t=1}. \quad (4.8)$$

Задача 4.3. Выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме, представленной на Рис. 2 А, и показать, что

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(k^2) = i \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{2}{3} n_f (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) + \text{const} \right], \quad (4.9)$$

где n_f – число активных кварков. Указание: использовать фейнмановскую параметризацию, размерную регуляризацию и считать все кварки безмассовыми.

Задача 4.4. Выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме, представленной на Рис. 2 В, и показать, что

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k^2) = i \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{N_c}{12} (-19g_{\mu\nu} k^2 + 22k_\mu k_\nu) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) + \text{const} \right], \quad (4.10)$$

где $N_c = 3$ – число цветов. Указание: использовать выражение для глюонного пропагатора в ковариантной калибровке.

Задача 4.5. Выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме, представленной на Рис. 2 С, и показать, что

$$\Pi_{\mu\nu}^{(3)}(k^2) = i \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{N_c}{12} (-g_{\mu\nu} k^2 - 2k_\mu k_\nu) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) + \text{const} \right]. \quad (4.11)$$

Задача 4.6. Выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме, представленной на Рис. 2 D, и показать, что в ковариантной калибровке $\Pi_{\mu\nu}^{(4)}(k^2) = 0$.

Задача 4.7. Выписать матричные элементы, соответствующие диаграммам, представленным на Рис. 2 Е и Рис. 2 F, и показать, что в приближении безмассовых кварков их совокупный вклад в вершинную функцию имеет вид

$$\Gamma_\mu(k^2) = g\gamma_\mu \frac{\lambda}{2} i \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 \left(N_c - \frac{4}{3} \right) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) + \text{const} \right]. \quad (4.12)$$

Указание: выбрать импульсы, указанные на рисунке.

Задача 4.8. Выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме, представленной на Рис. 2 G, и показать, что в приближении безмассовых кварков

$$\Sigma(k^2) = i\hat{k} \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{4}{3} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) + \text{const} \right]. \quad (4.13)$$

Задача 4.9. В рамках теории возмущений показать, что перенормированная константа связи сильного взаимодействия в однопетлевом приближении имеет вид

$$\bar{g} = g \left[1 + \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{\beta_0}{2} \ln \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (4.14)$$

где $\beta_0 = 11N_c/3 - 2n_f/3$. Показать, что соответствующая β функция (4.8) принимает вид

$$\beta(g) = -g \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 \beta_0. \quad (4.15)$$

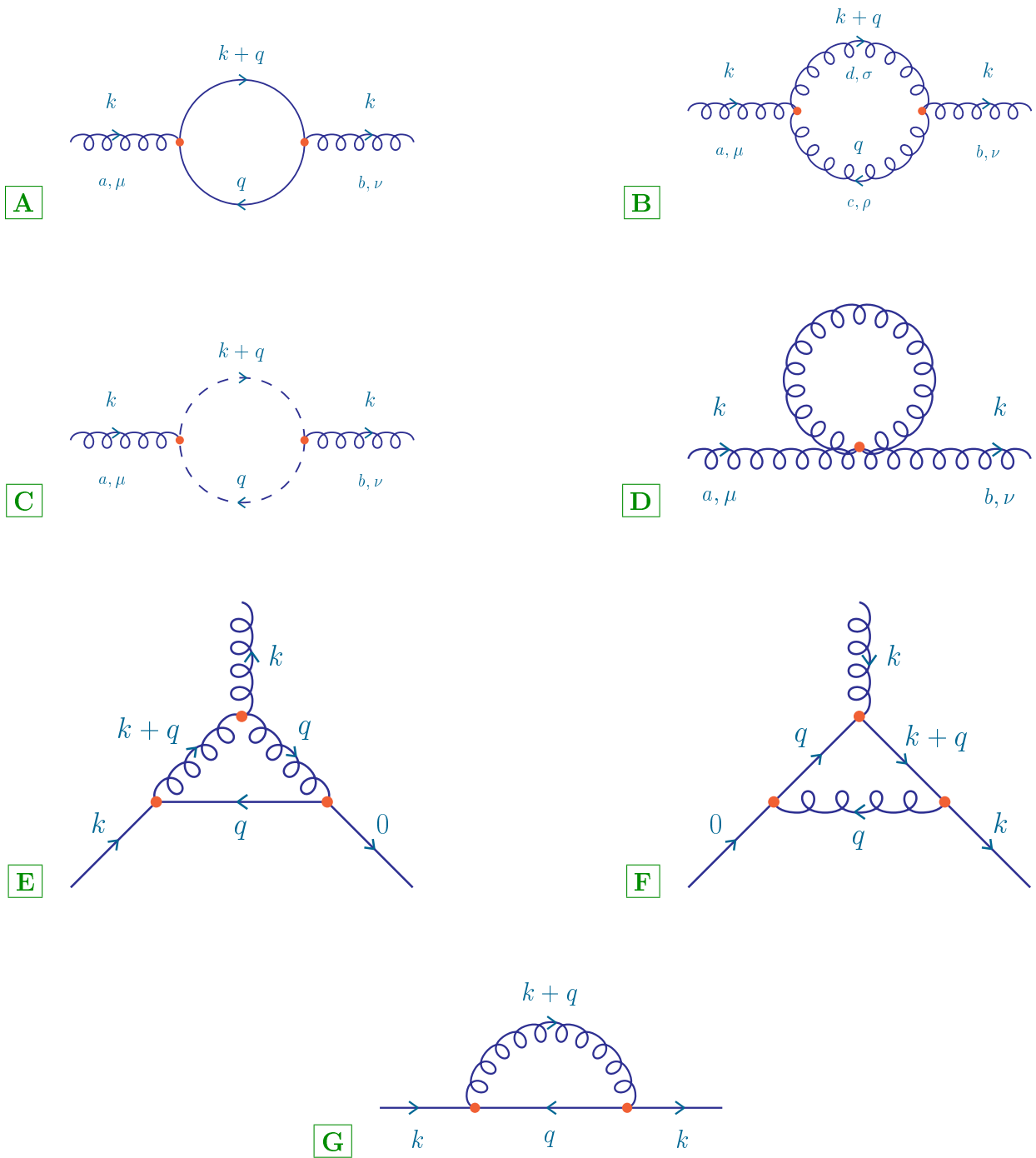


Рисунок 2: Однопетлевые поправки к глюонному пропагатору (A–D), вершине кварк-глюонного взаимодействия (E, F), и кварковому пропагатору (G).

Лекция 5. Инвариантный заряд и асимптотическая свобода в КХД.

Задача 5.1. Показать, что пертурбативное решение уравнения ренормгруппы (4.6) для инвариантного заряда КХД $\alpha_s(Q^2) = g^2(Q^2)/(4\pi)$

$$\frac{d \ln \alpha_s^{(\ell)}(\mu^2)}{d \ln \mu^2} = - \sum_{j=0}^{\ell-1} \beta_j \left[\frac{\alpha_s^{(\ell)}(\mu^2)}{4\pi} \right]^{j+1} \quad (5.1)$$

в однопетлевом приближении ($\ell = 1$) имеет вид

$$\alpha_s^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln z}, \quad z = \frac{Q^2}{\Lambda^2}. \quad (5.2)$$

Найти зависимость масштабного параметра Λ от точки нормировки Q_0^2 и от значения $\alpha_s^{(1)}(Q_0^2)$. Указание: разделить переменные в уравнении (5.1) и проинтегрировать результат в конечных пределах.

Задача 5.2. Показать, что решение уравнения ренормгруппы для инвариантного заряда КХД (5.1) в двухпетлевом приближении ($\ell = 2$) имеет вид

$$\alpha_s^{(2)}(Q^2) = -\frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{B_1} \frac{1}{1 + W_{-1} \{-\exp[-(1 + B_1^{-1} \ln z)]\}}, \quad B_j = \frac{\beta_j}{\beta_0^{j+1}}, \quad (5.3)$$

где $W_{-1}(x)$ обозначает соответствующую ветвь W -функции Ламберта, которая определяется уравнением $W_k(x) \exp[W_k(x)] = x$. Найти зависимость масштабного параметра Λ от точки нормировки Q_0^2 и от значения $\alpha_s^{(2)}(Q_0^2)$. Показать, что в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ бегущая константа связи (5.3) может быть представлена в виде

$$\alpha_s^{(2)}(Q^2) \simeq \frac{4\pi}{\beta_0} \left[\frac{1}{\ln z} - B_1 \frac{\ln(\ln z)}{\ln^2 z} \right]. \quad (5.4)$$

Задача 5.3. Показать, что в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ итеративное решение уравнения ренормгруппы для инвариантного заряда КХД (5.1) в трехпетлевом приближении ($\ell = 3$) имеет вид

$$\alpha_s^{(3)}(Q^2) \simeq \frac{4\pi}{\beta_0} \left[\frac{1}{\ln z} - B_1 \frac{\ln(\ln z)}{\ln^2 z} + \frac{1}{\ln^3 z} \left\{ B_1^2 [\ln^2(\ln z) - \ln(\ln z) - 1] + B_2 \right\} \right]. \quad (5.5)$$

Лекция 6. Партоновая модель.

Задача 6.1. Выписать матричный элемент, соответствующий процессу упругого рассеяния электрона на точечноподобном протоне (Рис. 3 А), и показать, что он может быть представлен в виде

$$|M_{if}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} L_{\mu\nu}(k, k', m) L_{\mu\nu}(P, P', M), \quad (6.1)$$

где $Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2 > 0$ – квадрат переданного импульса (пространственно-подобная область) и

$$L_{\mu\nu}(k, k', m) = 2 [k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(kk' - m^2)]. \quad (6.2)$$

Задача 6.2. Показать, что дифференциальное сечение упругого лептон-протонного рассеяния (Рис. 3 А) имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \left[1 + (1 - y)^2 - \frac{M^2 y}{kP} \right] \simeq \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \quad \text{при } y \rightarrow 0, \quad (6.3)$$

где $\alpha = e^2/(4\pi)$ и $y = (qP)/(kP)$.

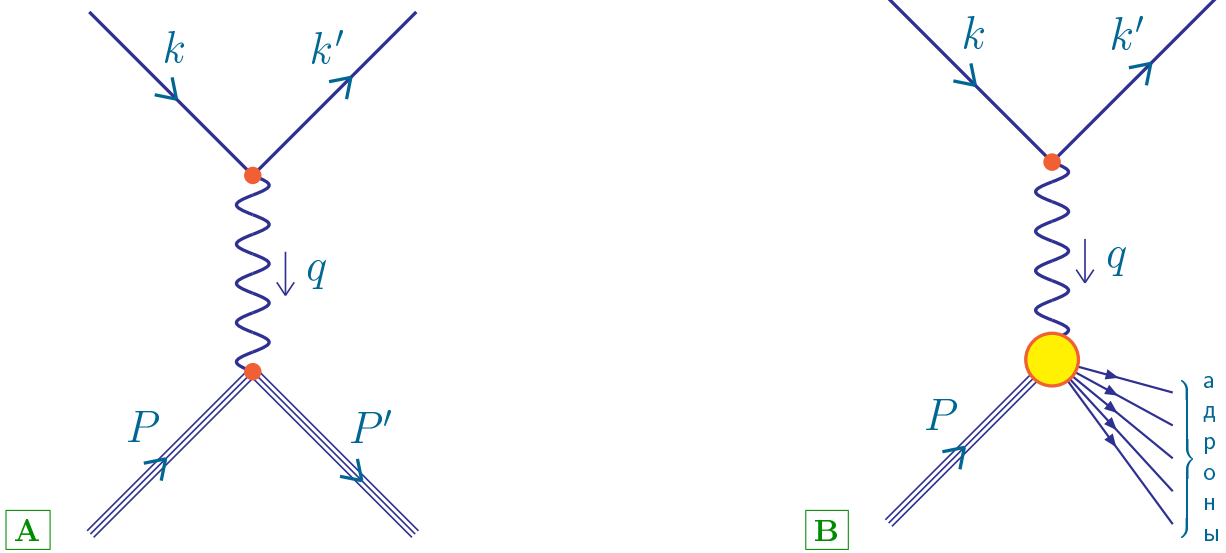


Рисунок 3: Процессы упругого (А) и глубоконеупругого (В) лептон–нуклонного рассеяния.

Задача 6.3. Исходя из условий лоренц–инвариантности, эрмитовости, четности и калибровочной инвариантности тензора $W_{\mu\nu}$, описывающего протонную вершину процесса глубоконеупругого рассеяния (Рис. 3 В), показать, что тензор $W_{\mu\nu}$ может быть представлен в виде

$$W_{\mu\nu}(P, q) = -W_1(P, q) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2(P, q)}{M_p^2} \left(P_\mu - \frac{Pq}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{Pq}{q^2} q_\nu \right), \quad (6.4)$$

где $W_1(P, q)$ и $W_2(P, q)$ – некоторые реальные скалярные функции, описывающие внутреннюю структуру протона.

Задача 6.4. Показать, что в рамках партонной модели квадрат матричного элемента глубоконеупругого лептон–нуклонного рассеяния (Рис. 3 В) имеет вид

$$|M_{if}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} \frac{4(kP)}{y} \left[xy^2 W_1(P, q) + W_2(P, q) \frac{\nu}{M_p} \left(1 - y - \frac{M_p^2}{Q^2} x^2 y^2 \right) \right], \quad (6.5)$$

где $x = Q^2/(2Pq)$ – часть импульса нуклона, которую несет взаимодействующий с фотоном партон и $\nu = Pq/M_p$.

Задача 6.5. В рамках партонной модели вывести формулу для дифференциального сечения процесса глубоконеупругого лептон–нуклонного рассеяния (Рис. 3 В)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx dQ^2} &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[y^2 F_1(x, Q^2) + \frac{F_2(x, Q^2)}{x} \left(1 - y - \frac{M_p^2}{s} xy \right) \right] \\ &\simeq \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \frac{F_2(x, Q^2)}{x} \quad \text{при } s \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $s = (k + P)^2$ – квадрат полной энергии лептона и нуклона в системе центра масс, а $F_1 = W_1$ и $F_2 = \nu W_2/M_p$ – структурные функции протона.

Лекция 7. Электрон–позитронная аннигиляция в адроны.

Задача 7.1. Найти сечение процесса электрон–позитронной аннигиляции в $\mu^+\mu^-$ (Рис. 4 А).

Задача 7.2. Показать, что сечение процесса электрон–позитронной аннигиляции в адроны (Рис. 4 В) имеет вид

$$\sigma = 4\pi^2 \frac{2\alpha^2}{s^3} L^{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu}, \quad (7.1)$$

где $s = q^2 = (p_1 + p_2)^2 > 0$ – квадрат полной энергии электрона и позитрона в системе центра масс (времени–подобная область). В уравнении (7.1) $L_{\mu\nu}$ – лептонный тензор:

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2 - (p_1 - p_2)_\mu (p_1 - p_2)_\nu], \quad (7.2)$$

$\Delta_{\mu\nu}$ – адронный тензор:

$$\Delta_{\mu\nu} = (2\pi)^4 \sum_{\Gamma} \delta(p_1 + p_2 - p_{\Gamma}) \langle 0 | J_\mu(-q) | \Gamma \rangle \langle \Gamma | J_\nu(q) | 0 \rangle, \quad (7.3)$$

Γ – конечное адронное состояние, J_μ – электромагнитный ток кварков:

$$J_\mu = \sum_{f=1}^{n_f} Q_f : \bar{q} \gamma_\mu q : \quad (7.4)$$

и Q_f обозначает заряд кварка аромата f в единицах заряда электрона. Указание: считать электрон безмассовым.



Рисунок 4: Процессы электрон–позитронной аннигиляции по электрослабому (А) и сильному (В) каналам.

Задача 7.3. Показать, что адронный тензор $\Delta_{\mu\nu}$ (7.3) может быть представлен в виде $\Delta_{\mu\nu} = 2\text{Im} \Pi_{\mu\nu}$, где

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = i \int e^{iqx} \langle 0 | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | 0 \rangle d^4x = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2). \quad (7.5)$$

Задача 7.4. Вывести дисперсионное соотношение для адронной функции поляризации вакуума $\Pi(q^2)$ (7.5)

$$\Pi(q^2) = \Pi(s') - (q^2 - s') \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{R(s)}{(s - q^2)(s - s')} ds, \quad (7.6)$$

где $m_\pi = (134.9766 \pm 0.0006) \text{ МэВ}$ – масса π^0 мезона (легчайшего адронного состояния). В подинтегральном выражении (7.6) функция $R(s)$ обозначает R -отношение электрон-позитронной аннигиляции в адроны

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} [\Pi(s - i\varepsilon) - \Pi(s + i\varepsilon)] = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}; s)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-; s)}. \quad (7.7)$$

Указание: использовать интегральную формулу Коши с вычитанием.

Задача 7.5. Для D -функции Адлера

$$D(Q^2) = \frac{d\Pi(-Q^2)}{d \ln Q^2} \quad (7.8)$$

вывести дисперсионное соотношение

$$D(Q^2) = Q^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{R(s)}{(s + Q^2)^2} ds. \quad (7.9)$$

Показать, что обратное к (7.9) интегральное соотношение между величинами $D(Q^2)$ и $R(s)$ имеет вид

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{s+i\varepsilon}^{s-i\varepsilon} D(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (7.10)$$

где контур интегрирования в комплексной ζ -плоскости лежит в области аналитичности подинтегрального выражения (7.10).

Задача 7.6. В рамках теории возмущений показать, что D -функция Адлера (7.8) в однопетлевом приближении имеет вид

$$D_{\text{pert}}^{(1)}(Q^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[1 + \frac{1}{\pi} \alpha_s^{(1)}(Q^2) \right], \quad (7.11)$$

где бегущая константа связи $\alpha_s^{(1)}(Q^2)$ определена в (5.2). С помощью интегрального соотношения (7.10) показать, что функция $R(s)$, соответствующая $D_{\text{pert}}^{(1)}(Q^2)$ (7.11), имеет вид

$$R_{\text{pert}}^{(1)}(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[1 + \frac{1}{\pi} \widehat{\alpha}_s^{(1)}(s) \right], \quad (7.12)$$

где

$$\widehat{\alpha}_s^{(1)}(s) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{\ln w}{\pi}\right) \right], \quad w = \frac{s}{\Lambda^2}. \quad (7.13)$$

Показать, что в ультрафиолетовом пределе $s \rightarrow \infty$ уравнение (7.12) принимает вид

$$R_{\text{pert}}^{(1)}(s) \simeq N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[1 + \frac{1}{\pi} \alpha_s^{(1)}(|s|) - \frac{\pi}{3} \left(\frac{\beta_0}{4\pi} \right)^2 [\alpha_s^{(1)}(|s|)]^3 + \mathcal{O}\left\{[\alpha_s^{(1)}(|s|)]^5\right\} \right]. \quad (7.14)$$

Задача 7.7. Исходя из экспериментальных данных коллаборации CLEO $R(s_0) = 3.56 \pm 0.01 (\text{stat.}) \pm 0.07 (\text{syst.})$, $\sqrt{s_0} = 10.52 \text{ ГэВ}$ ($n_f = 4$) оценить значение масштабного параметра Λ в однопетлевом приближении.

Лекция 8. Инклюзивный распад τ лептона.

Задача 8.1. Найти ширину распада τ лептона по электрослабому каналу (Рис. 5 А).

Задача 8.2. Показать, что сильная поправка Δ_{QCD} к измеряемому на эксперименте отношению двух ширин распада τ лептона

$$\begin{aligned} R_\tau &= \frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau \text{ адроны})}{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e)} = R_{\tau,V} + R_{\tau,A} + R_{\tau,S} \\ &= N_c (|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2) S_{\text{EW}} (\Delta_{\text{QCD}} + \delta'_{\text{EW}}) \end{aligned} \quad (8.1)$$

может быть представлена в виде

$$\Delta_{\text{QCD}} = 2 \int_0^{M_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2 \frac{s}{M_\tau^2}\right) R_0(s) \frac{ds}{M_\tau^2}, \quad (8.2)$$

где $M_\tau = 1.777 \text{ ГэВ}$ – масса τ лептона,

$$R_0(s) = R(s) \left[N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \right]^{-1}, \quad (8.3)$$

а $R(s)$ определено в (7.7). В уравнении (8.1) $|V_{ud}| = 0.97377 \pm 0.00027$ и $|V_{us}| = 0.2257 \pm 0.0021$ – элементы матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава, а $S_{\text{EW}} = 1.0194 \pm 0.0050$ и $\delta'_{\text{EW}} = 0.0010$ – электрослабые поправки.

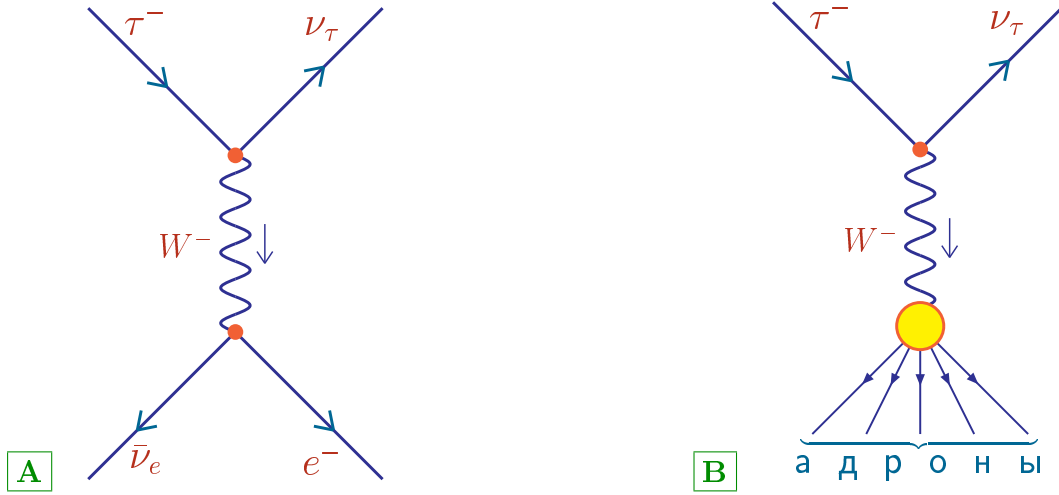


Рисунок 5: Процессы распада τ лептона по электрослабому (А) и сильному (В) каналам.

Задача 8.3. В рамках теории возмущений показать, что в однопетлевом приближении величина $R_{\tau,V}$ (8.1), соответствующая распаду τ лептона по векторному каналу с участием только легких (u, d) кварков, может быть представлена в виде

$$R_{\tau,V} = \frac{N_c}{2} |V_{ud}|^2 S_{\text{EW}} \left[1 + \frac{1}{\pi} \alpha_s^{(1)}(M_\tau^2) + \delta'_{\text{EW}} \right]. \quad (8.4)$$

Задача 8.4. Исходя из экспериментальных данных коллаборации ALEPH $R_{\tau,V} = 1.787 \pm 0.011 \pm 0.007$ ($n_f = 2$) оценить значение масштабного параметра Λ в однопетлевом приближении.

Лекция 9. Вклад сильных взаимодействий в электрослабые процессы.

Задача 9.1. Показать, что в лидирующем порядке теории возмущений вклад сильных взаимодействий в аномальный магнитный момент мюона $a_\mu = (g - 2)_\mu/2$ (Рис. 6) имеет вид

$$a_\mu^{\text{HLO}} = \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} K(s)R(s) \frac{ds}{s}, \quad (9.1)$$

где $R(s)$ определено в (7.7),

$$K(s) = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)s/m_\mu^2} dx, \quad (9.2)$$

а $m_\mu = 105.658$ МэВ – масса мюона.

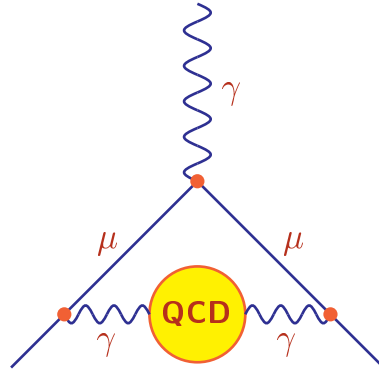


Рисунок 6: Вклад сильных взаимодействий в аномальный магнитный момент мюона.

Задача 9.2. Показать, что вклад сильных взаимодействий в сдвиг постоянной тонкой структуры

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \Delta\alpha(q^2)}, \quad \Delta\alpha(q^2) = \frac{\alpha_0}{3\pi} \Pi_0(q^2) \quad (9.3)$$

на масштабе массы Z -бозона определяется формулой:

$$\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(M_Z^2) = -\frac{\alpha_0}{3\pi} M_Z^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{R(s)}{s - M_Z^2} \frac{ds}{s}, \quad (9.4)$$

где $\alpha_0 = 1/137.036$, $M_Z = (91.1876 \pm 0.0021)$ ГэВ, а интегрирование в (9.4) понимается в смысле главного значения. Указание: использовать дисперсионное соотношение для адронной функции поляризации вакуума $\Pi(q^2)$ (7.6) с вычитанием в точке $s' = 0$.

Лекция 10. Конфайнмент: потенциальные модели.

Задача 10.1. Показать, что в лидирующем порядке теории возмущений амплитуда процесса рассеяния кварка на антикварке в нерелятивистском пределе имеет вид

$$M_{if}(k) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{4}{3} \frac{g^2}{\vec{k}^2}, \quad (10.1)$$

где k – переданный импульс.

Задача 10.2. Показать, что потенциал кварк–антикваркового взаимодействия в мезоне, соответствующий амплитуде (10.1)

$$V(x) = -(2\pi)^3 \int M_{if}(k) \exp(-i\vec{k}\vec{x}) d^3k, \quad (10.2)$$

в сферически–симметричном случае имеет вид

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha}{r}, \quad (10.3)$$

где $\alpha = g^2/(4\pi)$.

Задача 10.3. Показать, что потенциал межкваркового взаимодействия в барионе имеет вид

$$V(r) = -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{r}. \quad (10.4)$$

Показать, что взаимодействие трех кварков через трехглюонную вершину не дает вклада в амплитуду трехчастичного рассеяния.

Задача 10.4. Показать, что в сферически–симметричном случае потенциал кварк–антикваркового взаимодействия

$$V(r) = -\frac{8}{3\pi} \int_0^\infty \alpha(Q^2) \frac{\sin(Qr)}{Qr} dQ, \quad (10.5)$$

вычисленный с использованием эффективной однопетлевой бегущей константы связи

$$\alpha_R^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln(1 + Q^2/\Lambda^2)}, \quad (10.6)$$

является линейно растущим при $r \rightarrow \infty$.

Лекция 11. Конфайнмент: модель мешков.

Задача 11.1. Показать, что на поверхности статического кваркового мешка, которая определяется нормальным к ней единичным вектором \vec{n} , для собственных векторов q_+ и q_- оператора $(\vec{n}\vec{\gamma})$

$$(\vec{n}\vec{\gamma})q_\pm = \pm iq_\pm \quad (11.1)$$

выполняется условие отсутствия цветового тока через поверхность мешка

$$\bar{q}_\pm(\vec{n}\vec{\gamma})q_\pm\Big|_{\text{bag}} = 0. \quad (11.2)$$

Задача 11.2. Показать, что кванты, описываемые собственным вектором $q_-(x)$ оператора $(\vec{n}\vec{\gamma})$ (11.1), являются античастицами по отношению к квантам, описываемым собственным вектором $q_+(x)$. Указание: использовать соотношение между волновыми функциями частицы q и соответствующей античастицы \tilde{q} :

$$\tilde{q}(x) = \widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}q(x), \quad \widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}q = \gamma_0 i \gamma_2 [i \gamma_1 \gamma_3 (q)^*]^*. \quad (11.3)$$

Задача 11.3. Показать, что в сферически-симметричном случае ($\vec{n} = \vec{e}_r$) условие конфайнмента цвета (11.2) и условие равенства давления кварков на внутреннюю поверхность мешка радиуса R давлению физического вакуума $B = (146 \text{ МэВ})^4$ на внешнюю поверхность мешка (модель “MIT bag”) задаются системой уравнений

$$\begin{cases} -i(\vec{e}_r\vec{\gamma})q(x) = q(x)\Big|_{|x|=R}, \\ \frac{1}{2}(\vec{n}\vec{\nabla})\sum_q \bar{q}(x)q(x)\Big|_{|x|=R} = B. \end{cases} \quad (11.4)$$

Лекция 12. Топологическая структура вакуума в КХД.

Задача 12.1. Показать, что в 4-мерном евклидовом пространстве-времени уравнения движения для системы с действием (чистая глюодинамика)

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2g^2} \int \text{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]d^4x \quad (12.1)$$

имеют вид

$$D^\mu G_{\mu\nu} = \partial^\mu G_{\mu\nu} + [A^\mu, G_{\mu\nu}] = 0, \quad (12.2)$$

где

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (12.3)$$

Задача 12.2. Показать, что для калибровочной группы $SU(2)$ решение уравнения самодуальности

$$G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}, \quad \tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}G^{\alpha\beta} \quad (12.4)$$

в евклидовом пространстве-времени имеет вид

$$A_\mu(x) = -2i \frac{\Sigma_{\mu\nu}(x-a)^\nu}{|x-a|^2 + \rho^2}, \quad (12.5)$$

где 4–вектор a_μ задает положение центра инстантона, ρ – характерный размер инстантона, $\Sigma_{\mu\nu} = \eta_{i\mu\nu}\sigma_i/2$, $\bar{\Sigma}_{\mu\nu} = \bar{\eta}_{i\mu\nu}\sigma_i/2$, $i = 1, 2, 3$, а $\eta_{i\mu\nu}$ обозначает символ 'т Хоффа:

$$\eta_{i\mu\nu} = \begin{cases} \varepsilon_{i\mu\nu}, & \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ \delta_{i\mu}, & \nu = 4 \\ -\delta_{i\nu}, & \mu = 4 \end{cases}, \quad \bar{\eta}_{i\mu\nu} = \begin{cases} \varepsilon_{i\mu\nu}, & \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ -\delta_{i\mu}, & \nu = 4 \\ \delta_{i\nu}, & \mu = 4 \end{cases}. \quad (12.6)$$

Указание: решение уравнения (12.4) следует искать в виде

$$A_\mu(x) = i\bar{\Sigma}_{\mu\nu} \partial^\nu [\ln \varphi(x)] \quad (12.7)$$

и использовать сингулярное калибровочное $SU(2)$ преобразование $A_\mu \Rightarrow U(A_\mu + \partial_\mu)U^{-1}$, где

$$U(x) = \frac{1}{|x|} (x_4 1 + ix_i \sigma_i). \quad (12.8)$$

Здесь σ_i – матрицы Паули, 1 – единичная матрица (2×2).

Задача 12.3. Показать, что решение (12.5) приводит к тензору напряженности поля

$$G_{\mu\nu} = 4i \frac{\Sigma_{\mu\nu} \rho^2}{(|x - a|^2 + \rho^2)^2}. \quad (12.9)$$

Показать, что при $x \rightarrow \infty$ решение (12.5) переходит в “чистую калибровку”

$$A_\mu(x) \rightarrow U(x) \partial_\mu [U^{-1}(x)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (12.10)$$

Показать, что плотность действия (12.1) для решений (12.5) локализована вблизи центра инстантона

$$(G_{\mu\nu})^2 = \frac{192\rho^4}{(|x - a|^2 + \rho^2)^4}, \quad (12.11)$$

и что действие (12.1) на решении (12.5) принимает конечное значение $\mathcal{A} = 8\pi^2/g^2$.

Задача 12.4. Показать, что решение уравнения антисамодуальности

$$G_{\mu\nu} = -\tilde{G}_{\mu\nu} \quad (12.12)$$

в евклидовом пространстве–времени имеет вид

$$A_\mu(x) = -2i \frac{\bar{\Sigma}_{\mu\nu} (x - a)^\nu}{|x - a|^2 + \rho^2}. \quad (12.13)$$

Найти тензор напряженности глюонного поля, плотность действия, и вычислить действие на решении (12.13).