ЗАДАЧИ
по спецкурсу
«ТЕОРИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ. Ч. 1»

1. Вычислить ширину Γ распада мюона $\mu \to e\bar{\nu}_e\nu_\mu$ в рамках теории 4-фермионного взаимодействия:
$M_{fi} = (4G_F/\sqrt{2})(\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma_L^\alpha u_\mu)(\bar{u}_e\gamma_{\alpha L}v_{\nu_e})$.
Указание. Использовать тождество Фирца
$(\bar{a}\gamma_\alpha^L b)(\bar{c}\gamma_{\alpha L} d) = -(\bar{a}\gamma_\alpha^L d)(\bar{c}\gamma_{\alpha L} b)$
и пренебречь малым отношением масс m_e/m_μ.

2. Вычислить дифференциальное сечение процесса
$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ с учетом нейтрального слабого тока на основе лагранжиана взаимодействия
$\mathcal{L} = e(\bar\psi_e\gamma^\alpha\psi_e)A_\alpha + (g/2\cos\theta_W)(\bar\psi_e\gamma^\alpha(v_e + a_e\gamma^5)\psi_e)Z_\alpha +$
$+(e\to\mu)$,
где $e = g\sin\theta_W$. Ограничиться областью высоких энергий и пренебречь массами лептонов. Показать, что в ц-системе
$d\sigma/d\cos\theta = (\alpha^2/4s)R[1+\cos^2\theta + A\cos\theta]$,
где $\sqrt{s}$ — энергия в ц-системе, θ — угол рассеяния; R, A — функции констант связей a_l, v_l и энергии.

3. Слабые токи имеют вид:
$j_\alpha^a = \sum_l \bar\psi_l \frac{\tau_a}{2}\gamma_\alpha^L\psi_l$, $\psi_l = \begin{pmatrix}\nu_l\\ l\end{pmatrix}$, $l = e,\ \mu,\ \tau$;
τ_a — матрицы Паули ($a=1,2,3$). Показать, что нётеровские заряды
$I_\pm = \int d^3x\, j_0^\pm(t,\mathbf{x})$, $I_3 = \int d^3x\, j_0^3$, $\tau_\pm = \tau_1 + i\tau_2$,
образуют алгебру слабого изоспина SU(2):
$[I_\pm, I_3] = \mp I_\pm$, $[I_+, I_-] = 2I_3$.
Указание. Использовать известные перестановочные соотношения для операторов фермионных полей.

4. В модели Джорджа–Глешоу, основанной на калибровочной группе SU(2), вводятся дополнительные тяжелые лептоны: заряженный E^+ и нейтральный N. Вместе с известными частицами ν_e, e они объединяются в 2 триплета и 1 синглет:
$$\begin{pmatrix} E^+ \\ \nu_e\cos\alpha + N\sin\alpha \\ e\end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix}E^+\\ N\\ e\end{pmatrix}_R, \quad (N\cos\alpha - \nu_e\sin\alpha)_R,$$
где α — угол смешивания. По аналогии с задачей 3 вычислить $I_\pm$ и показать, что $[I_+, I_-] = 2Q$, где электрический заряд
$Q = \int d^3x\,(E^+E^- - e^+e^-)$.

5. Лагранжиан поля Янга–Миллса $\mathbf{W}_\mu = (W_\mu^a)$ (группа SU(2)), взаимодействующего со скалярным изотриплетом $\boldsymbol\phi = (\phi^a)$, имеет вид:
$$\mathcal{L} = \frac12(D_\mu\boldsymbol\phi)(D^\mu\boldsymbol\phi) + \frac{\mu}{2}\boldsymbol\phi^2 - \frac{\lambda}{4}(\boldsymbol\phi^2)^2 - \frac14\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu};\quad \mu>0,\ \lambda>0;$$
$D_\mu\boldsymbol\phi = \partial_\mu\boldsymbol\phi + g\boldsymbol\phi\times\mathbf{W}_\mu$.
Получить явный вид $\mathcal{L}$ в унитарной калибровке:
$$\boldsymbol\phi = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ v+\eta\end{pmatrix}, \quad v = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

6. Лагранжиан безмассового скалярного поля
$\mathcal{L} = 1/2(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)$ инвариантен относительно сдвига $\varphi\to\varphi+\lambda$ (простейший вариант спонтанного нарушения симметрии). Показать, что нётеровский ток имеет вид $j^\mu = \partial^\mu\varphi$. Определим заряд в конечном объёме $V = L^3$ в виде
$Q_V = \int d^3x\,\partial_0\varphi(0,\mathbf{x})\exp(-\mathbf{x}^2/L^2)$ и рассмотрим состояние
$|\lambda\rangle = \lim_{V\to\infty}\exp(i\lambda Q_V)|0\rangle$. Используя представление поля φ через операторы рождения и уничтожения:
$\varphi(x) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}[a(k)e^{-ikx} + a^+(k)e^{ikx}]$, показать, что
$|\lambda\rangle = \exp[\frac{\lambda}{2}(a(0) - a^+(0))]|0\rangle$
и $\langle 0|\lambda\rangle = \lim_{V\to\infty}\langle 0|e^{i\lambda Q_V}|0\rangle = \lim_{V\to\infty}\exp[-c(\lambda L)^\nu]\to 0$,
где c, ν — *подлежащие определению* положительные постоянные.

7. Показать, что при *произвольных* значениях гиперзарядов Y_L, Y_R в лептонном лагранжиане $\mathcal{L}_l$ модели Вайнберга – Салама возникают дополнительные слагаемые:
$$\Delta\mathcal{L}_l = -\frac14 e(1 - Y_L + Y_R)(\bar e(x)\gamma^\mu\gamma^5 e(x))A_\mu(x) +$$
$$+\frac14 e(1+Y_L)(\bar\nu_e(x)\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu_e(x))A_\mu(x),$$
где $e = gg'(g^2+g'^2)^{-1/2}$.

8. В условиях задачи 3 рассмотреть первое поколение. Показать, что
$I_+ = \int d^3x\,\nu_{eL}^+ e_L$, $I_3 = \frac12\int d^3x\,(\nu_{eL}^+\nu_{eL} - e_L^+e_L)$
и оператор гиперзаряда $Y = 2(Q - I_3)$, где электрический заряд
$Q = -\int d^3x\,(e_L^+e_L + e_R^+e_R)$, коммутирует со всеми генераторами группы SU(2): $[Y, I_k] = 0$, $k = 1,2,3$.

9. Вычислить ширину распада $W\to e\bar\nu_e$, пренебрегая массами лептонов.

10. Вычислить ширину распада $Z\to\nu_l\bar\nu_l$.

11. Вычислить ширину распада $Z\to e^+e^-$.

12. Вычислить в 4-фермионном приближении модели Вайнберга–Салама сечения процессов:
$\nu_\mu e \to \nu_\mu e$, $\nu_\mu e\to\nu_e\mu$, $\nu_e e\to\nu_e e$, $e^+e^-\to\nu_e\bar\nu_e$.

13. Предположим, что масса хиггсовского бозона $m_H > 2m_W$. Вычислить ширину распада $H\to W^+W^-$.

14. Вычислить сечение процесса $e^+e^-\to W^+W^-$.

15. Нарисовать кварковые диаграммы распада $\Lambda\to n+\pi^0$.

16. Пусть M — произвольная комплексная матрица 3×3. Доказать, что она приводится к диагональному виду преобразованием $A_L M A_R^{-1} = D$, где A_L, A_R — унитарные матрицы, $D = \mathrm{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$ — диагональная матрица с вещественными положительными элементами.

17. Вычислить полную ширину распада Z-бозона (с учётом лептонных и кварковых мод распада: $Z\to\nu_l\bar\nu_l,\ l^+l^-,\ q\bar q$).
Указание. Массами фермионов, кроме t-кварка, пренебречь и учесть, что $m_t > m_Z$, так что распад $Z\to t\bar t$ запрещен.

18.02.2006 **Профессор** **А. В. Борисов**