ЗАДАЧИ ПО КУРСУ "МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД"

(5 курс 1 поток)

1. Определить силу, с которой несжимаемая жидкость действует на погруженное в нее неподвижное тело (закон Архимеда).

2. Найти соотношение между скоростями и давлениями при стационарном течении несжимаемой идеальной жидкости в горизонтально расположенной трубке переменного сечения.

3. Доказать, что в отсутствие объемных сил при установившемся движении сила, действующая на данный объем идеальной жидкости, равна потоку импульса через его поверхность.

4. Доказать, что в отсутствие объемных сил при установившемся движении момент сил, действующих на данный объем идеальной жидкости, равен потоку момента импульса через его поверхность.

5. Косой удар струи: определить силу и момент, с которой струя идеальной несжимаемой жидкости действует на плоскую пластинку. Угол падения струи α, плотность жидкости ρ, начальная скорость струи v_0, внешнее давление p_0, движение плоское.

6. Открытый тяжелый колпак в виде усеченного кругового конуса с углом α при основании и радиусом основания R стоит на горизонтальной плоскости. Каков должен быть вес колпака G, чтобы он смог удержать воду, налитую внутрь него до высоты H? Всюду вне колпака давление атмосферное.

7. Простейшим способом определения глубины покоящейся жидкости в сосуде является опускание до его дна плоской линейки и измерение длины ее смоченной части. Определить относительную погрешность при этом способе измерения. Угол смачивания считать известным.

8. Найти значения температуры, плотности и давления в критической точке неподвижного тела (точке на поверхности обтекаемого тела, где скорость потока равна нулю), помещенного в стационарный поток идеального сжимаемого газа. Скорость, плотность и температура на бесконечности равны $v_\infty, \rho_\infty, T_\infty$.

9. Стационарный поток идеального газа, скорость которого на бесконечности равна v_∞, обтекает неподвижное тело. В некоторой точке на поверхности обтекаемого

тела, где скорость потока равна нулю, плотность и температура газа равны соответственно ρ_0 и T_0. Найти значения температуры, плотности и давления на бесконечности.

10. Написать уравнение механического равновесия газообразной звезды плотности ρ, части которой удерживаются силами гравитационного притяжения. Учесть, что гравитационный потенциал U удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U = -4\pi G\rho$, где G - гравитационная постоянная. Найти распределение давления в звезде и ее радиус, если масса звезды равна M, а уравнение состояния имеет вид: а) $\rho = \rho_0 = const$ б) $p = C\rho^{1/2}$. Давление в центре звезды считать конечным, вне звезды - равным нулю.

11. Пусть имеется закрытый покоящийся сосуд, целиком заполненный неоднородной ($\rho \neq const$) идеальной несжимаемой жидкостью. Жидкость находится в равновесии в поле тяжести. Показать, что, если начать двигать сосуд горизонтально с ускорением, в сосуде возникнет непотенциальное движение жидкости относительно его стенок. Рассмотреть также случай однородной жидкости.

12. Показателем времени в водяных часах служит высота уровня в верхнем сосуде, которая должна уменьшатся равномерно с постоянной скоростью. Определить форму сосуда, употребляемую для водяных часов.

13. Из идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство, внезапно удаляется сферический объем радиуса a_0. Получить уравнение, определяющее закон движения границы полости. Определить время, в течение которого образовавшаяся полость заполнится жидкостью. Плотность жидкости и ненулевое давление на бесконечности считать известным.

14. Найти распределение скорости идеальной жидкости вокруг шара радиуса R, центр которого движется со скоростью $u(t)$ в первоначально покоившейся идеальной несжимаемой жидкости.

15. Найти силу сопротивления, действующую на шар радиуса R в идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ, если центр шара движется со скоростью $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$.

16. Шар радиуса R и массы M совершает одномерные колебания в идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ под действием пружины жесткости k. Найти

частоту колебаний.

17. Частота колебаний тяжелого шарика (плотность материала ρ_0), соединенного с пружиной, в воздухе равна ω_0. Как изменится эта частота, если осциллятор поместить в идеальную жидкость с плотностью ρ_1.

18. Определить период колебаний математического маятника (маленькая сфера из материала с плотностью ρ_1 на нити длиной l), помещенного в идеальную несжимаемую жидкость с плотностью $\rho_0 < \rho_1$.

19. Вертикальная труба радиусом R заполнена идеальной несжимаемой жидкостью, соосно с ней помещен легкий (плотность много меньше плотности жидкости) цилиндр радиусом r и длиной L, причем $L >> R$. Найти ускорение, с которым будет всплывать цилиндр.

20. Найти подъемную силу, действующую на единицу длины цилиндра радиуса R, движущегося со скоростью $u(t)$ в первоначально покоившейся идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ, если циркуляция скорости по контуру, охватывающему цилиндр, равна Г. Течение плоское.

21. Найти закон дисперсии гравитационных волн, распространяющихся в несжимаемой идеальной жидкости плотности ρ, находящейся в бассейне глубины h. Ускорение свободного падения g.

22. Определить закон дисперсии гравитационных волн, распространяющихся вдоль границы раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей, имеющих плотности ρ_1 и ρ_2 и находящихся в поле тяжести $\vec{g}$.

23. Вычислить энергию и импульс монохроматической гравитационной волны $\xi(x,t) = \xi_0 \cos(\omega t - kx)$ на свободной поверхности глубокой жидкости.

24. По поверхности жидкости распространяется квазимонохроматический пакет гравитационных поверхностных волн, содержащий $N (N \gg 1)$ горбов и впадин. Сколько колебаний вверх-вниз совершит находящийся на поверхности легкий поплавок при прохождении этого волнового пакета?

25. При возмущении поверхности находящейся в поле тяжести жидкости точечным источником от места возмущения начинают расходиться в виде кругов гравитационные волны, заполняющие краг радиусом $R(t)$. Найти $R(t)$.

26. Найти интенсивность звуковых волн, излучаемых шаром в идеальной жидкости, если радиус шара меняется со временем по закону $R(t) = R_0 + a\cos(\omega t)$. Плотность покоящейся жидкости ρ, скорость звука в ней c, причем $a \ll R_0 \ll c/\omega$.

27. Найти интенсивность звуковых волн, излучаемых шаром радиуса R в идеальной жидкости, если центр шара движется со скоростью $u(t) = u_0\cos(\omega t)$. Плотность покоящейся жидкости ρ, скорость звука в ней c, причем $|u_0|/\omega \ll R \ll c/\omega$.

28. Найти частоты собственных колебаний идеального газа с постоянной теплоемкостью, помещенного в замкнутый цилиндр, расположенный вертикально в поле тяжести g. Длина цилиндра L, газ движется параллельно оси цилиндра. Молярная масса газа μ, показатель адиабаты γ, температура равновесного газа T_0.

29. Найти частоты собственных изотермических колебаний идеального газа, помещенного в замкнутый цилиндр, расположенный вертикально в поле тяжести g. Длина цилиндра L, газ движется параллельно оси цилиндра. Молярная масса газа μ, температура T.

30. Найти декремент затухания малых радиальных колебаний пузыря воздуха в идеальной неограниченной жидкости плотности ρ, связанный с излучением пузырем звуковых волн. В состоянии покоя радиус пузыря R_0, давление в жидкости p_0. Воздух считать идеальным газом с постоянной теплоемкостью (показатель адиабаты γ), а его распределение в пузыре однородным. Скорость звука в жидкости c, причем $c^2 \gg p_0/\rho$.

31. Большой бак с идеальной жидкостью с плотностью ρ_0 совершает колебания с амплитудой A. Внутри бака находится маленький шарик из материала с плотностью ρ_1. Найти амплитуду колебаний шарика. Внешние силы отсутствуют.

32. Монохроматическая звуковая волна, распространяющаяся в жидкости с плотностью ρ_1 со скоростью c_1, отражается по нормали от границы раздела с другой жидкостью, имеющей плотность ρ_2 и скорость звука c_2. Найти среднее давление на единицу площади границы, если средняя плотность потока энергии в падающей волне равна q_1.

33. Найти поля давления и скорости при стационарном движении несжимаемой вязкой жидкости между параллельными плоскостями, одна из которых неподвижна,

а другая движется со скоростью V. Расстояние между плоскостями d, объемные силы отсутствуют.

34. То же, если плоскости неподвижны и при наличии постоянного перепада давления Δp.

35. Несжимаемая вязкая жидкость течет по цилиндрической трубе радиуса R. Считая, что поток стационарен, перепад давления задан и объемные силы отсутствуют, найти поля давления, скорости и касательную составляющую силы, приложенной к единице длины трубы.

36. Найти силу, с которой стационарный поток несжимаемой вязкой жидкости действует на неподвижную сферу радиуса R. Скорость потока на бесконечности V, число Рейнольдса мало.

37. Вязкая несжимаемая жидкость плотности ρ заполняет полупространство, ограниченное плоской бесконечной пластиной. Определить движение жидкости, если пластина колеблется в своей плоскости со скоростью $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$. Кинематическая вязкость жидкости ν. Найти среднюю энергию, диссипируемую в единицу времени на единицу площади поверхности.

38. Покоящаяся вязкая несжимаемая жидкость заполняет полупространство, ограниченное плоской бесконечной пластиной. Определить движение жидкости, если в некоторый момент времени пластина начинает двигаться в своей плоскости с постоянной скоростью u. Кинематическая вязкость жидкости ν. Найти силу сопротивления, действующую на единицу площади поверхности пластины.

39. Найти среднюю энергию, диссипируемую в единицу времени при движении шара радиуса R в вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ, если центр шара движется со скоростью $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$, причем $\nu/\omega \ll R^2$, где ν есть кинематическая вязкость жидкости.

40. На слое вязкой жидкости толщиной h плавает пластина, масса единицы площади которой μ. Дно кюветы совершает малые колебания в своей плоскости с амплитудой A частотой ω. Найти амплитуду колебаний пластины.

41. Найти силу трения, действующую на шар радиуса R в вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ, если центр шара движется со скоростью $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$,

причем $\nu/\omega \ll R^2$, где ν есть кинематическая вязкость жидкости.

42. Бесконечный цилиндр радиуса R вращается в вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ с постоянной угловой скоростью Ω. Найти момент силы трения, действующий на единицу длины цилиндра. Динамическая вязкость жидкости η.

43. Найти декремент затухания гравитационных волн длины λ, распространяющихся в бесконечно глубокой несжимаемой жидкости вязкости ν.

44. Определить распределение температуры при установившемся пуазейлевом течении вязкой жидкости в трубе радиуса R и длины $L \gg R$, если ее поверхность поддерживается при постоянной температуре T_0. Динамическая вязкость жидкости η и ее теплопроводность κ не зависят от температуры. Разность давлений на концах трубы Δp.

45. Определить распределение температуры при установившемся пуазейлевом течении вязкой жидкости в трубе радиуса R и длины $L \gg R$,, температура которой $T(R, x) = T_0 x$. Динамическая вязкость жидкости η, ее теплопроводность κ, разность давлений на концах трубы Δp.

46. Бесконечный цилиндр радиуса R вращается в вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ с постоянной угловой скоростью Ω. Определить установившееся распределение температуры в жидкости, если поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре T_0. Динамическая вязкость жидкости η и ее теплопроводность κ не зависят от температуры.

47. Найти установившуюся скорость всплывания невесомого цилиндра радиуса R и длины $L \gg R$ в соосном с ним цилиндрическом колодце, расположенном вертикально в поле тяжести g и заполненном несжимаемой вязкой жидкостью плотности ρ. Радиус колодца равен $R + h$, $h \ll R$, кинематическая вязкость жидкости ν.

48. Найти частоту и декремент малых радиальных колебаний пузыря воздуха в несжимаемой неограниченной жидкости с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν. Средний радиус пузыря R_0, давление в жидкости на бесконечности p_0. Воздух считать идеальным газом с постоянной теплоемкостью (показатель адиабаты γ), а его распределение в пузыре однородным.

49. В слое вязкой жидкости, толщина которого h, плавает пластина, масса еди-

ницы площади которой равна μ. Дно совершает колебания в своей плоскости с амплитудой A и частотой ω. Найти амплитуду колебаний пластины.

50. Определить частоту и декремент затухания малых радиальных колебаний пузырька газа радиусом R (показатель адиабаты γ), находящегося в вязкой несжимаемой жидкости с давлением p_0, плотностью ρ_0 и вязкостью η.

51. Плоское дно бесконечно глубокой вязкой жидкости приводится в движение со скоростью $v = v_0 cos \omega t$. Найти среднюю мощность, необходимую для поддержания этих колебаний. Плотность жидкости ρ, кинематическая вязкость ν.

52. Найти декремент затухания звуковых волн в идеальном газе при учете теплопроводности. Молекулярный вес газа – μ, показатель адиабаты – γ, коэффициент теплопроводности – κ.

53. В точке M неограниченного пространства, заполненного покоящейся жидкостью, происходит взрыв - мгновенно выделяется и передается жидкости кинетическая энергия E_0. Определить возникшее движение жидкости, считая ее линейно-вязкой. Сжимаемостью жидкости, силой тяжести и величиной давления на больших расстояниях от точки M пренебречь.

54. Два круглых соосно расположенных диска одинакового радиуса R погружены в вязкую жидкость и медленно сближаются с относительной скоростью $2u$. Определить испытываемое дисками сопротивление, когда расстояние $2h$ между ними мало.

55. Пусть в начальный момент времени в несжимаемой вязкой жидкости имеется бесконечно тонкая вихревая нить $\vec{\omega}(\rho, 0) = \Gamma_0 \vec{e}_z \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}$. Определить поля вихря и скорости в момент времени t .

56. Оценить порядок величины изменения скорости элемента турбулентной жидкости за время τ много меньшее характерного времени движения жидкости L/V .

57. Найти закон изменения расстояния между двумя близкими элементами жидкости при их турбулентном движении.

58. В трубе радиуса R и длиной L стационарное течение несжимаемой жидкости с плотностью ρ и вязкостью η создается перепадом давления Δp . Найти расход жидкости в трубе при малых, когда течение ламинарно, и при больших, т.е. в режиме развитой турбулентности, перепадах давления.

59. Дать оценку пространственного масштаба движений, в которых происходит вязкая диссипация энергии, для основного сечения трубы в рассмотренном в предыдущей задаче турбулентном режиме.

60. Оценить поток тепла в нагреваемой снизу жидкости, когда число Рэлея R значительно превышает пороговое значение $R_{\text{кр}}$.