Задачи по курсу «Классическая теория поля»

1. В квадратурах найти закон движения (нерелятивистской) частицы массы m и заряда e в поле магнитного монополя с магнитным зарядом g, помещенного в начало координат.

2. $$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - \lambda\Big(\phi^*\phi - v^2\Big)^2$$

   Вычислить симметризованный тензор энергии-импульса.

3. Явным вычислением убедиться, что произвольный элемент группы $SO(3)$ (описывающий поворот на угол α вокруг единичного вектора $\vec{n}$) может быть получен с помощью экспоненциального отображения.

4. Явным вычислением убедиться, что с помощью экспоненциального отображения нельзя получить произвольный элемент группы $SL(2,R)$

5. Проверить, что для поля ϕ находящегося в присоединенном представлении калибровочной группы ковариантная производная может быть записана в виде
   $$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + [A_\mu, \phi]$$
   и доказать тождество Бьянки $D_\mu\tilde{F}_{\mu\nu} = 0$.

6. Показать, что для теории Янга-Миллса со скалярным полем ток j^μ удовлетворяет закону сохранения $\mathcal{D}_\mu j^\mu = \partial_\mu j^\mu + [A_\mu, j^\mu] = 0$. Доказать это двумя способами: из (неабелевых) уравнений Максвелла и явно, используя уравнения движения для скалярного поля.

7. $$L = (\partial_\mu\Phi)^+(\partial_\mu\Phi) - \lambda\Big(\Phi^+\Phi - v^2\Big)^2,$$

   поле Φ находится в фундаментальном представлении группы SU(2). Найти функцию Лагранжа в квадратичном приближении вблизи вакуумного состояния и проверить справедливость теоремы Голдстоуна.

8. $$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{a\ 2} + (D_\mu\Phi)^+(D_\mu\Phi) - \lambda\Big(\Phi^+\Phi - v^2\Big)^2,$$

   поле Φ находится в фундаментальном представлении группы SU(2). Найти функцию Лагранжа в квадратичном приближении вблизи вакуумного состояния и проверить справедливость теоремы Хиггса.

9. Построить симметризованный тензор энергии-импульса для классической электродинамики.

10. Доказать инвариантность действия поля Янга-Миллса относительно глобальных преобразований $A_\mu(x) \to \alpha A_\mu(\alpha x)$ и найти соответствующий сохраняющийся ток.

11. Убедиться, что зарядовое сопряжение не меняет закон преобразования спинора под действием группы Лоренца.

12. Доказать тождества

$$\begin{gathered}\bar{\psi}^C \chi^C = \bar{\chi}\psi; \qquad \bar{\psi}^C \gamma_5 \chi^C = \bar{\chi}\gamma_5\psi; \qquad \bar{\psi}^C \gamma^\mu \chi^C = -\bar{\chi}\gamma^\mu\psi; \\ \bar{\psi}^C \gamma^\mu \gamma_5 \chi^C = \bar{\chi}\gamma^\mu\gamma_5\psi; \qquad \bar{\psi}^C \Sigma^{\mu\nu} \chi^C = -\bar{\chi}\Sigma^{\mu\nu}\psi.\end{gathered}$$