Задачи по курсу «Суперсимметрия»

1. Доказать, что если ψ и χ – майорановсие спиноры, то имеют место следующие тождества:

$$
\begin{aligned}
&(\bar\psi\chi) = (\bar\chi\psi);\\
&(\bar\psi\gamma_5\chi) = (\bar\chi\gamma_5\psi);\\
&(\bar\psi\gamma^\mu\chi) = -(\bar\chi\gamma^\mu\psi);\\
&(\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\chi) = (\bar\chi\gamma^\mu\gamma_5\psi);\\
&(\bar\psi\Sigma_{\mu\nu}\chi) = -(\bar\chi\Sigma_{\mu\nu}\psi).
\end{aligned}
$$

2. Доказать, что для произвольных спиноров ψ и χ имеют место следующие тождества:

$$
\begin{aligned}
&(\bar\psi\chi)^* = (\bar\chi\psi);\\
&(\bar\psi\gamma_5\chi)^* = -(\bar\chi\gamma_5\psi);\\
&(\bar\psi\gamma^\mu\chi)^* = (\bar\chi\gamma^\mu\psi);\\
&(\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\chi)^* = (\bar\chi\gamma^\mu\gamma_5\psi);\\
&(\bar\psi\Sigma_{\mu\nu}\chi)^* = -(\bar\chi\Sigma_{\mu\nu}\psi).
\end{aligned}
$$

   С учетом результатов предыдущей задачи найти какие величины будут вещественными, а какие мнимыми в случае, если спиноры майорановские.

3. Проверить суперсимметричную инвариантность модели Весса-Зумино вне массовой поверхности.

4. Найти как преобразуются компоненты кирального супермультиплета под действием совокупности преобразования суперсимметрии и калибровочного преобразования, которая сохраняют калибровку Весса-Зумино.

5. Убедиться в справедливости следующих тождеств:

$$
\begin{aligned}
&\bar D(1-\gamma_5)D\Big(\varphi(x)\Big) = \bar\theta(1+\gamma_5)\theta\ \partial^2\varphi(y);\\
&\bar D(1-\gamma_5)D\Big(\bar\theta^a\varphi(x)\Big) = 2i\Big(\bar\theta(1+\gamma_5)\gamma^\mu\Big)^a\partial_\mu\varphi(y);\\
&\bar D(1-\gamma_5)D\Big((\bar\theta\theta)\varphi(x)\Big) = -8\varphi(y);\\
&\bar D(1-\gamma_5)D\Big((\bar\theta\gamma_5\theta)\varphi(x)\Big) = 8\varphi(y);\\
&\bar D(1-\gamma_5)D\Big((\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta)\varphi(x)\Big) = 4i\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\ \partial_\mu\varphi(y);\\
&\bar D(1-\gamma_5)D\Big((\bar\theta\theta)\bar\theta^a\varphi(x)\Big) = -4\Big(\bar\theta(1+\gamma_5)\Big)^a\varphi(y);\\
&\bar D(1-\gamma_5)D\Big((\bar\theta\theta)^2\varphi(x)\Big) = -8\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\varphi(y)
\end{aligned}
$$

6. Используя результат предыдущей задачи найти выражение для суперсимметричного аналога тензора напряженности калибровочного поля W_a в терминах компонентных полей в калибровке Весса-Зумино.

7. Доказать, что в 4-х измерениях справедливо тождество

$$(C\gamma^\mu)_{ab}(C\gamma_\mu)_{cd} + (C\gamma^\mu)_{ac}(C\gamma_\mu)_{db} + (C\gamma^\mu)_{ad}(C\gamma_\mu)_{bc} = 0.$$

   Указание: использовать разложение по стандартному базису в пространстве матриц 4×4, умноженному справа на C.

8. Используя результаты предыдущей задачи явно проверить инвариантность N=1 суперсимметричной теории Янга-Миллса (в калибровке Весса-Зумино) относительно преобразований суперсимметрии и найти соответствующий сохраняющийся ток.